МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ В.О. СУХОМЛИНСЬКОГО

Кафедра менеджменту організацій та зовнішньоекономічної діяльності

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до самостійної роботи з дисципліни
«Оптимізаційні методи і моделі»
для студентів освітнього рівня «бакалавр»
денної та заочної форм навчання
галузі знань: 07 Управління та адміністрування
спеціальності: 071 Облік і оподаткування

МИКОЛАЇВ-2018

Методичні рекомендації до самостійної роботи з дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» для студентів освітнього рівня «бакалавр» денної та заочної форм навчання галузі знань: 07 Управління та адміністрування, спеціальності: 071 Облік і оподаткування / О.В. Гуріна. – Миколаїв: МНУ ім. В.О. Сухомлинського, 2018. – 43 с.

Розробник: Гуріна О.В., доцент кафедри менеджменту організацій та зовнішньоекономічної діяльності МНУ ім. В.О. Сухомлинського, кандидат економічних наук, доцент

Методичні рекомендації схвалено на засіданні кафедри менеджменту організацій та зовнішньоекономічної діяльності
Протокол від «23» лютого 2018 року № 8

Методичні рекомендації погоджено навчально-методичною комісією факультету економіки
Протокол від «12» березня 2018 року № 8

Методичні рекомендації затверджено Вченою радою факультету економіки
Протокол від «12» березня 2018 року № 11

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Для сучасної математики характерне інтенсивне проникнення в інші галузі знань, зокрема в економічні науки. У більшості випадків цей процес протікає завдяки диференціації математики на ряд самостійних галузей знань. Мова математики виявилася універсальною, що репрезентує об'єктивне відображення економічних законів навколишнього середовища.

Економіка як наука про об'єктивні причини розвитку суспільства ще з ранніх часів у своїй діяльності користується різноманітними кількісними характеристиками, і тому вона акумулювала в собі велике число математичних методів. Більш того, активність економічних досліджень стає рушійною силою для математиків у подальшому розвитку математичного інструментарію. Сьогодні в економічній науці на перший план ставиться математична модель як дієвий інструмент дослідження та прогнозування розвитку соціально-економічних процесів і явищ.

Вивчення дисципліни «Економіко-математичні методи і моделі» базується на засвоєних дисциплінах циклу «Математика для економістів», що у комплексі дозволяє ставити та вирішувати оптимізаційні задачі. Бакалаврам галузей знань управління та адміністрування, соціальні та поведінкові науки, необхідно приймати не тільки оптимальні управлінські рішення, але й добре знатися на суто економічних питаннях, що також є об'єктом оптимізації. У методичних рекомендаціях розкриті ключові питання моделювання економічних явищ та процесів, надані загальні рекомендації та методи розв'язання базових оптимізаційних задач економіко-математичного моделювання. Для полегшення роботи студентів структурою рекомендацій передбачено наступну послідовність засвоєння матеріалу:

1) математична формалізація задачі у вигляді побудови економіко-математичної моделі;

2) визначення типу задачі;

3)визначення способу розв'язання оптимізаційної задачі;

4) реалізація поставленої задачі.

Для більш поглибленого засвоєння матеріалу наведено перелік навчально-методичної літератури за даною дисципліною.

2. ОСНОВИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ

При прийнятті обґрунтованих рішень вирішального значення набувають вміння чітко формулювати задачі, математично описувати процеси і явища, які розглядаються. Необхідно з усіх можливих шляхів, що ведуть до мети, обирати найбільш економічний, який найкращим чином відповідає поставленій меті.

Задачі управління і планування зазвичай зводяться до вибору деякої системи параметрів і системи функцій. Нехай необхідно знайти максимум (мінімум) функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (2.1) при умовах $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0$ або $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$ (2.2) та $x_j \ge 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$, (2.3)

де $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - функції, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - параметри управління (керовані змінні).

Функція (2.1) називається цільовою функцією, умови (2.2-2.3) являють собою обмеження задачі. Умова невід'ємності (2.3) справедлива для багатьох задач, особливо економічних, коли параметри управління x_j за своїм змістом не можуть бути від'ємними.

Напрямок досліджень, який використовує екстремальні (макс або мін) задачі управління, планування і розробку методів їх вирішення називається математичним програмуванням.

В залежності від виду цільової функції і обмежень математичне програмування поділяється на лінійне і нелінійне. У задачах лінійного програмування можливі випадки, коли параметри управління набувають лише цілі дискретні значення. При розв'язанні подібних задач використовують цілочислове програмування. Коли вихідні параметри змінюються у певних межах, тоді використовують параметричне програмування.

В сучасній науці не існує загальних і досить ефективних методів розв'язання задач нелінійного програмування. Лише для певного класу нелінійних задач, система обмежень яких лінійна, а цільова функція нелінійна, але має властивість опуклості, розроблені досить ефективні методи, що одержали назву методів опуклого програмування. На практиці доволі часто виникають ситуації, в яких необхідно приймати рішення при наявності двох або більше сторін, що мають різну мету. Результати будь-якої дії кожної із сторін залежать від рішень партнерів. Для розв'язання задач з конфліктними ситуаціями використовують математичні методи теорії ігор.

Динамічне програмування – один із розділів методів оптимізації, в яких процес прийняття рішення може бути розбитий на окремі етапи. В основі методу лежить принцип оптимальності, який розробив Р. Беллман.

Теорія масового обслуговування вивчає системи, контролює їх характеристики для здійснення оптимізації системи в цілому.

При вирішенні економічних завдань часто доводиться аналізувати ситуації, в яких стикаються інтереси двох або більше конкуруючих сторін, які мають різні цілі. Такого роду ситуації називаються конфліктними. Математичною теорією конфліктних ситуацій є теорія ігор.

3. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

3.1. Загальна постановка задачі

Лінійне програмування – це наука про методи дослідження і знаходження екстремальних (найбільших і найменших) значень лінійної функції, на невідомі якої накладаються лінійні обмеження.

Така лінійна функція називається цільовою, а обмеження які математично записуються у вигляді рівнянь або нерівностей називаються системою обмежень.

Математичне вираження цільової функції та її обмежень називається математичною моделлю економічної задачі або економіко-математичною моделлю.

Нехай x_j - невідомі, a_{ij}, b_i, c_j - задані сталі величини.

У загальному вигляді математичну модель задачі лінійного програмування можна записати так:

$L(\overline{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + ... + c_j \cdot x_j + ... + c_n \cdot x_n \to \max(\min)$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1j} \cdot x_j + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2j} \cdot x_j + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{ij} \cdot x_j + \ldots + a_{in} \cdot x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mj} \cdot x_j + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m, \\ x_j \geq 0, \;\; i = \overline{1,m}, \;\; j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Математична модель у більш скороченому вигляді може бути записана так:

$L(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max(\min)$ з обмеженнями: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i$, $x_j \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Припустимим розв’язком (планом) задачі лінійного програмування називається вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, який задовольняє системі обмежень. Множина припустимих розв’язків утворює область припустимих розв’язків (ОПР).

Припустиме значення, при якому цільова функція досягає свого екстремального значення, називається оптимальним розв’язком задачі лінійного програмування і позначається $\overline{X_{опт}}$. Базисний припустимий розв’язок $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ є опорним розв’язком, де r - ранг системи обмежень.

3.2. Види математичних моделей

Математична модель задачі лінійного програмування може бути представлена в канонічній або стандартній формі. Якщо всі обмеження системи задано рівняннями і змінні x_j є невід'ємними, тоді таку форму моделі називають канонічною. Якщо хоча б одне обмеження є нерівністю, тоді форма моделі задачі лінійного програмування є стандартною.

Для переходу від стандартної до канонічної форми моделі необхідно у кожну нерівність ввести балансову змінну x_{n+1}. Якщо знак нерівності «$\leq$» , тоді балансова змінна вводиться із знаком «+», якщо знак нерівності «$\geq$» - із знаком «-». У цільову функцію балансові змінні не вводяться.

Отже, щоб скласти математичну модель задачі лінійного програмування необхідно: ввести позначення змінних; виходячи з мети економічних досліджень, скласти цільову функцію; враховуючи обмеження у використанні економічних показників задачі та їх кількісні закономірності, записати систему обмежень, з урахуванням сутності невідомих змінних записати умову невід'ємності.

Приклад. На випуск n видів продукції $P_1, P_2, \ldots, P_n$ витрачається m видів ресурсів $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Відомі витрати a_{ij} ресурсів i-го виду на одиницю продукції j-го виду, обсяг b_i ресурсів i-го виду і прибуток c_j від реалізації одиниці продукції j-го виду. Необхідно так організувати випуск продукції, виходячи із наявних ресурсів, щоб одержати найбільший прибуток. Скласти економіко-математичну модель задачі про використання ресурсів.

Представимо вихідні дані задачі у вигляді таблиці.

Таблиця

Вид ресурсу	Вид продукції						Запаси ресурсів, грн.
	P_1	P_2	...	P_j	...	P_n	
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i
...	...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
Прибуток від реалізації одиниці продукції	c_1	c_2	...	c_j	...	c_n	
Випуск продукції	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - кількість одиниць випущеної продукції певного виду $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Складемо цільову функцію економіко-математичної моделі. Прибуток від випуску всієї продукції становить $L(\overline{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_j \cdot x_j + \ldots + c_n \cdot x_n \to \max$. Невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ повинні задовольняти нерівності, які показують, що фактичні витрати відповідного виду ресурсів не повинні перевищувати його наявний обсяг

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1j} \cdot x_j + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \le b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2j} \cdot x_j + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{ij} \cdot x_j + \ldots + a_{in} \cdot x_n \le b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mj} \cdot x_j + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \le b_m. \end{cases}$$

Виходячи з економічного змісту задачі, невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можуть набувати тільки невід’ємних значень, тобто $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_j \ge 0, \ldots, x_n \ge 0.$

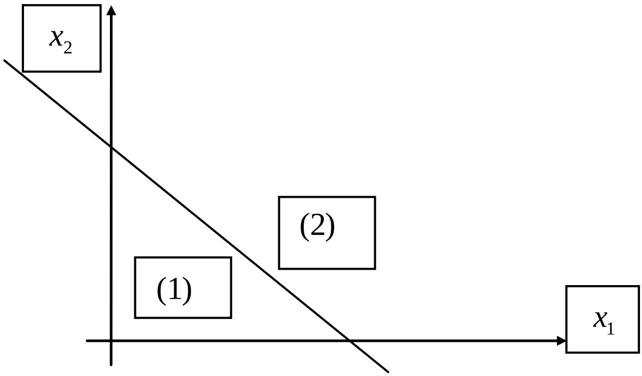
3.3. Графічний розв’язок систем *m* лінійних нерівностей з двома змінними

Дано систему *m* лінійних нерівностей з двома змінними

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + b_1 \le 0, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + b_2 \le 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + b_m \le 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Знак деяких або всіх нерівностей може бути і «$\ge$».

Розглянемо першу нерівність системи (*) у системі координат x_1Ox_2. Побудуємо пряму $a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + b_1 = 0$, яка є граничною прямою. Ця пряма ділить площину на дві півплощини (1) і (2). Напівплощина (1) містить початок координат.



Для визначення, з якого боку від граничної прямої розміщена задана напівплощина необхідно взяти довільну точку на площині (краще початок координат) і підставити координати цієї точки у нерівність. Якщо нерівність справедлива, то напівплощина звернена у бік цієї точки, якщо не справедлива – то у протилежний бік від точки. Напрямок напівплощини на малюнку позначається стрілкою.

