К. Б. Авраменко

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ВЕЛИЧИН ТА ДРОБІВ У ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. О. Сухомлинського
факультет дошкільної та початкової освіти
кафедра початкової освіти

Авраменко К.Б.

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ВЕЛИЧИН ТА ДРОБІВ У ПОЧАТКОВІЙ ШКОЛІ

Навчально-методичний посібник

Миколаїв – 2020

УДК 373.3.016:51+378.1

Рекомендовано вченою радою Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського
(Протокол № 23 від 25.05.2020 р.)

Рецензенти:

Скворцова Світлана Олексіївна, доктор педагогічних наук, професор ДЗ «Південноукраїнського національного педагогічного університету імені К. Д. Ушинського»;

Трибулькевич Катерина Георгіївна, доктор педагогічних наук, професор, завідувач завідувач кафедри соціально-гуманітарних дисциплін НУК імені адмірала Макарова

Методика вивчення величин та дробів у початковій школі: навчально-методичний посібник / К. Б. Авраменко. – Миколаїв : СПД Румянцева, 2020. – 78 с.

УДК 373.3.016:51+378.1

У навчально-методичному посібнику розглянуто змістові лінії: «Величини» та «Дроби». Описано методику їх вивчення у початковій школі, що вимагає від учителів не тільки наявності певних теоретичних знань, а й практичних умінь моделювання як особливого виду наочно-індивідуальної роботи.

Посібник буде корисним для студентів, викладачів та учителів початкової школи.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В умовах сьогодення, коли в державі реалізується Концепція Нової української школи, особливого значення набуває удосконалення професійної підготовки майбутніх фахівців початкової освіти у закладах вищої освіти.

Важливою складовою фахової підготовки вчителя спеціальності 013 Початкова освіта є методико-математична підготовка.

За вимогами нового Державного стандарту загальної початкової освіти до ключових компетентностей належать:

1) вільне володіння державною мовою, що передбачає уміння усно і письмово висловлювати свої думки, почуття, чітко та аргументовано пояснювати факти, а також любов до читання, відчуття краси слова, усвідомлення ролі мови для ефективного спілкування та культурного самовираження, готовність вживати українську мову як рідну в різних життєвих ситуаціях;

2) здатність спілкуватися рідною (у разі відмінності від державної) та іноземними мовами, що передбачає активне використання рідної мови в різних комунікативних ситуаціях, зокрема в побуті, освітньому процесі, культурному житті громади, можливість розуміти прості висловлювання іноземною мовою, спілкуватися нею у відповідних ситуаціях, оволодіння навичками міжкультурного спілкування;

3) математична компетентність, що передбачає виявлення простих математичних залежностей в навколишньому світі, моделювання процесів та ситуацій із застосуванням математичних відношень та вимірювань, усвідомлення ролі математичних знань та вмінь в особистому і суспільному житті людини.

Таким чином, метою математичної освітньої галузі є формування математичної та інших ключових компетентностей; розвиток мислення, здатності розпізнавати і моделювати процеси та ситуації з повсякденного життя, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів, а також здатності робити усвідомлений вибір.

Здобувачі початкової освіти:

– досліджують ситуації і визначають проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів;

– моделюють процеси і ситуації, розробляють стратегії (плани) дій для розв'язування різноманітних задач;

– критично оцінюють дані, процес та результат розв'язання навчальних і практичних задач;

– застосовують досвід математичної діяльності для пізнання навколишнього світу.

У представленому навчально-методичному посібнику розглянуто змістові лінії: «Величини» та «Дроби». Методика їх вивчення у початковій школі вимагає від учителів не тільки наявності певних теоретичних знань, а й практичних умінь моделювання як особливого виду наочно-індивідуальної роботи, що, в свою чергу, вплинуло на структуру даної праці.

Автор сподівається, що навчальний посібник допоможе майбутнім учителям та вчителям-практикам зорієнтуватися у теоретичному підґрунті даної теми, засвоїти основні етапи та переконатися у важливості використання інноваційних технологій під час її вивчення.