Розв'язком кожної нерівності системи є напівплощина, яка містить граничну пряму і розміщена по одну сторону від неї.

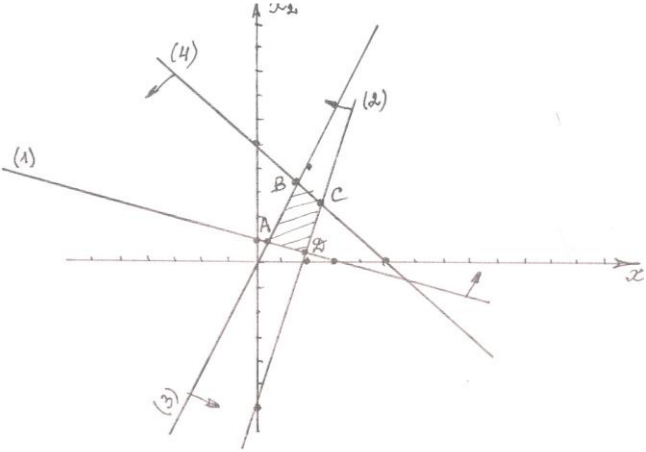
Перетин напівплощин, кожна з яких визначається відповідною нерівністю системи, називається областю розв'язків системи (ОР).

Область розв'язків системи, яка задовольняє умовам невід'ємності ($x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$), називається областю невід'ємних або припустимих розв'язків (ОПР).

Приклад. Знайти область розв'язків і область припустимих розв'язків системи нерівностей і визначити координати кутових точок ОПР.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3, & (1) \\ 3x_1 - x_2 \leq 6, & (2) \\ 2x_1 - x_2 \geq 0, & (3) \\ x_1 + x_2 \leq 5. & (4) \end{cases}$$

Знайдемо ОР системи. Для цього побудуємо граничну пряму $x_1 + 3x_2 = 3$ і підставимо координати точки $O(0;0)$ у нерівність (1): $0 + 3 \cdot 0 \geq 3; \quad 0 \geq 3.$ Таким чином, координати точки $O(0;0)$ не задовольняють нерівності (1), тому розв'язком цієї нерівності є напівплощина, що не вміщує точки $O(0;0)$.



(1) $x_1 + 3x_2 = 3;$ При $x_1 = 0,\ x_2 = 1.$ При $x_1 = 3,\ x_2 = 0.$

(2) $3x_1 - x_2 = 6;$ При $x_1 = 0,\ x_2 = -6.$ При $x_1 = 2,\ x_2 = 0.$

(3) $2x_1 - x_2 = 0;$ При $x_1 = 0,\ x_2 = 0.$ При $x_1 = 2,\ x_2 = 4.$

(4) $x_1 + x_2 = 5;$ При $x_1 = 0,\ x_2 = 5.$ При $x_1 = 5,\ x_2 = 0.$

Областю розв'язків і областю припустимих розв'язків є чотирикутник $ABCD$. Знайдемо кутові точки чотирикутника.

$$A: \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Bigg| -2 \Bigg| \begin{matrix} -2x_1 - 6x_2 = -6 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{matrix}$$

$$-7x_2 = -6; \quad x_2 = \frac{6}{7}; \quad x_1 = 3 - 3x_2 = 3 - \frac{18}{7} = \frac{3}{7}. \quad A\left(\frac{3}{7};\ \frac{6}{7}\right).$$

$$B: \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}; 3x_1 = 5; \ x_1 = \frac{5}{3}; \ x_2 = 2x_1 = \frac{10}{3}. \ B\left(\frac{5}{3};\ \frac{10}{3}\right).$$

$$C: \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} 4x_1 = 11; \quad x_1 = \frac{11}{4}; \quad x_2 = 5 - x_1 = 5 - \frac{11}{4} = \frac{9}{4}. \quad C\left(\frac{11}{4};\ \frac{9}{4}\right).$$

$$D: \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_2 = 6 \end{cases} \Bigg| -3 \Bigg| \begin{matrix} -3x_1 - 9x_2 = -9 \\ 3x_1 - x_2 = 6 \end{matrix}$$

$$-10x_2 = -3; \quad x_2 = \frac{3}{10}; \quad x_1 = 3 - 3x_2 = 3 - \frac{9}{10} = \frac{21}{10}. \quad A\left(\frac{21}{10};\ \frac{3}{10}\right).$$

3.4. Графічний метод розв’язання задач лінійного програмування

Найбільш простим і наочним методом розв’язання задач лінійного програмування є графічний метод. Він застосовується до розв’язання задач, систему обмежень в яких задано у неканонічній формі і з кількістю змінних не більше двох.

З геометричної точки зору у задачах лінійного програмування відшукується така кутова точка або набір точок із припустимої множини розв’язків, на якій досягається сама верхня (нижня) лінія рівня, розміщена далі (ближче) інших у напрямку найбільш швидкого зростання.

Для знаходження екстремального значення цільової функції при графічному розв’язанні задач лінійного програмування використовують вектор $\overline{grad}\ L(\overline{x})$ на площині x_1Ox_2.

З курсу вищої математики відомо, що для функції двох змінних $z = f(x; y)$, що є диференційованою у точці $M(x; y)$, градієнтом функції z називається вектор, координатами якого є значення частинних похідних у точці M: $\overline{grad}\ z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}\right)$

Градієнт функції характеризує напрямок і величину максимальної швидкості зростання цієї функції у точці.

Для визначення геометричного змісту градієнта функції введемо поняття поверхні рівня.

Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називається поверхня, на якій ця функція зберігає постійне значення: $u = f(x, y, z) = c = const.$

Градієнт функції у даній точці ортогональний до цієї поверхні.

У випадку функції двох змінних, замість поверхні рівня будуть фігурувати лінії рівня.

Надалі будемо позначати градієнт цільової функції $\overline{grad}L(\overline{x}) = \overline{c}$. Цей вектор показує напрямок найшвидшої зміни цільової функції: $\overline{grad}L(\overline{x}) = \overline{c} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \cdot \overline{e_1} + \frac{\partial L}{\partial x_2} \cdot \overline{e_2}$, де $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ - одиничні вектори за осями Ox_1 та Ox_2 відповідно. Таким чином, $\overline{c} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}; \frac{\partial L}{\partial x_2}\right)$.

Координатами вектора $\overline{c}$ є коефіцієнти цільової функції $L(\overline{x})$.

<u>Алгоритм розв’язання задачі</u>

1. Знаходимо ОПР системи обмежень задачі.
2. Будуємо вектор $\overline{grad}L(\overline{x}) = \overline{c}$.

3. Будуємо лінію рівня L_0, яка ортогональна до вектора $\bar{c}$.

4. Лінію рівня переміщуємо за напрямком вектора $\bar{c}$ для задач на максимум і в напрямку протилежному $\bar{c}$ - для задач на мінімум.

Переміщення лінії рівня здійснюється до тих пір, доки у неї не буде тільки однієї спільної точки з областю припустимих розв'язків. Ця точка визначає єдиний розв'язок задачі лінійного програмування і буде точкою екстремуму. Якщо ж лінія рівня буде паралельною одній з сторін області припустимих розв'язків, то у цьому випадку екстремум розглядається у всіх точках відповідної сторони, а задача лінійного програмування буде мати нескінчену множину рішень. У цьому випадку говорять, що така задача має альтернативний оптимум і її розв'язок знаходиться за формулою:

$\overline{X_{опт}} = (1-t)\cdot\overline{X_1} + t\cdot\overline{X_2}$, де $0 \le t \le 1$, а $\overline{X_1}$, $\overline{X_2}$ - оптимальні рішення у кутових точках ОПР.

Задача лінійного програмування може бути нерозв'язаною, коли обмеження, що її визначають, будуть суперечити один одному.

5. Знайдемо координати точки екстремуму і значення цільової функції в ній.

3.5. Симплексний метод розв'язання задач лінійного програмування

Симплексний метод є універсальним, оскільки дозволяє розв'язати практично будь-яку задачу лінійного програмування, яка записана у канонічній формі.

Ідея симплекс-методу або методу послідовного покращення плану полягає у тому, що починаючи з деякого початкового опорного рішення здійснюється послідовно спрямоване переміщення по опорним рішенням задачі до оптимального. Значення цільової функції при цьому переміщенні для задач на максимум не спадає. Оскільки число опорних рішень є скінченим, то через скінчене число кроків одержують оптимальний опорний розв'язок. Опорним розв'язком називають базисний невід'ємний розв'язок.

<u>Алгоритм симплексного методу</u>

1. Математична модель задачі повинна бути у канонічній формі.

2. Знаходимо вихідний опорний розв'язок і здійснюємо перевірку його на оптимальність. Для цього заповнюємо симплексну таблицю. Всі рядки таблиці першого кроку за виключенням рядка Δ_j (індексний рядок) заповнюються за даними системи обмежень та цільової функції. БЗ – базисна змінна. Індексний рядок для змінних визначається за формулою: $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot a_{ij} - c_j$, $\quad j = \overline{1,n}$,

для вільного члена за формулою: $\Delta_b = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot b_i$.

c_i	БЗ	c_1	c_2	...	c_n	b_i
		x_1	x_2	...	x_n	
c_1	x_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
c_2	x_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...	...
c_m	x_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{mn}	b_m
Δ_j		Δ_1	Δ_2	...	Δ_n	Δ_b

Можливі такі випадки при розв'язанні задачі на максимум:

- якщо всі оцінки $\Delta_j \geq 0$, то знайдений розв'язок є оптимальним;

- якщо хоча б одна оцінка $\Delta_j \leq 0$, але при відповідній змінній немає жодного додатного коефіцієнта, розв'язання задачі припиняється, тому що $L(\bar{x}) \to \infty$, тобто цільова функція є необмеженою у області припустимих розв'язків;

- якщо хоча б одна оцінка від'ємна, а при відповідній змінній є хоча б один додатній коефіцієнт, то необхідно переходити до другого опорного розв'язку;

- якщо від'ємних оцінок в індексному рядку декілька, то у стовпець базисної змінної (БЗ) вводять ту змінну, якій відповідає найбільша за абсолютною величиною (модулем) від'ємна оцінка.

Якщо хоча б одна оцінка $\Delta_k < 0$, то k-й стовпець приймається за ключовий. За ключовий рядок приймається такий, якому відповідає мінімальне відношення вільних членів b_i до додатних елементів k-го стовпця. Елемент, який знаходиться на перетині ключових рядка і стовпця називається ключовим елементом.

3. Заповнюється симплексна таблиця другого кроку:

- переписується ключовий рядок, з діленням кожного його елемента на ключовий елемент;

- заповнюється базисний стовпець, при цьому всі елементи окрім ключового дорівнюють нулю;

- решта коефіцієнтів таблиці знаходяться за правилом прямокутника.

Наприклад, якщо a_{21} є ключовим елементом, тоді у симплексній таблиці другого кроку

$$a_{12}' = \frac{a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22}}{a_{21}}.$$

Альтернативний оптимум

При розв'язанні задач лінійного програмування симплексним методом за критерій оптимальності приймають умову: оцінка вільних змінних $\Delta_j \geq 0$ для задач на максимум і умова $\Delta_j < 0$ для задач на мінімум.