РОЗДІЛ 1
ЗАГАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ВИВЧЕННЯ ВЕЛИЧИН ТА ДРОБІВ У ЗАКЛАДАХ ОСВІТИ

1.1. Аналіз програм сучасних закладів освіти

За програмою розвитку й виховання дітей дошкільного віку «Малятко» у розділі «Цікава математика» визначено такі навчальні завдання: *у старшій групі* (шостий рік життя): ,,ділити предмети, геометричні фігури на 2, 4 рівні частини, порівнювати ціле і частини, знаходити частину від цілого” [___, с. 213]; *у підготовчій до школи групі* (сьомий рік життя): ,,ділити геометричні фігури, предмети на 2, 3, 4, 5 … і т.д. частин” [там само, с. 214]. У результатах навчально-виховної роботи лише у підготовчій до школи групі визначено: ,,порівнюють предмети за величиною і формою, геометричні фігури між собою; уміють ділити їх на частини” [____, с. 215].

Отже, аналіз програм розвитку й виховання дітей дошкільного віку дозволяє нам зробити висновок, що пропедевтикою вивчення тем «Величини» та «Дроби» у початковій школі є перше ознайомлення з частинами і дробами вже у дошкільній ланці освіти. Важливим є те, що введення даних понять тісно пов’язано із ознайомленням з геометричними фігурами та предметами, їх формування базується на наочно-практичній основі.

Відповідно до нового Державного стандарту початкової освіти **завданням змістової лінії «Величини»** є ознайомлення учнів із основними величинами та їх вимірюванням. Ця змістова лінія є пропедевтичною основою для побудови моделей навколишнього світу, важливою ланкою, що пов’язує математику з іншими науками. Вивчення довжини, маси, місткості, часу, вартості, периметру, площі та способів вимірювання цих величин перебуває у тісному зв’язку з формуванням поняття числа, вивченням арифметичних дій та геометричних фігур. Одиниці вимірювання величин вводять поступово по концентрах – десяток, сотня, тисяча, мільйон. Важливо формувати в учнів уміння використовувати різні одиниці вимірювання величин у процесі розв'язування практично - зорієнтованих задач. Поняття величини є одним із головних у контексті формування в учнів цілісної картини світу, практичного застосування досвіду навчальної математичної діяльності в життєвих ситуаціях.

У межах змістової лінії «Числа. Дії з числами» на практичній основі в учнів формують поняття дробу: у 3-му класі – ознайомлюють із частинами (дробами з чисельником 1), у 4-му – з дробами, їх утворенням і порівнянням дробів з однаковими знаменниками.

За типовими освітніми програмами з математики для 1-4 класів завданням початкового курсу є формування уявлень про частини і дроби. Так, даним документом передбачається в 3 класі ознайомити учнів із частинами, їх записом, висувається завдання навчити розв'язувати задачі на знаходження частини від числа та числа за його частиною, в 4-му класі – ознайомити з дробами, їх записом, навчити читати дроби, порівнювати дроби з однаковими знаменниками, навчити розв'язувати задачі на знаходження дробу числа, числа за його дробом [___, с. 164]. Крім того, вказується, що названі питання розкриваються на наочно-практичній основі [там само].

Згідно з Державними вимогами щодо загальноосвітньої підготовки у результаті вивчення теми «Дроби» [___, с. 183] учні повинні:

1) **мати уявлення** про утворення дробу, чисельник і знаменник дробу;
2) **записувати і читати** дроби;
3) **знаходити** дріб від числа та число за його дробом;
4) **порівнювати** дроби з однаковими знаменниками.

Методика вивчення найпростіших дробів ґрунтується на конкретних образах і моделях частин величини, на практичному утворенні тієї або іншої частини, а потім і дробу в результаті поділу предметів, геометричних фігур тощо на визначену кількість рівних частин. А тому вивчення теми неможливе без використання наочних посібників: набору геометричних фігур (кругів, прямокутників тощо) для демонстрації (фронтальної) роботи, а також набору паперових смужок, кругів або інших геометричних фігур для індивідуальної роботи учнів. Бажано, щоб у класі вчитель мав: Таблиці з математики для 4 класу; навчальні діафільми: «Частини величини. Дроби», «Геометрія у 4(3) класі», інші засоби навчання.