Якщо на будь-якому кроці хоча б одна з оцінок вільної змінної $\Delta_j = 0$, а решта $\Delta_j \geq 0$ для задач на максимум ($\Delta_j < 0$ для задач на мінімум), то прийнявши за ключовий стовпець той стовпець, де $\Delta_j = 0$ та знайдемо новий оптимальний розв'язок, при якому значення цільової функції не змінюється. У цьому випадку задача має альтернативний оптимум.

Критерієм альтернативного оптимуму при розв'язанні задач симплексним методом є рівність нулю хоча б однієї оцінки вільної змінної $\Delta_j = 0$

Якщо тільки одна оцінка вільної змінної буде 0, тоді розв'язок задачі знаходиться за формулою: $\overline{X_{опт}} = t \cdot \overline{X_{опт1}} + (1-t) \cdot \overline{X_{опт2}}$, де $0 \leq t \leq 1$. Якщо дві оцінки і більше, наприклад s, вільних змінних будуть 0, тоді оптимальний розв'язок знаходиться за формулою: $\overline{X_{опт}} = \sum_{t=1}^{s} t_i \cdot \overline{X_{оптi}}$, де

$$\sum_{t=1}^{s} t_i = 1, \quad t_i \geq 0.$$

3.6. Двоїстість у задачах лінійного програмування

Кожній задачі лінійного програмування відповідає двоїста, яка формується за допомогою певних правил безпосередньо з умов прямої задачі. Нехай задача лінійного програмування має вигляд:

$$L(\overline{x}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_j \cdot x_j + \ldots + c_n \cdot x_n \to \max.$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1j} \cdot x_j + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2j} \cdot x_j + \ldots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{ij} \cdot x_j + \ldots + a_{in} \cdot x_n \leq b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mj} \cdot x_j + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_j \geq 0, \ldots, x_n \geq 0.$$

Побудова двоїстої задачі лінійного програмування здійснюється за такими правилами:

1. Кожному основному обмеженню початкової задачі ставимо у відповідність двоїсту змінну: першому обмеженню – y_1, другому – y_2, ..., m-му – y_m.

Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості основних обмежень прямої задачі лінійного програмування/

2. Якщо цільова функція початкової задачі досліджується на максимум, то двоїстої – на мінімум, і навпаки.

3. Щоб записати цільову функцію двоїстої задачі, потрібно праві частини основнихобмежень початкової задачі почлено перемножити на двоїсті змінні, що відповідають кожному з цих обмежень і додати. Отже, коефіцієнтами при невідомихв цільовій функції двоїстої задачі є праві частини основних обмежень прямої задачі. Вільний член цільової функції прямої задачі переноситься без змін в цільову функцію двоїстої.

4. Обмеження двоїстої задачі формуємо таким чином: коефіцієнти при невідомій кожного основного обмеження системи почлено множимо на відповідні двоїсті змінні і додаємо. В результаті отримуємо ліві частини обмежень двоїстої задачі. Правими частинами обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при невідомихв цільовій функції початкової задачі. Отже, кількість змінних прямої задачі дорівнює кількості основних обмежень двоїстої.

5. Враховуючи, що в основнихобмеженнях початкової задачі знак нерівності «≤ », то в обмеженнях двоїстої задачі знак нерівності

буде «≥ ».

6. Матриця А, що складається із коефіцієнтів при невідомих в системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів при невідомихсистеми обмежень двоїстої задачі лінійного програмування є транспонованими одна до одної.

7. Отримана двоїста задача має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n, \\ y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}. \end{cases} \qquad z^* = c_0 + b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \quad (\min),$$

Приклад: побудувати двоїсту задачу, якщо пряма має вигляд:

$$\begin{cases} x_1+4x_2\ge 4 \\ x_1+x_2\le 6 \end{cases}$$

$x_2\le 2$ $x_i\ge 0$ $F=x_1+3x_2\to\max$

1. Для побудови двоїстої задачі пряму зводимо до стандартного вигляду задачі оптимізації, а саме:

$$\begin{cases} -x_1-4x_2\le -4 \\ x_1+x_2\le 6 \\ x_2\le 2 \end{cases}$$

2. Будуємо матрицю коефіцієнтів:

$$A = \left|\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & F \end{array}\right|$$

3. Транспонуємо отриману матрицю:

$$A^T = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 3 \\ -4 & 6 & 2 & L \end{vmatrix}$$

4. Складаємо двоїсту задачу:

Елементи отриманої матриці використовуємо як коефіцієнти при змінних в двоїстій задачі. Коефіцієнти при змінних цільової функції прямої задачі прирівнюємо до вільних коефіцієнтів у рівняннях-обмеженнях системи двоїстої задачі. Вільні коефіцієнти в рівняннях-обмеженнях системи прямої задачі прирівнюємо до змінних в цільовій функції двоїстої задачі. Знаки нерівностей в двоїстій задачі є протилежними до відповідних знаків прямої задачі. Напрям цільової функції двоїстої задачі протилежний напряму цільової функції прямої задачі. Таким чином, отримаємо наступну двоїсту задачу:

$$\begin{cases} -y_1+y_2\geq 1 \\ -4y_1+y_2+y_3\geq 3 \end{cases}$$

$y_i\geq 0$

$Z=-4y_1+6y_2+2y_3\rightarrow \min$

3.7. Транспортна задача

Транспортна задача (ТЗ) – одна із розповсюджених задач лінійного програмування. Її мета – розробка найбільш раціональних шляхів і способів транспортування товарів, усунення найбільш віддалених, зустрічних, повторних перевезень. Все це скорочує час просування товарів, зменшує витрати підприємства, пов’язані із здійсненням процесів забезпечення сировиною, матеріалами, паливом, обладнанням тощо.

У загальному вигляді задачу можна представити наступним чином: у m пунктах виробництва $A_1, A_2, \ldots, A_m$ маємо однорідний вантаж відповідно у кількості $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Цей вантаж необхідно доставити у n пунктів призначення $B_1, B_2, \ldots, B_n$ відповідно у кількості $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Вартість перевезення одиниці вантажу (тариф) із пункту A_i до пункту B_j дорівнює c_{ij}.

Необхідно скласти такий план перевезень вантажу, при якому транспортні витрати будуть мінімальними.

У залежності від співвідношення між сумарними запасами вантажу і сумарними потребами у них, транспортні задачі можуть бути закритими і відкритими.

Якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то ТЗ називається закритою.

Якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$, то ТЗ називається відкритою.

Відкрита транспортна задача

Умову даної задачі оформимо у вигляді розподільчої таблиці.

B_j / A_i		B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
		b_1	b_2	…	b_j	…	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_1	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Математична модель закритої транспортної задачі має наступний вид:

$L(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$, при обмеженнях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \end{cases} \qquad x_{ij} \ge 0, \;\; i = \overline{1,m}, \;\; j = \overline{1,n}.$$

Оптимальним розв’язком задачі є матриця $X_{опт} = \left(x_{ij}\right)_{m \times n}$, яка задовольняє системі обмежень і дозволяє мінімізувати цільову функцію.

Транспортна задача, яка є задачею лінійного програмування, може бути розв’язана симплексним методом, але наявність великої кількості змінних і обмежень робить обчислення громіздкими. Тому для розв’язання транспортних задач розроблено спеціальний метод, який має ті ж самі етапи, що і симплексний метод, а саме:

- знаходження вихідного опорного розв’язку;
- перевірка розв’язку на оптимальність;
- перехід від одного опорного розв’язку до іншого.

Знаходження вихідного опорного розв’язку

У розподільчій таблиці клітини, у яких помістимо вантажі, називаються зайнятими і їм відповідають базисні змінні опорного розв’язку. Інші клітини називаються незайнятими або пустими і їм відповідають вільні клітини. У верхньому правому куті кожної клітини будемо записувати тарифи. Існують декілька способів знаходження вихідного опорного розв’язку.

Розглянемо метод мінімального тарифу. Згідно з цим методом, вантажі розподіляються у першу чергу в ті клітини, в яких знаходиться мінімальний тариф перевезень c_{ij}. У подальшому поставки розподіляються у незайнятих клітинах з найменшими тарифами з урахуванням запасів, що залишилися у постачальників, і задоволення попиту споживачів. Процес розподілу продовжують до тих пір, доки всі вантажі від постачальників не будуть вивезеними, а споживачі не будуть задоволеними. При розподілі вантажів може бути, що кількість зайнятих клітин менше, ніж $m+n-1$. У цьому випадку недостатня їх кількість заповнюється клітинами з нульовими поставками, такі клітини називаються умовно зайнятими.

Нульові поставки розміщують у незайняті клітини з урахуванням найменшого тарифу таким чином, щоб у кожному рядку і стовпці було не менше, ніж по одній зайнятій клітині.

Покращення опорного плану методом потенціалів

Після завершення першого етапу розв’язку задачі знайдені невідомі можна розбити на дві групи – базисні (зайняті) і вільні.

Представимо цільову функцію наступним чином $F=\sum S_{pq}\cdot x_{pq}+F_0$, де x_{pq} - вільні змінні; F_0 - знайдений опорний план, а значення S_{pq} отримаємо за допомогою методів потенціалів.

Поставимо у відповідність кожному з пунктів відправлення вантажів A_i деяку величину α_i - «потенціал» пункту A_i. Аналогічно кожному пункту призначення B_j величину β_j - «потенціал» пункту B_j.

Для кожного базисного невідомого x_{kl} складаємо рівняння $\alpha_k+\beta_l=c_{kl}$, де c_{kl} - вартість перевезення з пункту A_k до пункту B_l. Розв’язуємо систему рівнянь і знаходимо всі потенціали α_i та β_j.

Тепер для кожної вільної змінної x_{pq} обчислюємо суму $\alpha_p+\beta_q=c_{pq}'$ - посередні вартості та заносимо до таблиці.

Наступним кроком є визначення різниць $S_{pq}=c_{pq}-c_{pq}'$ між справжніми вартостями перевезень та посередніми вартостями, які відповідають вільним клітинам.

Якщо всі величини S_{pq} невід'ємні, то початковий знайдений розв'язок є оптимальним. Якщо $S_{pq} < 0$, тоді необхідно перейти до іншого базису.

Альтернативний оптимум у транспортних задачах

Ознакою наявності альтернативного оптимуму у транспортних задачах є рівність нулю хоча б однієї з оцінок вільних змінних у оптимальному розв'язку $\overline{X_{опт1}}$. Зробивши перерозподіл вантажів відносно клітини, що має $S_{pq} = 0$, одержимо новий оптимальний розв'язок $\overline{X_{опт2}}$, при цьому значення цільової функції (транспортних витрат) не зміниться.

Якщо одна різниця дорівнює нулю, тоді оптимальний розв'язок знаходиться за формулою: $\overline{X_{опт}} = t \cdot \overline{X_{опт1}} + (1-t) \cdot \overline{X_{опт2}}$, де $0 \le t \le 1$.

Виродженість у транспортних задачах

При розв'язанні транспортної задачі може бути, що кількість зайнятих клітин менша за $m+n-1$. У цьому випадку транспортна задача може мати вироджений розв'язок. Для можливого його виключення, доцільно поміняти місцями постачальників і споживачів або ввести у вільну клітину з найменшим тарифом нульову поставку. Нуль вміщують у таку клітину, щоб у кожному рядку і кожному стовпці було не менше однієї зайнятої клітини.

Відкрита транспортна задача

При відкритій транспортній задачі сума запасів не співпадає з сумою потреб, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i \ne \sum_{j=1}^{n} b_j$.

При цьому:

а). Якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, тоді обсяг запасів перевищує обсяг споживання, всі споживачі будуть задоволені повністю і частина запасів залишається не вивезеною. Для розв'язання такої задачі вводять фіктивного ($n+1$-го) споживача, потреби якого $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Модель такої задачі набуває вигляду: $L(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \end{cases} \qquad x_{ij} \ge 0,\ \ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n+1}.$$

б). Якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, тоді обсяги споживання перевищують обсяги запасів і частина споживачів залишається не-задоволеною. Для розв'язання такої задачі вводять фіктивного ($m+1$-го) постачальника, обсяги поставок якого $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Модель такої задачі набуває вигляду: $L(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \rightarrow \min$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \\ \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \end{cases} \qquad x_{ij} \geq 0, \;\; i = \overline{1, m}, \;\; j = \overline{1, n+1}.$$

При введенні фіктивного постачальника або споживача, задача стає закритою і розв'язується за раніше розглянутим алгоритмом, причому тарифи, що відповідають фіктивному постачальнику або споживачу більше або дорівнюють найбільшому з усіх тарифів. У цільовій функції фіктивний постачальник або споживач не враховується.

4. ЦІЛОЧИСЛОВЕ ПРОГРАМУВАННЯ

4.1. Загальна постановка задачі

Деякі задачі лінійного програмування вимагають цілочислового розв'язку. До них відносяться задачі з виробництва і розподілу не діленої продукції (випуск верстатів, телевізорів, автомобілів тощо). У загальному вигляді математична модель задачі цілочислового програмування має вигляд:

$$L(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \rightarrow \max\,(\min)$$

з обмеженнями:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \; x_j \geq 0 - \textit{цілі числа}, \; i = \overline{1, m}, \; j = \overline{1, n}.$$

Оптимальний розв'язок задачі, який знайдений симплексним методом, часто не є цілочисловим. Його можна округлити до найближчого цілого числа. Але таке округлення може дати розв'язок, який не є найкращим серед цілочислових розв'язків або привести до розв'язку, що не задовольняє системі обмежень. Тому для знаходження цілочислових розв'язків застосовують алгоритм Гоморі.

4.2. Метод Гоморі

Симплексним методом знаходять оптимальний розв'язок задачі. Якщо розв'язок цілочисловий, тоді задача розв'язана. Якщо він вміщує хоча б одну дробову координату, тоді закладають додаткове обмеження за цілочисельністю і обчислення продовжують до одержання нового рішення. Якщо ж і воно є не цілочисловим, тоді знову накладають нове обмеження за цілочисельністю. Обчислення продовжують до тих пір, доки не буде одержаний цілочисловий розв'язок або показано, що задача не має цілочислового розв'язку.

Нехай одержано оптимальний розв'язок, який не є цілочисловим $\overline{X}_{опт} = f(f_1, f_2, ..., f_r, 0, ..., 0)$, тоді останній крок можна представити у вигляді симплексної таблиці, де r - ранг системи обмежень; $f_{i\,r+1}$ -коефіцієнт симплексної таблиці i -го рядка $(r+1)$ -го стовпця; f_i - вільний член i -го рядка.

x_1	1	0	...	0	...	0	h_{1r+1}	...	h_{1n}	f_1
x_2	0	1	...	0	...	0	h_{2r+1}	...	h_{2n}	f_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	0	0	...	1	...	0	$h_{i\,r+1}$	...	h_{in}	f_i
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_r	0	0	...	0	...	1	$h_{r\,r+1}$	...	$h_{r\,n}$	f_r

Нехай f_i і хоча б одне з h_{ij} ($j = \overline{r+1, n}$, $i = \overline{1, r}$) – дробові числа.

Позначимо через $[f_i]$ і $\lfloor h_{ij} \rfloor$ цілі частини чисел f_i і h_{ij} .

Цілою частиною числа f_i *називається найбільше ціле число, яке не перевищує* f_i.

Позначимо через $\{f_i\}$ і $\{h_{ij}\}$ цілі частини чисел f_i і h_{ij} .

Дробовою частиною чисел f_i *і* h_{ij} *називається різниця* $\{f_i\} = f_i - [f_i]$ *та* $\{h_{ij}\} = h_{ij} - \lfloor h_{ij} \rfloor$.

Приклад:

$\left[\frac{4}{5}\right] = 0;$ $\left[\frac{8}{3}\right] = 2;$ $\left[-\frac{4}{5}\right] = -1;$ $\left[-\frac{8}{3}\right] = -3;$ $\left\{\frac{4}{5}\right\} = \frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5};$

$\left\{\frac{8}{3}\right\} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3};$ $\left\{-\frac{4}{5}\right\} = -\frac{4}{5} - (-1) = \frac{1}{5};$ $\left\{-\frac{8}{3}\right\} = -\frac{8}{3} - (-3) = \frac{1}{3}.$ Якщо всі і хоча б одне значення h_{ij} дробові, то з урахуванням введених позначень цілих і дробових чисел, додаткове обмеження за цілочисельністю прийме вигляд:

$$\{h_{i\,r+1}\} \cdot x_{r+1} + \{h_{i\,r+2}\} \cdot x_{r+2} + \ldots + \{h_{i\,n}\} \cdot x_n \geq \{f_i\}$$

Зауваження:

1. Якщо f_i (вільний член) – дробове число, а всі коефіцієнти h_{ij} - цілі числа, тоді задача лінійного програмування не має цілочислового розв'язку.

2. Обмеження цілочисельності може бути накладене не на всі змінні, а лише на їх частину. У цьому випадку задача є частково цілочисловою.

4.3. Графічний метод

При наявності у задачі лінійного програмування двох змінних, а в системі обмежень – нерівностей, вона може бути розв'язана графічним методом.

У системі координат знаходять область припустимих розв'язків (ОПР), будують вектор $\bar{c}$ і лінію рівня, яка є перпендикулярною до вектора $\bar{c}$. Переміщуючи лінію рівня за напрямком вектора $\bar{c}$ для задач на максимум, знаходять найбільш віддалену від початку координат точку і її координати.

У випадку, коли координати цієї точки не є цілочисловими, у ОПР будують цілочислову сітку і знаходять в ній такі цілі числа, які задовольняють системі обмежень і при яких значення цільової функції є найбільш близьким до екстремального не цілочислового розв'язку. Координати такої вершини і є цілочисловим розв'язком.

5. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

5.1. Загальна постановка задачі

Математична модель задачі нелінійного програмування у загальному вигляді формулюється наступним чином: знайти вектор $\bar{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняє системі обмежень

$$\begin{cases} g_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i, & i = \overline{1, m_1} \\ g_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b_i, & i = \overline{m_1 + 1, m_2} \\ g_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i, & i = \overline{m_2 + 1, m} \end{cases}$$

і має екстремум цільової функції $L = f(x_1, x_2, ..., x_n)$,

де x_i - змінні, $j = \overline{1, n}$; L, f, g_i - задані функції від n змінних, b_i - фіксовані значення (вільні члени).

Нелінійне програмування використовується при прогнозуванні промислового виробництва, управлінні товарними ресурсами, плануванні обслуговування і ремонту обладнання тощо.

5.2. Дробово-лінійне програмування

Дробово-лінійне програмування відноситься до методів лінійного програмування, тому що має цільову функцію, записану у нелінійному вигляді.

Задача дробово-лінійного програмування у загальному вигляді записується наступним чином:

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j \cdot x_j} \to \max\ (\min)$$

при обмеженнях: $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \\ x_j \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \end{cases}$,

де c_j, d_j, b_i, a_{ij} постійні коефіцієнти і $\sum_{j=1}^{n} d_j \cdot x_j \neq 0$.

Графічний метод

Розглянемо задачу дробово-лінійного програмування у вигляді

$$F = \frac{c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2}{d_1 \cdot x_1 + d_2 \cdot x_2} \to \max (\min) \quad (5.1)$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \\ x_1,\ x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Будемо вважати, що $d_1 \cdot x_q + d_2 \cdot x_2 \neq 0.$

Для розв’язання цієї задачі знайдемо область припустимих розв’язків, яка визначається обмеженнями (5.2). Нехай ця область не є пустою множиною.

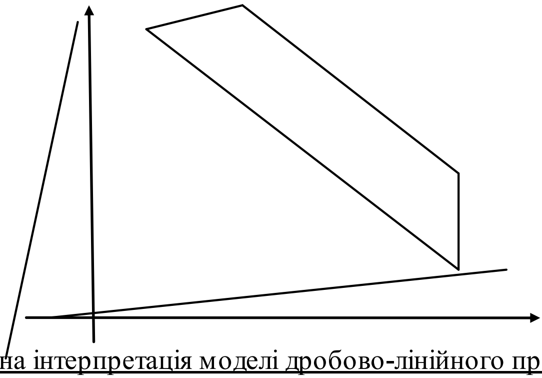
Із виразу (5.1) знайдемо x_2 :

$$F \cdot d_1 \cdot x_1 + F \cdot d_2 \cdot x_2 = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2,$$

$$x_2 (F \cdot d_2 - c_2) = x_1 (c_1 - L \cdot d_1),$$

$$x_2 = \frac{x_1 (c_1 - L \cdot d_1)}{L \cdot d_2 - c_2}, \quad x_2 = k \cdot x_1, \text{ де } \quad k = \frac{c_1 - L \cdot d_1}{L \cdot d_2 - c_2}.$$

Пряма $x_2 = k \cdot x_1$ проходить через точку O(0;0). При деякому фіксованому значенні F кутовий коефіцієнт k прямої також фіксований і пряма займе певне положення. При зміні значень F пряма $x_2 = k \cdot x_1$ буде повертатися навколо початку координат.



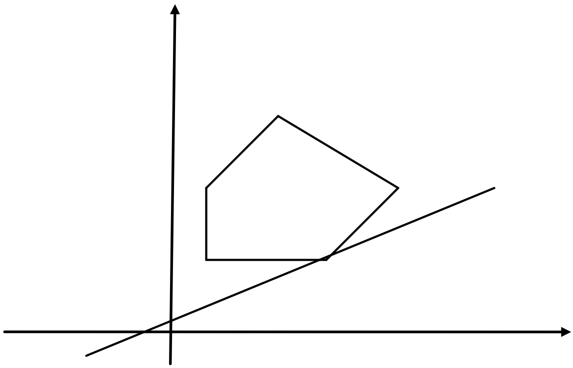
Графічна інтерпретація моделі дробово-лінійного програмування

Встановимо, як буде себе вести кутовий коефіцієнт k при монотонному зростанні F. Знайдемо похідну від k по F.