За нетиповими освітніми програмами авторські колективи визначали послідовність, очікувані результати та змістові модулі навчання які є складовими сфер життєдіяльності людини, відображають провідні соціально й особистісно значущі ідеї [1, с. 12]. Так, наприклад, в інтегрованій програмі «Світ, в якому я живу» математична освітня галузь структурована за такими *змістовими лініями*:

1. «Числа. Дії з числами»
2. «Величини»
3. «Просторові відношення. Геометричні фігури»
4. «Математичні вирази, рівності, нерівності»
5. «Сюжетні задачі»
6. «Робота з даними» (реалізується наскрізно у змісті всіх змістових ліній).

При цьому змістова лінія «Величини» є пропедевтичною для побудови моделей навколишнього світу, є своєрідним «містком» між математичною та іншими освітніми галузями. Вивчення математичних величин довжини, маси, місткості, часу, вартості, периметру, площі та способи вимірювання цих величин пов’язано із формуванням поняття числа, арифметичними діями, геометричними фігурами. Здобувачі освіти засвоюють, що кожна величина має свої одиниці вимірювання і їх скорочене позначення. Вивчення одиниць вимірювання вводиться поступово за концентрами («Десяток», «Сотня», «Тисяча», «Мільйон»). Виконують арифметичні дії з величинами. Розкриття взаємозалежності між пропорційними величинами є основою для навчання розв’язування сюжетних задач та практичного застосування досвіду математичної діяльності у навчальних та життєвих ситуаціях.

За програмою для 5–12 класів загальноосвітньої школи вивчення математики має забезпечити базову математичну підготовку учнів, що спрямована на їх загальний розвиток, формування математичної грамотності та є достатньою для реалізації обраного шляху подальшого здобуття освіти. Курс математики 5–6 класів передбачає розвиток, збагачення і поглиблення знань учнів про числа і дії над ними, числові й буквені вирази, величини та їх вимірювання, рівняння і нерівності, а також уявлень про окремі геометричні фігури і геометричні тіла [___, с. 12].

Крім того, у 5–6 класах відбувається розширення множини натуральних чисел і нуля до множини раціональних чисел шляхом послідовного введення дробів (звичайних і десяткових), а також від'ємних чисел разом з формуванням міцних обчислювальних навичок [там само].

Отже, за програмою з математики для 5 класу учні повторюють отримані у початковій школі знання про дроби, а також опановують нові поняття – «ціла і дробова частина числа», «правильні та неправильні дроби». Учні вчаться виділяти у неправильних дробах цілу та дробову частини, розв'язують обернену задачу, порівнюють дроби з однаковими знаменниками, додають та віднімають такі дроби [___, с. 156-158].

Вимоги до знань та умінь до учнів 5 класу такі:

- розуміти суть звичайного дробу, чисельника і знаменника, правильного і неправильного дробу, цілої і дробової частини числа;
- знати правила порівняння, додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками;
- читати і записувати дробові числа; порівнювати, додавати і віднімати звичайні дроби з однаковими знаменниками;
- розв'язувати текстові задачі, пов'язані із звичайними дробами, арифметичними способами [там само, с. 157].

Крім того, новою програмою з математики при вивченні дробових чисел передбачено опанування такими поняттями та операціями:

Дробові числа. Звичайні дроби. Правильні та неправильні дроби. Мішані числа.

Порівняння звичайних дробів з однаковими знаменниками.

Додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками.

Десятковий дріб. Запис і читання десяткових дробів. Порівняння і округлення десяткових дробів.

Додавання, віднімання, множення і ділення десяткових дробів.

Відсотки. Знаходження відсотків від даного числа. Знаходження числа за його відсотками.

Масштаб.

Середнє арифметичне, його використання для розв'язування задач практичного змісту. Середнє значення вели чини.

Розв'язування текстових задач.

Згідно з Державними вимогами щодо загальноосвітньої підготовки у результаті вивчення теми «Дроби» учні у 5-му класі повинні:

Розпізнавати звичайний дріб, дробове число; десятковий дріб.