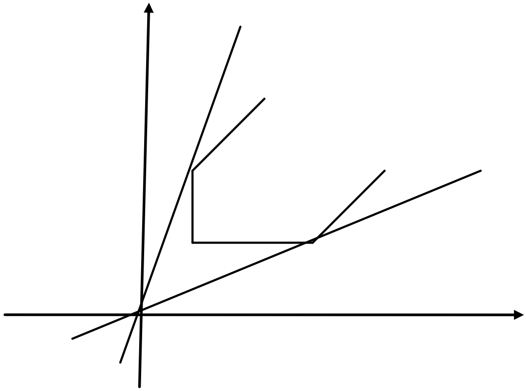
$$\frac{\partial k}{\partial F} = k' = \frac{-d_1 \cdot (F \cdot d_2 - c_2) - d_2 \cdot (c_1 - F \cdot d_1)}{(F \cdot d_2 - c_2)^2} = \frac{d_1 \cdot c_2 - d_2 \cdot c_1}{(F \cdot d_2 - c_2)^2}$$

Знаменник похідної завжди додатній, а чисельник від F не залежить. Значить, похідна має постійний знак і при збільшенні F кутовий коефіцієнт буде тільки зростати або тільки спадати, а пряма буде повертатися тільки в одну сторону. Якщо $k>0$, тоді пряма повертається проти годинникової стрілки, при $k<0$–за годинниковою стрілкою. Після встановлення напрямку обертання, знаходимо вершину або вершини багатокутника, у яких функція приймає $\max$ $(\min)$ значення, або встановлюємо необмеженість задачі. При цьому можливі наступні випадки.

1. ОПР обмежена, $\max$ $(\min)$ досягаються у її кутових точках.

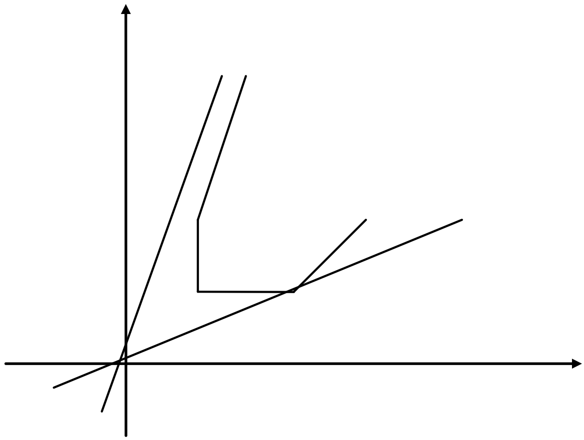


2. ОПР необмежена, але існують кутові точки, у яких цільова функція приймає максимальне і мінімальне значення.



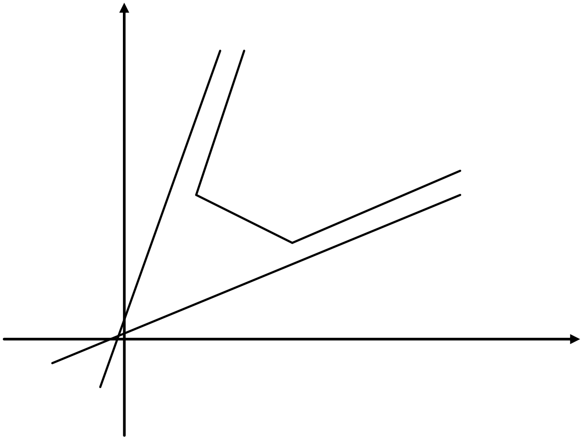
3. ОПР необмежена і має місце один із екстремумів.

Наприклад, мінімум досягається у одній із вершин області і має місце так званий асимптотичний максимум



4. ОПР необмежена.

$\max$ $(\min)$ є асимптотичними.



<u>Зведення задачі до симплексного методу</u>

Задачу дробово-лінійного програмування можна звести до задачі лінійного програмування і розв’язати симплексним методом. Для цього позначимо

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j \cdot x_j},$$

при умові: $\sum_{j=1}^{n} d_j \cdot x_j \neq 0$ і введемо нові змінні $y_j = y_0 \cdot x_j$.

Тоді задача набуде вигляду

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot y_j \to \max\ (\min)$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - b_i \cdot y_0 = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} d_j \cdot y_0 = 1, \\ y_j \geq 0,\ y_0 > 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Після знаходження оптимального розв’язку одержаної задачі, і використовуючи вище-викладені співвідношення, знайдемо оптимальний розв’язок вихідної задачі дробово-лінійного програмування.

5.3. Метод множників Лагранжа

Нехай задано задачу нелінійного програмування:

$L(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max\,(\min)$

при обмеженнях: $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad i = \overline{1, m}$.

Припустимо, що функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є неперервними разом із своїми частинними похідними.

Обмеження задано у вигляді рівностей, тому для розв'язку задачі використаємо метод відшукування умовного екстремуму функції багатьох змінних.

Для розв'язування задачі складається функція Лагранжа

$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ де λ_i - множники Лагранжа.

За необхідною умовою існування екстремуму функції, знайдемо частинні похідні: $\frac{\partial F}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1., m}, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \quad i = \overline{1, n},$

прирівняємо частинні похідні до нуля і одержимо систему

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Розв'язком системи є множина точок, у яких цільова функція L може мати екстремальне значення. Необхідно відмітити, що умови розглянутої системи є необхідними, але не недостатніми. Тому не кожний одержаний розв'язок визначає точку екстремуму цільової функції. Застосування методу буває виправданим, коли заздалегідь припускається існування глобального екстремуму, який співпадає з єдиним локальним максимумом або мінімумом цільової функції.

5.4. Дослідження функції на екстремум

Найбільше та найменше значення функції знаходиться:

- у критичних точках ОПР;
- у критичних точках на границях ОПР;
- у вершинах ОПР

Критичні точки за необхідною умовою існування екстремуму функції – це точки, в яких частинні похідні функції дорівнюють нулю.

Приклад: знайти екстремум функції $U=X^3+XY+Y^2+2Z^2+3Y+2$

1. Знаходимо частинні похідні U за змінними X,Y, Z.

$$\frac{\partial U}{\partial X} = (X^3 + XY + Y^2 + 2Z^2 + 3Y + 2)' = 3X^2 + Y$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = (X^3 + XY + Y^2 + 2Z^2 + 3Y + 2)' = X + 2Y + 3$$

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = (X^3 + XY + Y^2 + 2Z^2 + 3Y + 2)' = 4Z$$

2. Знаходимо критичні точки. Прирівнюємо частинні похідні до нуля.

$3X^2 + Y = 0$
$X + 2Y + 3 = 0$
$4Z = 0$
Розв'язуємо отриману систему:
Z=0
X= -2Y-3
$3(-2Y-3)^2+Y=0$
Розв'язуємо останнє рівняння відносно Y:
$3(2Y+3)^2+Y=0$
$12Y^2+37Y+27=0$
D=73
$Y_1 \approx -1.9$; $Y_2 \approx -1,2$.
$X_1=-2*(-1,9)-3=0,8$; $X_2=-2*(-1,2)-3=-0,6$
Отже, отримаємо критичні точки $M_1(-0,6;-1,2;0)$ та $M_2(0,8;-1,9;0)$.
3. Складаємо матрицю Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial X} & \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial Y \partial X} & \frac{\partial^2 U}{\partial Y \partial Y} & \frac{\partial^2 U}{\partial Y \partial Z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial Z \partial X} & \frac{\partial^2 U}{\partial Z \partial Y} & \frac{\partial^2 U}{\partial Z \partial Z} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 6X & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Матрица Гессе для першої критичної точки буде мати вигляд:

$$H = \begin{pmatrix} -3.6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Знаходимо визначник матриці. Визначник I порядку Δ1=-3,6. Визначник II порядку Δ2=-3,6*2-1*1=-8,2. Визначник III порядку Δ3=-3,6*2*4+1*0*0+0*1*0-0*2*0-0*0*(-3,6)-4*1*1=-32,8.

Форма вважається додатньо визначеною, якщо всі її визначники додатні. Якщо форма додатньо визначена, то в даній точці маємо мінімум.

Форма вважається від'ємно визначеною, якщо знак визначника визначається за формулою $(-1)^k$, де k-порядок визначника. Якщо форма від'ємно визначена, то в даній точці маємо максимум. Отримана нами форма не є ні додатньо визначеною, ні від'ємно визначеною, то функція даній точці екстремуму не має.

5. Матрица Гессе для другої критичної точки буде мати вигляд:

$$H = \begin{pmatrix} 4,8 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Знаходимо визначники матриці: Δ_1=4,8.

Δ_2=4,8*2-1*1=8,6.

Δ_3=4,8*2*4+1*0*0+0*1*0-0*2*0-0*0*4,8-4*1*1=38,4.

Отримана нами форма є додатньо визначеною, оскільки всі визначники додатні. Отже, в даній точці існує мінімум.

6. МОДЕЛЬ ЛЄОНТЬЄВА БАГАТОГАЛУЗЕВОЇ ЕКОНОМІКИ (БАЛАНСОВИЙ АНАЛІЗ)

Мета балансового аналізу – відповісти на питання: яким повинен бути обсяг виробництва кожної з *n* галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі? При цьому кожна галузь виступає, з однієї сторони, як виробник деякої продукції, а з другої – як споживач продукції і своєї, і виробленої іншими галузями.

Зв'язок між галузями, як правило, відображається у таблицях міжгалузевого балансу, а математична модель, яка їх аналізує, розроблена у 1936 році американським економістом В. Леонтьєвим.

Розглянемо процес виробництва за деякий період часу (наприклад, рік).

Введемо наступні позначення: x_i - загальний (валовий) обсяг продукції i-ї галузі ($i=\overline{1,n}$); x_{ij} - обсяг продукції i-ї галузі, який споживає j-та галузь у процесі виробництва ($j=\overline{1,n}$); y_i - обсяг кінцевого продукту i-ї галузі для невиробничого споживання.

Тоді $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$, $i=\overline{1,n}$. Система рівнянь називається співвідношеннями балансу. Будемо розглядати вартісний міжгалузевий баланс, коли всі величини, які входять до системи рівнянь мають вартісний вираз. Введемо коефіцієнти прямих витрат $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$, які показують витрати продукції i-ї галузі на виробництво одиниці продукції j-ї галузі.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j .$$

Тоді співвідношення балансу буде мати вигляд $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + y_i, \quad i=\overline{1,n}$.

Позначимо $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$,

де X - матриця валового випуску; A - матриця прямих витрат (технологічна або структурна матриця); Y - матриця кінцевого продукту.

Тоді співвідношення балансу набуде вигляду:

$X = A \cdot X + Y,$ або $X - A \cdot X = Y,$ або $X(1 - A) = Y,$ або $X(E - A) = Y,$ або $X = (E - A)^{-1} \cdot Y$.

Матриця $(E - A)^{-1}$ називається матрицею повних витрат.

7. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

7.1. Загальна постановка задачі

Динамічне програмування – один із розділів оптимального програмування, у якому процес прийняття рішення і управління може бути розбитий на окремі етапи (кроки).

Економічний процес є керованим, якщо можна впливати на хід його розвитку. Під управлінням розуміють сукупність рішень, які приймаються на кожному етапі для впливу на розвиток процесу.

Наприклад: випуск продукції є керованим процесом, тому що за управління можна прийняти сукупність рішень (початок року, кварталу, місяця) з забезпечення підприємства сировиною, заміні обладнання, фінансуванню тощо. Необхідно організувати випуск продукції таким чином, щоб прийняті рішення на окремих етапах сприяли одержанню максимально можливого обсягу продукції або прибутку.

Динамічне програмування дозволяє звести одну складну задачу із багатьма змінними до багатьох задач з малою кількістю змінних. Це значно скорочує обсяг обчислень і прискорює процес прийняття управлінського рішення.

На відміну від лінійного програмування, у якому симплексний метод є універсальним методом розв'язку, у динамічному програмуванні такого універсального методу не існує.