Дотримуватися правил: порівняння, додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками; порівняння, округлення, додавання, множення і ділення десяткових дробів.

Формулювати означення правильного і неправильного дробів.

Називати розряди десяткових знаків у записі десяткових дробів.

Читати і записувати звичайні та десяткові дроби.

Описувати: поняття: масштаб, відсоток; правило порівняння десяткових дробів.

Розв'язувати вправи, що передбачають**:** знаходження дробу від числа і числа за його дробом; перетворення мішаного числа у неправильний дріб; перетворення неправильного дробу в мішане число або натуральне число; порівняння, додавання, віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками; порівняння десяткових дробів, додавання, віднімання, множення і ділення десяткових дробів; округлення десяткових дробів до заданого розряду; використання масштабу; знаходження відсотків від числа та числа за його відсотками; знаходження середнього арифметичного кількох чисел, серед нього значення величини.

Розв’язувати текстові задачі на основі аналізу залежностей між величинами, про які йдеться в умові, та прості задачі комбінаторного характеру [___, с. 13].

Наступність у видах завдань по класах початкової та основної школи ми розглянемо у наступному розділі.

1.2. З історії виникнення величин та дробів

Людина давно визнала необхідність вимірювати різні величини, причому виміряти як можна точніше. Основою точних вимірювань являються зручні, чітко визначені одиниці величин і еталони цих одиниць. В свою чергу, точність еталонів відображає рівень розвитку науки, техніки, говорить про науково-технічний потенціал країни.

В історії розвитку одиниць величин можна виділити кілька періодів.

Самим давнім являється період, коли одиниці довжини ототожнювалися з назвами частин людського тіла. Так, в якості одиниць довжини брали *лікоть* (довжина ліктя), *фут* (довжина ступні), *дюйм* (ширина великого пальця) та ін. В якості одиниць площі в цей період виступали: *криниця* (площа, яку можна полити із однієї криниці), *плуг* (середня площа, оброблена за день плугом) та ін.

В XIV-XVI ст. появляються в зв'язку з розвитком торгівлі так звані об’єктивні одиниці вимірювання величин. В Англії, наприклад, *дюйм* (довжина трьох сухих зернин ячменю), *фут* (ширина 64 зернин ячменю, поставлених один до одного). В якості одиниць маси були введені *гран* (маса зерна) і *карат* (маса боба).

Наступний період в розвитку одиниць величин – введення одиниць, взаємозв’язаних один з одним. В Росії, наприклад, такими були *одиниці довжини*: миля, верста, сажень, аршин; 3 аршина становили сажень, 500 сажнів – версту, 7 верст – миля.

Однак зв'язки між одиницями величин були різними у різних країнах, таке різноманіття одиниць величин гальмувало розвиток промисловості, заважало науковому прогресу і розвитку торгівельних зв'язків.

Нова система одиниць, яка як наслідок з'явилася основою для міжнародної системи, була створена у Франції в *кінці XVIII ст.* В якості основної одиниці довжини в цій системі приймався МЕТР – одна сорокамільйонна частина довжини земного меридіана.

Крім метра, були створені ще такі одиниці: *АР* – площа квадрата зі стороною 10 м; *ЛІТР* – об'єм рідини рівний об'єму куба з довжиною ребра 0,1 м; *ГРАМ* – маса чистої води, яка займала об'єм куба з довжиною ребра 0,01 м.

Були введені також десяткові кратні і частинні одиниці: мирна (10^4), кило (10^3), гекто (10^2), дека (10^1), деци (10^{-1}), санти (10^{-2}), мілі (10^{-3}).

Одиниця маси *кілограм* була визначена як маса 10 дм^3 води при температурі 4^0С.

Так як всі одиниці величини виявились тісно зв'язаними з одиницею довжини метром, то нова система величин одержала назву *метричної системи мір.*

У відповідності з прийнятими визначеннями були виготовлені платинові еталони метра і кілограма: метр представляла лінійка з нанесеними на її кінцях поділками, а кілограм – циліндрична гиря. Ці еталони передали на зберігання національному архіву Франції, в зв'язку з чим вони отримала назви «архівний метр» і «архівний кілограм».