Одним із основних методів динамічного програмування є метод рекурентних співвідношень, який ґрунтується на основі принципу оптимальності, який розроблений американським вченим Р. Беллманом. Принцип полягає у тому, що яким би не були початковий стан на будь-якому етапі і управління, яке обрано на цьому етапі, наступні управління повинні обиратися оптимальними відносно стану, до якого прийде система у кінці даного етапу. Використання даного принципу гарантує, що управління, обране на будь-якому етапі, не локально краще, а краще з точки зору процесу в цілому.

У деяких задачах динамічного програмування процес управління розбивається на кроки. При розбитті на декілька кроків ресурсів діяльності підприємства, кроком доцільно вважати часовий проміжок, а при розподілі коштів між підприємствами – номер наступного підприємства. У інших задачах розбиття на кроки вводиться штучно. Наприклад, неперервний керований процес можна розглядати як дискретний, штучно розбивши його на часові відрізки (етапи). Виходячи з умови задачі, у кожному конкретному випадку довжину кроку обирають таким чином, щоб на кожному етапі одержати просту задачу оптимізації і забезпечити необхідну точність обчислень.

7.2. Оптимальна стратегія заміни обладнання

Проблема своєчасної заміни застарілого обладнання новим – одна із нагальних проблем будь якої сфери виробничої діяльності. З часом обладнання зношується і фізично і морально, тому на кожному етапі його експлуатація стає менш вигідною у порівнянні з придбанням і використанням нового обладнання. У зв'язку з цим і виникає задача визначення найбільш доцільного моменту заміни. За критерій оптимальності при заміні обладнання у промисловості звичайно приймають мінімум очікуваних витрат або максимум очікуваного прибутку за деякий період часу.

Розглянемо задачу оптимальної політики ремонту і заміни обладнання у спрощеному вигляді. Нехай на початку планового періоду із N років маємо деяке обладнання віком t. Кожний рік виробляється продукція, витрати на виробництво якої складають $r(t)$. При цьому обладнання вимагає експлуатаційних (поточних) витрат $u(t)$ і має залишкову вартість $s(t)$. Всі перелічені характеристики залежать від віку t обладнання. У будь який рік обладнання можна зберігати або продати за залишковою вартістю і купити нове за ціною p. Сюди входять витрати на установку і запуск в експлуатацію.

Цех по поточним і капітальним ремонтам не виробляє товарної продукції, тобто оцінити ефективність його діяльності неможливо за одержаним прибутком. Тому необхідно розробити оптимальну політику заміни обладнання виходячи з умов мінімізації очікуваних витрат за період часу довжиною N років.

У відповідності з загальною концепцією динамічного програмування почнемо процес оптимізації від кінця планового періоду. При цьому роки будуть нумеруватися від кінця періоду до його початку: $n = 1, 2, 3, ..., N$.

Нехай $n = 1$. Будемо вважати, що до початку останнього року у нас є в наявності обладнання віком t років. За нашим вибором буде прийняте одне з наступних рішень: зберігати обладнання або продати його і придбати взамін нове.

Якщо ми приймаємо рішення зберігати обладнання, тоді за останній рік витрати складуть: $r(t) + u(t)$

Якщо ж обладнання продати по залишковій вартості і купити нове, тоді витрати до кінця останнього року складуть

$$r(0) + u(0) - s(t) + p,$$

де $r(0)$ - витрати на виробництво продукції на новому обладнанні, тобто нульового віку за рік; $u(0)$ - витрати, що пов'язані з експлуатацією нового обладнання протягом року.

Оскільки планується діяльність за останній рік планового періоду, то у відповідності з концепцією динамічного програмування ми повинні діяти так, щоб останній рік сам по собі приніс мінімум витрат. Але результати діяльності у даному випадку характеризуються виразами $r(t)+u(t)$ і $r(0)+u(0)-s(t)+p$.

Замінити обладнання буде вигідно, якщо $r(0)+u(0)-s(t)+p<r(t)+u(t)$, тобто коли сумарні витрати при роботі на новому обладнанні будуть менше, ніж при роботі на старому.

Позначимо через $f_n(t)$ мінімально можливі сумарні витрати за останні n років планового періоду при умові, що на початку періоду маємо обладнання віком t і ми дотримуємся оптимальної політики. У відповідності з цим мінімальні витрати за останній рік позначимо через $f_1(t)$. Зрозуміло, що $f_1(t)$ дорівнює найменшому з виразів $r(t)+u(t)$ і $r(0)+u(0)-s(t)+p$, що символічно можна записати у вигляді

$$f_1(t)=\min_t \begin{cases} r(t)+u(t) & - \textit{ збереження,} \\ \\ r(0)+u(0)-s(t)+p & - \textit{ заміна.} \end{cases}$$

Нехай $n=2$, тобто розглянемо період, який складається з двох останніх років.

Якщо до початку цього періоду у наявності є обладнання віком t і прийнято рішення його зберігати, тоді в кінці першого року величина сумарних витрат дорівнює $r(t)+u(t)$. За рік обладнання стане старшим на рік і до кінця першого року буде мати вік ($t+1$) рік. Якщо по відношенню до цього обладнання в останній рік дотримуватися оптимальної політики, тоді додатково будуть одержані сумарні витрати $f_1(t+1)$, а загальні витрати за два роки складуть: $r(t)+u(t)+f_1(t+1)$.

Якщо ж на початку другого року буде прийняти рішення про заміну обладнання, тоді витрати, що пов'язані з реалізацією старого обладнання і придбанням нового, складуть $p-s(t)$, а сумарні витрати на нове обладнання за перший рік будуть дорівнювати $r(0)+u(0)$. До кінця року нове обладнання постаріє і буде мати вік один рік, тому оптимальна політика в останньому році виражається через витрати $f_1(1)$.

Загальні витрати за два роки складуть

$$r(0)+u(0)-s(t)+p+f_1(1).$$

Оптимальною за два останні роки буде політика, яка забезпечує за цей період мінімальні загальні витрати, які дорівнюють найменшому з виразів. Записати це можна у вигляді:

$$f_2(t) = \min_t \begin{cases} r(t) + u(t) + f_1(t+1) & - \text{ збереження}, \\ \\ r(0) + u(0) - s(t) + p + f_1(t+1) & - \text{ заміна}. \end{cases}$$

Аналогічно одержуємо вираз для $f_3(t)$ і т.д. Загальне функціональне рівняння Белмана має вигляд:

$$f_n(t) = \min_{t,n} \begin{cases} r(t) + u(t) + f_{n-1}(t+1) & - \text{ збереження}, \\ r(0) + u(0) + s(t) - p + f_{n-1}(1) & - \text{ заміна}. \end{cases}$$, де $n=2, 3,...;$ $t=0, 1, 2, ...$

Рекурентні співвідношення дозволяють реалізувати концепцію динамічного програмування і розгорнути процес формування оптимальної політики заміни обладнання з кінця періоду, що планується, послідовно відшукуючи $f_1(t),\ f_2(t), ..., f_{N-1}(t), f_N(t)$ для різних значень t.

7.3. Оптимальний розподіл ресурсів

Нехай керівництво підприємства розглядає пропозицію про вкладання коштів у n структурних підрозділів. Запропоновано вкласти X коштів у ці напрямки так, щоб одержати максимальну сумарну ефективність від обраного способу розподілу.

Позначимо через x_i - кількість коштів, що виділяються i-тому структурному підрозділу (i = 1, 2, ..., n). Через $g_i(x_i)$ позначимо функцію корисності, у даному випадку це прибуток, одержаний після вкладення коштів x_i, одержаних i-тим структурним підрозділом. Через функцію $f_k(x)$ позначимо найбільший прибуток, який можна одержати після вкладання коштів x від перших k структурних підрозділів.

Сформульовану задачу можна записати у математичній формі $f_n(x) = \max \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$, при обмеженнях: $\sum_{i=1}^{n} x_i = x, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n$.

Для розв’язання задачі необхідно одержати рекурентне співвідношення, що пов’язує $f_k(x)$ і $f_{k-1}(x)$.

Позначимо через x_k кількість коштів, що використовується k -м структурним підрозділом ($0 \leq x_k \leq x$), тоді для $(k-1)$-го структурного підрозділу залишається величина коштів, що дорівнює ($x - x_k$). Найбільший прибуток, який одержується при використанні коштів ($x - x_k$) від перших $(k-1)$-х напрямків, складе $f_{k-1}(x - x_k)$.

Для максимізації сумарного прибутку від виробничої діяльності k-го структурного підрозділу і перших $(k-1)$ структурних підрозділів необхідно вибрати кошти x_k таким чином, щоб виконувалися співвідношення:

$$f_1(x) = g_i(x),$$

$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = 2,3,\ldots,n$$

7.4. Оптимізаційна модель управління товарними запасами

Для побудови економіко-математичної моделі, введемо наступні змінні: x_t - випуск товарної продукції протягом часу t; y_t - рівень запасів на кінець часу t. Попит на товарну продукцію для періоду t позначимо через D_t. Припускаємо, що величина D_t для всіх t визначається невід'ємними цілими числами і до початку планового періоду всі D_t відомі.

Вважається, що для кожного періоду t витрати залежать від випуску продукції x_t, рівня запасів y_t на кінець відрізка t і, крім того, від значення t. Позначимо витрати на відрізку t через $C_t(x_t, y_t)$. Тоді цільову функцію економіко-математичної моделі можна записати у загальному вигляді:

$$\sum_{s=1}^{N} C_t(x_t; y_t) \to \min$$

На значення змінних x_t і y_t накладають декілька обмежень. По-перше, їх значення повинні бути цілочисловими; по-друге, бажано щоб рівень запасів на кінець відрізку N дорівнював нулю, тобто $y_N = 0$; по-третє, ставиться умова повного і своєчасного задоволення попиту у межах кожного періоду часу.

Для виконання цієї умови, необхідно ввести два обмеження. Перше з них назвемо балансовим, оскільки в ньому стверджується, що: рівень запасів на кінець відрізка t = (Рівень запасів на початок відрізку t) + (Випуск товарної продукції на відрізку t) – (Попит на відрізку t).

Якщо скористатися умовними позначеннями, що наведено вище, то це обмеження можна записати у наступному виді:

$$y_t = y_{t-1} + x_t - D_t$$

або у більш зручному вигляді:

$$y_{t-1} + x_t - y_t = D_t \quad (t = 1, 2, \ldots, N).$$

Відповідно до другого обмеження, що вводиться, і яке забезпечує своєчасне виконання підприємством своїх зобов'язань, рівень запасів на початок кожного відрізку і обсяги випуску продукції протягом цього відрізку повинні бути достатньо великими для того, щоб рівень запасів на кінець відрізка був невід'ємним.

Як видно, обмеження є лінійним. Як би всі величини витрат $C_t(x_t, y_t)$ лінійно залежали від значень змінних, тоді ця модель була б еквівалентна сітковій моделі і для неї легко можна було б знайти рішення. Але у більшості практичних випадків застосування виробничих моделей, функція витрат нелінійна. У тих випадках, коли обсяг виробництва протягом деякого періоду перевищує нормальну потужність виробничої дільниці, допоміжні витрати на одиницю продукції можуть зростати за рахунок використання надпланової роботи, переналадки обладнання, збільшення норм витрат на його обслуговування і т.п.

Для того, щоб розв'язати задачу про нелінійність кожної з величин $C_t(x_t, y_t)$, сформулюємо її у термінах динамічного програмування.