Проте, створена *в XVIII ст.,* метрична система мір відповідала розвитку науки і вимірювальності техніки того часу і, звичайно, не могла бути стабільною. З метою закріплення співробітництва по удосконаленню системи одиниць величин в 1921 р. було створено *Міжнародне бюро мір і маси.*

Бурхливий розвиток науки в промисловості *в XX ст.* привело до того, що виникло багато різноманітних систем одиниць, доповнюючи і розвиваючих метричну систему мір. Зі всією гостротою встала проблема створення єдиної універсальної системи одиниць величин. Овна завершилася прийняттям в 1960 р. рішення про введення Міжнародної системи одиниць *(SI)*.

Міжнародна система одиниць – це єдина універсальна практична система одиниць для всіх відростків науки, техніки, народного господарства і викладання. Так як необхідність в такій системі одиниць була велика, то за короткий час вона одержала широке міжнародне призначення і розповсюдження по цілому світі.

Одиниці довжини

Аршин – старовинна одиниця довжини.

Прийшов аршин на Русь 500 років тому разом з купцями з далеких східних країн. Купці привозили не бачені до того тканини. найтонший китайський шовк. Виготовлену із справжніх золотих і срібних ниток важку індійську парчу. Оксамит і тафту заткану квітами і драконами – з Персії. Вони привозили в своїх тюках неоціненні витвори мистецтва, виготовлені руками народних умільців. Нині ці тканини і пошитий з них царський одяг зберігаються в музеях. Вони й зараз вражають своєю пишнотою не менше, ніж 500 років тому.

Але 500 років тому купці ними торгували, і їх доводилося відміряти. Як же це робилося? В наших крамницях користуються дерев'яними метрами.

Купці обходилися без метрів: тканину натягували на власну руку, до плеча. Це й називали міряти аршинами.

Міра хоча й була дуже зручною – адже руки у всіх при собі – однак мала істотну ваду: на жаль, руки у всіх різні. В одних вони довші, в інших – коротші. Хитрі купці швидко зметикували, що потрібно шукати прикажчиків з короткими руками – той самий сувій, а аршинів більше.

Та якось цьому прийшов кінець. Продавати „на свій аршин" влада суворо заборонила. Користуватися дозволялося тільки „казенним аршином".

Давно вже люди перейшли на метричну систему мір. Десятки років ніхто не міряє аршинами, але слово це не забули, і до цього часу про надзвичайно проникливу людину кажуть: „Бачить на три аршини під землю". Про людину, яка судить про все тільки по собі, - „міряє на свій аршин". (Аршин дорівнює 71 сантиметрову 1,2 міліметра. Аршин дорівнює 16 вершкам. Аршин дорівнює 28 дюймам.).

Дюйм – міра довжини, якою користуються в багатьох країнах уже протягом кількох віків. Це – невелика довжина.

Походить дюйм від ширини великого пальця. І саме слово по-голландськи означає „великий палець”. В Англії його розмір визначали тонкіше. Закон, виданий 700 років тому встановив, що дюйм – це довжина трьох сухих зернин ячменю, вийнятих із середньої частини колоска.

В Англії, Америці і деяких інших країнах дюйм – основна міра жовтини в техніці. До введення метричної системи мір так було і в нашій країні. Та й нині дюйм залишився в деяких галузях техніки. Поглянь на велосипедні шини. На них є числа 533 х 37 (24 х 1 ½) або 622 х 32 (27 х 1 ¼). Що вони позначають? Розмір шин. Перші два числа – діаметр і ширину в міліметрах, а два другі – ті ж розміри в дюймах. Два штрихи біля чисел – це скорочене позначення дюйма, прийняте в усьому світі. Так само вимірюються і шини автомобілів. У „Запорожця”, наприклад, шина 5,2-13, в автобуса – 11,0-20, а у величезних самоскидів БелАЗів – 18,0-32. Перше число – це ширина шини, а друге – її внутрішній діаметр, і те й друге – в дюймах. (Дюйм дорівнює 2 сантиметри 5,4 міліметра. Дюйм дорівнює 1/12 фута.).