У нашому випадку N =4, тому що виробничий рік будемо розбивати на 4 квартали. Складемо балансове рівняння для $t = 1, 2, 3, 4$.

В задачі про управління товарними ресурсами будемо будувати обчислювальний процес від кінцевого стану до вихідного. Тут кінцевим станом буде початок останнього відрізку планового періоду, а вихідним – початковий момент першого відрізку (попереду ще N відрізків).

При складанні математичної моделі зручно використовувати систему індексів, при якому підстроковий індекс "1" відповідає кінцевому, а «N» – вихідному стану. Застосуємо наступні позначення:

d_n - попит на продукцію на відрізку n, який віддалений від кінця планового періоду на n відрізків (включаючи і той, що розглядається);

$c_n(x, y)$ - витрати на відрізку n, що пов'язані з випуском x одиниць продукції і з зберіганням запасів, рівень яких на кінець відрізку дорівнює y одиниць.

В цій системі позначення $d_1 \equiv D_N$ і $d_N \equiv D_1$, а $c_1(x, y) \equiv C_N(x, y)$.

Нехай $N = 4$, а плановий період починається з І кварталу. Тоді D_1 є попит на І квартал, D_4 - на IV квартал. В моделі буде використовуватися "обернена система індексів": попит за І квартал позначимо d_4, за ІІ - d_3, за ІІІ - d_2, за IV - d_1.

Для прийняття поточного рішення про обсяги випуску продукції не потрібно знати, яким чином досягається вихідний рівень запасів, тому введемо наступні позначення:

$f_n(y)$ -вартість, яка відповідає стратегії мінімальних витрат на n відрізків, що залишилися, при початковому рівні запасів y;

$x_n(y)$ -випуск продукції, що забезпечує досягнення $f_n(y)$.

Згідно з тим, що кінцевий запас дорівнює нулю ($y_N = 0$), рівень запасів на кінець планового періоду дорівнює нулю, тому має місце вираз: $f(0) = 0, \quad (n = 0)$.

Потім перейдемо до $n = 1$. Вихідний рівень запасів y може визначатися будь-яким невід'ємним цілим числом, але не більшим ніж d_1. Незалежно від значення y для повного задоволення потреб у межах останнього відрізку обсяг випуску товарної продукції повинен дорівнювати ($d_1 - y$). Отже, $f_1(y) = c_1(d_1 - y, 0), \qquad y = 0, 1, \ldots, d_1$

Перейдемо до $n = 2$. Відмітимо, якщо початковий рівень запасів дорівнює y, а обсяг випуску x, то загальні витрати для двох кварталів будуть складати: $c_2(x, y + x - d_2) + f_1(y + x - d_2)$,

Причому будемо вважати, що обрана стратегія для $n = 1$ була оптимальною. Крім того, величина $(y + x - d_2)$ є рівнем запасів на кінець другого відрізка. Величина y може приймати будь-які невід'ємні цілочислові значення, що не перевищують ($d_1 + d_2$). При заданому y цілочислові значення x повинне бути не менше, ніж $(d_2 - y)$, що забезпечує повне задоволення потреб на другому відрізку., але не більше ніж $(d_1 + d_2 - y)$, оскільки кінцевий запас дорівнює нулю. Оптимальному обсягу випуску товарної продукції відповідає таке значення x, при якому мінімізується сума витрат на виробництво і зберігання продукції. Виконаний вище аналіз для $n = 2$ можна виразити наступним чином:

$$f_n(y) = \min_x \left[c_2(x, y + x - d_2) + f_1(y + x - d_2)\right], \quad n = 1, 2, \ldots, N$$ де $y = 0, 1, \ldots, d_1 + d_2$,

причому для відшукання мінімуму перебираються всі невід'ємні цілі значення x, що знаходяться в межах $d_2 - y \le x \le d_1 + d_2 - y$.

Значення $f_3(y)$ можна обчислити, якщо відоме значення $f_2(y)$ і т.п. В кінці можна обчислити $f_N(y_0)$, де y_0 - рівень запасів на початок планового періоду. Загальне рекурентне співвідношення записується в наступному вигляді:

$$f_n(y) = \min_x \left[(c_n(x, y + x - d_n) + f_{n-1}(y + x - d_n)\right], \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$ де

$y = 0, 1, \ldots, d_1, d_2, \ldots, d_n$, причому для відшукання мінімуму перебирають всі невід'ємні цілі значення x, що знаходяться в межах $d_n - y \le x \le d_1 + d_2 + \ldots + d_n - y$.

Треба відмітити, що оскільки початковий рівень запасів y розглядається як змінна величина, яка повністю характеризує стан системи, то єдиною незалежною керуючою змінною у рекурентному співвідношенні є x, тому що рівень запасів на кінець відрізка дорівнює ($y + x - d_n$). Треба відмітити, що оскільки $f(0)$ і $f(y)$ без зусиль обчисляються за вищевказаними формулами, то можна безпосередньо і по черзі обчислити значення $f_2(0),\ f_2(1),\ ...,\ f_2(d_1)$, а потім аналогічним чином $f_3(0),\ f_3(1),\ ...,\ f_3(d_1 + d_2)$. Послідовно переходячи до все більших значень n, дійдемо до обчислення $f_{N-1}(0),\ f_{N-1}(1),\ ...,\ f_{N-1}(d_1 + d_2 + ... + d_{N-1})$ і, в кінці приходимо до $f_N(y_0)$.

Для пошуку оптимальної виробничої програми визначимо, який обсяг випуску продукції $x_N(y_0)$ дозволяє досягти одержаного значення $f_N(y_0)$. Відповідне рішення про випуск продукції є оптимальним рішенням для початкового відрізка планового періоду. Рівень запасів на початок наступного відрізка дорівнює $y_0 + x_N(y_0) - d_N$. Знайдемо обсяги випуску товарної продукції, які дозволяють досягти одержаного раніше значення $f_N\left[y_0 + x_N(y_0) - d_N\right]$.

Як видно з вищевикладеного, процес прийняття рішення є багатокроковим, число яких n (у даній задачі число відрізків планового періоду) до кінця процесу.

Використовуючи лише одне нове положення: початковий рівень запасів вважається характеристикою стану системи за n кроків до кінця планового періоду. Продовжуючи розгляд прикладу, побудованого для чотирьох кварталів, видно, якщо відомий рівень запасів на початок IV кварталу, попит за цей же квартал, то необхідний обсяг випуску товарної продукції у точності повинен дорівнювати різниці між цими двома величинами. Така залежність відображається вищевикладеним рівнянням. Таким чином, якщо рівень запасів на початок IV кварталу відомий, тоді знаходження оптимального випуску товарної продукції для цього періоду знаходиться легко.

Аналогічно цьому, при відомому рівні запасів на початок III кварталу і попиту за III квартал необхідний обсяг випуску продукції повинен бути не меншим, ніж різниця між цими двома величинами.

В свою чергу рішення, що приймається щодо обсягів випуску продукції у III кварталі, впливає на рівень запасів на початок IV кварталу і його значення дорівнює ($y + x - d_2$). Якщо остання величина відома, тоді можна діяти у IV кварталі оптимальним чином. Але випуск IV кварталу вже був оптимізований на попередньому кроці. Тому при визначенні оптимального обсягу виробництва у III кварталі, необхідно розглядати тільки суму витрат у III кварталі і оптимальних витрат після нього. Вся сукупність цих міркувань представлена правою частиною рекурентного співвідношення динамічного програмування. Ті ж самі міркування можна повторити для II та I кварталів.

В рекурентному співвідношенні, про що йшлося вище, послідовність операцій обернена до дійсної їх послідовності у часі. Це означає, що обчислювальний процес направлений від останнього відрізка планового періоду до першого. У нашому випадку, де $N = 4$, $f_1(y)$ обчислюється для IV кварталу. Але можна також розробити і прямий алгоритм, при якому обчислювальний процес направлений від першого відрізка до останнього. У цьому випадку необхідно задатися деякими значеннями вихідного рівня запасів y_0. Припустимо, що $y_0 = 0$. У випадку прямого алгоритму, наш підхід ґрунтується на обчисленні мінімальних витрат $g_n(y)$ з першого по n-й відрізок при умові, що рівень запасів на кінець відрізка n від початку планового періоду дорівнює y.

Тоді:

$$g_0(0) = 0,\ g_1(y) = C_1(D_1 + y, y) \quad (y = 0,1,\ldots,D_2 + D_3 + \ldots + D_N + y_N)$$

$$g_n(y) = \min\left[g_{n-1}(y - x + D_n) + C_n(x, y)\right], \quad n = 1, 2, \ldots, N, \quad (y = 0,1,\ldots,D_{n+1} + \ldots + D_N + y_N)$$

Для пошуку мінімуму перебираються всі невід'ємні цілі значення x, що не перевищують ($D_n + y$). Кінцевою метою обчислень є визначення значення $g_N(y_N)$, де y_N - заданий рівень запасів на кінець планового періоду.

Відмітимо, що $(y - x + D_N)$ у виразі є рівень запасів на початок відрізку n. Оптимальне значення x у вищевказаному співвідношенні, що дозволяє досягти $f_n(y)$ протягом n останніхвідрізків планового періоду, відноситься до випуску першого відрізка. Навпаки, оптимальне значення x, що дозволяє досягти $g_n(y)$ у співвідношенні, відноситься до випуску на відрізку n. Після представлення $g_n(y)$ для всіх n і y в табличному виді одержимо рішення, для чого нам прийдеться почати із значення y_N для відрізка N, потім визначити відповідне оптимальне значення x_N, зафіксувати відповідне йому значення рівня запасів на початок останнього відрізка, відшукати відповідне оптимальне значення x_{N-1} і т.п.

8. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР

8.1. Основні поняття теорії ігор

При розв'язуванні ряду економічних задач дуже часто виникають конфліктні ситуації, які породжуються суперечливими інтересами виробничих або зацікавлених структур. Математичним апаратом розв'язку такого типу задач є теорія ігор, яка представляє собою теорію побудови математичних моделей прийняття оптимальнихрішень в умовахконфлікту. Оскільки сторони, що беруть участь у вирішенні конфліктів, зацікавлені у прихованні своїх намірів від супротивника, тому прийняття рішень в умовах конфлікту є переважно прийняттям рішень в умовахневизначеності. Фактор невизначеності в окресленій ситуації можна інтерпретувати як супротивника суб’єкта, що приймає рішення. Логічною основою теорії ігор є формалізація трьох понять, які входять у її визначення і є базовими для всієї теорії: конфлікт, прийняття рішення в ньому та оптимальність цього рішення.

Гра – це дійсний або формальний конфлікт, в якому є хоч би два учасники (гравці), кожний із яких прагне досягти власної мети. Допустимі дії кожного з гравців, спрямовані на досягнення деякої мети, називаються правилами гри. Кожний гравець має деяку множину (скінченну чи нескінченну) можливих виборів, яка називається стратегіями. Стратегія гравця називається оптимальною, якщо при багатократному повторенні гри вона забезпечує гравцеві максимально можливий середній виграш (або мінімально можливий програш).

Приклад. Підприємства A та B виробляють два конкуруючих види продукції. У певний час кожний вид продукції «контролює» 50% ринку. Покращивши якість продукції, обидва підприємства планують розгорнути рекламні заходи. Якщо обидва підприємства не будуть цього робити, то стан ринку не зміниться. Обстеження ринку показує, що 50 % потенційних покупців отримують інформацію через телебачення, 30 % – через пресу й останні 25 % – через радіомовлення. Мета кожного підприємства – вибрати ефективні засоби реклами. Задачу необхідно сформулювати як гру двох осіб з нульовою сумою й знайти оптимальні стратегії.

Учасниками гри є два підприємства A і B. Кожен із гравців має три стратегії використання реклами – телебачення (1), преса (2) й радіомовлення (3). Якщо обидва гравці виберуть однакові ЗМІ для реклами своєї продукції, то їх вплив на ринок не зміниться. Припустимо, що якщо підприємство A вибрало як засіб реклами телебачення ($A1$), то підприємство B може вибрати телебачення ($B1$), пресу ($B2$) чи радіомовлення ($B3$) для реклами. У результаті такого вибору вплив на ринок для A в першому випадку не зміниться, в другому й третьому відповідно збільшиться на 20 % і 30 %. Якщо підприємство A вибере за стратегію рекламу через пресу ($A2$), то B може вибрати телебачення ($B1$), пресу ($B2$) чи радіомовлення. Тоді в першому випадку підприємство A втратить 20% споживачів, у третьому – попит зросте на 10 %. Аналогічно аналізуємо третю стратегію. Остаточно отримуємо платіжну матрицю$[a_{ii}]$:

B min в рядках					
		B_1	B_2	B_3	
A	A_1	0	20	30	0 ← максмін
max →	A_2	–20	0	10	–20
у стовпцях	A_3	–30	–10	0	–30
	0	20	30		
	↑ мінімакс				

Знайдемо нижню та верхню ціни описуваної гри:

$$\alpha = \max_i \min_j \{a_{ij}\} = \max\{0; -20; -30\} = 0;$$

$$\beta = \min_j \max_i \{a_{ij}\} = \min\{0; 20; 30\} = 0.$$

Оскільки $\alpha = \beta = 0$, то гра має сідлову точку. Оптимальними будуть стратегії A_1 для підприємства A і B_1 для B, тобто обом підприємствам слід використати як засіб інформації телевізійну рекламу.

8.2. Змішані стратегії

Наявність у грі сідлової точки дає можливість визначити необхідні оптимальні стратегії. Але деякі ігри не завжди мають сідлові точки, тобто максимінно-мінімаксні стратегії неоптимальні.

Це призводить до того, що кожний із гравців може поліпшити своє становище, вибравши іншу стратегію. У цьому випадку виникає потреба у використанні змішаних стратегій.

Змішані стратегії – це математична модель можливої й гнучкої тактики гравця, при якій супротивний йому гравець не може знати наперед ситуацію, з якою йому прийдеться зіткнутись у грі, тому перед кожною партією проводиться випадковий вибір однієї з чистих стратегій з допомогою деякого механізму, який здійснює цей вибір із визначеними й наперед заданими ймовірностями.

Розглянемо гру двохосіб, матриця платежів якої має розмірність $n \times m$. Нехай гравець A має n стратегій, а гравець B – m стратегій.

Позначимо через $p=(p_1, p_2,\dots,p_n)$ і $q=(q_1, q_2,\dots,q_m)$ вектори ймовірностей, з якими гравці A та B відповідно вибирають свої чисті стратегії. Оскільки ці стратегії за умовою гри повністю вичерпують можливі ходи гравців A і B, то вони утворюють повну групу подій.

Тому має місце: $$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{j=1}^{m} q_j .$$ Якщо a_{ij} – (i, j)-й елемент матриці гри, то платіжна матриця має вигляд:

			B_1	B_2	…	B_m
			q_1	q_2	…	q_m
A	A_1	p_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}
	…	…	⋮		…	⋮
	A_n	p_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}

Відповідно до основної теореми теорії ігор кожна скінченна гра має хоч би один розв’язок, який визначає певна змішана стратегія.

Методика визначення розв’язку гри при змішаних стратегіях в основному також ґрунтується на використанні критерію мінімакса. Різниця полягає в тому, що гравець A вибирає P_i так, щоби максимізувати найменший сподіваний виграш (математичне сподівання) по стовпцях, тоді як гравець B вибирає qj з метою мінімізації найбільшого сподіваного виграшу по рядах. Математично критерій мінімакса для змішаних стратегій описується таким чином.

Гравець A вибирає стратегію A_{i}, яка дає:

$$\max_{p_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}p_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_{i2}p_i,\dots,\sum_{i=1}^{n} a_{im}p_i\right)\right\},$$

а гравець В обирає стратегію B_i, яка дає:

$$\min_{q_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j}q_j,\ \sum_{j=1}^{m} a_{2j}q_j,\dots,\sum_{j=1}^{m} a_{nj}q_j\right)\right\}.$$

Ці величини визначаються відповідно як сподівані максимінні та мінімаксні платежі. При цьому має місце співвідношення:

$$\begin{bmatrix}\text{Мінімаксний сподіваний}\\ \text{програш}\end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix}\text{Максимінний сподіваний}\\ \text{виграш}\end{bmatrix}$$

Якщо p_i і q_j відповідають оптимальним розв'язкам, тобто виконується строга рівність, то результативне значення дорівнює сподіваному (оптимальному) значенню гри. Якщо pi^* і qj^* оптимальні розв'язки для обох гравців, то кожному елементу платіжної матриці відповідає ймовірність pi^* і qj^*. Отже, оптимальне сподіване значення (ціна) гри має вигляд: $v^* = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}p_i^*q_j^*$.

Для знаходження оптимальних стратегій в іграх двох осіб з нульовою сумою можна використати графічний метод (для ігор виду $2\times m$ або $n\times 2$), а також привести задачу до лінійного програмування.

8.3. Графічний метод розв'язку ігор виду $2\times m$ і $n\times 2$

Приклад. На основі наявного добового обсягу сировини підприємство має можливість випускати два види продукції, що швидко псується. Прибуток підприємства залежить від обсягу реалізованої продукції кожного виду, яка в свою чергу залежить від погоди.

Реалізація першого виду продукту вища за теплої погоди, другого – за прохолодної. Стан погоди можна розглядати як такі стратегії природи: день пекучий сухий, пекучий вологий, теплий сухий, теплий вологий, прохолодний сухий, прохолодний вологий.

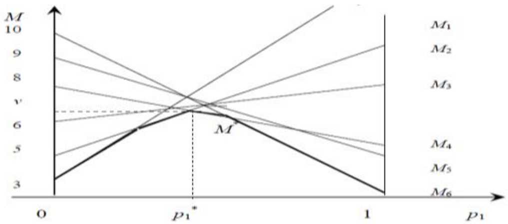
Відома матриця прибутку (ум.од.) підприємства за кожним видом продукції залежно від стану погоди:

$$\begin{bmatrix}12 & 9 & 7 & 5 & 4 & 2\\ 3 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10\end{bmatrix}.$$

За допомогою графічного методу знайти оптимальні стратегії з організації випуску продукції підприємством.

Побудована гра не має сідлової точки в чистих стратегіях, тому для визначення оптимальних стратегій можна скористатися графічним методом. Стратегіями підприємства є виробництво продукції першого або другого виду. Будемо вважати підприємство першим гравцем, а природу – другим. Позначимо через p_1 імовірність використання своєї першої стратегії першим гравцем, через $q(q_1, q_2, \dots, q_6)$ – змішану стратегію другого гравця. Побудуємо графіки середніх виграшів першого гравця, для цього знайдемо $M_j(p_1)$:

$M_1(p_1)=(12-3)p_1+3=9p_1+3;\ M_2(p_1)=(9-5)p_1+5=4p_1+5;$
$M_3(p_1)=(7-6)p_1+6=p_1+6;\ M_4(p_1)=(5-8)p_1+8=-3p_1+8;$
$M_5(p_1)=(4-9)p_1+9=-5p_1+9;\ M_6(p_1)=(2-10)p_1+10=-8p_1+10.$



Нижня границя множини обмежень зображена на рис жирною лінією. Як бачимо, $maxM(p_1)$ досягається в точці M^*, що утворюється лініями $M_1(p_1)$ і $M_4(p_1)$. Покладемо $q_2=q_3=q_5=q_6=0$. Для знаходження p_1, p_2, q_1, q_4, v необхідно розв'язати такі системи рівнянь:

$$\begin{cases}12p_1+3p_2=v,\\5p_1+8p_2=v,\\p_1=1-p_2,\end{cases}\qquad\begin{cases}12q_1+3q_4=v,\\5q_1+8q_4=v,\\q_2=1-q_1.\end{cases}$$

Розв'язками цих систем буде:

$p_1=\frac{5}{12};\ p_2=\frac{7}{12};\ q_1=\frac{5}{12};\ q_4=\frac{7}{12};\ v=\frac{27}{4}$ млн.грн.

Отже, отримали оптимальний розв'язок. Підприємству необхідно 5/12 обсягів сировини використати на виготовлення І виду продукції, а 7/12– для ІІ виду продукції. При цьому отримаємо максимальний прибуток у розмірі 6,75 млн. грн.

9. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бугір М.К. Математика для економістів: посібник. – Київ: ВЦ «Академія», 2008. – 520 с.
2. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2011. – 248 с.
3. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: навч. посібник. – 2-ге вид., без змін. – К.: КНЕУ, 2007. – 408 с.
4. Григорків В.С. Оптимізаційні методи та моделі: підручник / В.С. Григорків, М.В. Григорків. – Чернівці: ЧНУ, 2016. – 400 с.
5. Дудка Г.Я. Практикум по математике для экономистов. – Львов: Львовский банковский колледж, 2008. – 72 с.
6. Егоршин А.А., Малярец Л.М. Математическое программирование: учебное пособие. – Х.: «ИНЖЭК», 2010. – 240 с.
7. Економіко-математичне моделювання: навч. посібник / за ред. О. Т. Іващука. – Тернопіль: ТНЕУ Економічна думка, 2008. – 704 с.
8. Коюда П.М., Ларіонов Ю.І. Математичне програмування. – Х.: ХТУРЕ, 2007. – 126 с.
9. Чемерис А., Юринець Р., Мищишин О. Методи оптимізації в економіці: навчальний посібник. – К.: ЦУЛ, 2009. – 152 с.
10. Швачич Г.Г. Лінійна алгебра в розрахунках середовища MATHCAD: Підручник. – Дніпропетровськ: ДАУБП, 2011. – 366 с.
11. Крушевский А.В., Швецов К.И. Математическое программирование и моделирование в экономике. – К.: Вища школа, 2009. – 442 с.
12. Линейное и нелинейное программирование / Под ред. И.Н. Ляшенко. – К.: Высш. шк., 2008. – 254 с.
13. Машина Н.І. Математичні методи в економіці.: Навчальний посібник. – К.: ЦУЛ. 2011. – 148 с.
14. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування. Навчальний посібник – К.: КНЕУ, 2009 – 425 с.
15. Наконечный С.И., Гвоздецкая Л.В. Сборник задач по курсу «Математическое программирование»: уч. пособие. – К.: ИСОД, 2009. – 544 с.
16. Ржевский С.В. Вступ до економетрії: навч. посібник. – К.: ЕУФІМБ, 2009 – 120 с.
17. Степанюк В.В. Методы математического программирования. – К.: Высш. шк., 2007. – 266 с.

ЗМІСТ