Метр – найголовніша одиниця вимірювання. Родоначальник великої родини одиниць, яка носить. Метр з’явився на світ наприкінці XVIII століття у Франції. Він незрівнянно солодший від дюйма, фута чи милі. І був навмисне вигаданий, щоб їх замінити.

Саме французькі вчені запропонували взяти за основі розміри земної кулі. Нову одиницю вони визначили як одну десятимільйонну частину чверті довжини меридіана, тобто одну десятимільйонну частину відрізку меридіана від полюса до екватора. І назвали її метр – від грецького слова «метрон» – «міра».

Нову одиницю визначили, вона одержала ім'я. Залишилося невідомим найголовніше – її розмір. Щоб установити точну довжину метра треба було знати точну довжину меридіана. А в ті часи вони була відома тільки приблизно. Почалися багаторічні роботи. Найточнішими методами виміряли довжину меридіана. Найкращі математики зробили складні розрахунки. Нарешті розмір нової одиниці був вирахуваний. І найкращий майстер Франції зробив за цими розрахунками „архівний метр" – лінійку з платини. Довжина лінійки – відстань між її кінцями – точно дорівнювала одній десятимільйонній частини меридіана. Проте швидко настало розчарування. З'ясувалося, що довжина меридіана була визначена не досить точно. І його десятимільйонна частина насправді довша, ніж архівний метр, що зберігався в архівах республіки. Більше того, стало цілком ясно, що в подальшому ця величина буде ще багато разів уточнюватися, отже доведеться багато разів уточнювати і довжину метра. Від міри, взятої з природи, довелося відмовитися. Одиницею довжини залишилась відстань між кінцями архівного метра.

Метр і основані на ньому метричні міри народилися в 1799 році. Проте остаточно встановлені і прийняті як міжнародні вони були тільки через 90 років.

На той час було виготовлено 34 зразки метра і 43 зразки кілограма. Зробити їх було не так-то просто. Роботи тривали понад десяти років. Довго вибирали матеріал – шукали надійний, стійкий. Довго розраховували форму і поперечні розміри – потрібна була найбільша міцність за найменшої ваги. Найкращим матеріалом визнали сплав платини з іридієм. Найкращою формою для зразка метра – стрижень з поперечним перерізом у вигляді літери „Х".

У 1889 році виготовлені зразки були затверджені як еталони найточніших мір кілограма і метра. Один з них став міжнародним еталоном і зберігався в Міжнародному бюро мір і ваги в Севрі, поблизу Парижа. Інші перейшли у власність різних країн.

З того часу минуло понад 80 років. Усі ці роки еталони старанно зберігалися. Адже це особливі цінності державної ваги. Наші еталони зберігаються в Ленінграді, і спеціально побудованому для них будинку. Всередині будинку ізольовані кімнати з масивними стінами. В одній з кімнат вогнетривка камера. Двері її замкнені на три замки. Ключі зберігаються у різних людей. Усередині вогнетривкої камери сейф. Він також замкнений на три різні замки. Ось саме в ньому і зберігаються платно іридієві метр та кілограм.

У 1960 році метр визначили через постійну величину, що залишається незмінною в будь-яких умовах – довжину світлових хвиль. У нашій країні новий метр затверджений 12 січня 1968 року.

Миля – одиниця відстаней, якою користуються тисячі років на всій землі. Назва її походить від латинського слова „мілія” – „тисяча”.

Колись були спеціальні ходаки, котрі допомагали складати карти: вони відміряли відстані, лічачи кроки. Тисяча подвійних кроків називалася милею. Величина її була від 1,4 до 1,9 кілометра.

Однак згодом цим словом почали називати найрізноманітніші відстані, аж ніяк не пов’язані з тисячею кроків. У багатьох країнах з'явилися свої милі, часом не одна, а кілька. У Німеччині, наприклад, було 6 різних миль – від 7,5 од 9 кілометрів завдовжки. Російська миля становила 7 верст і дорівнювала 7,5 кілометра.

Існують милі і нині. Правда, відстані на суші, у повітрі і в космічному просторі милями вимірюють тільки в країнах, де користуються англійськими мірами. І тільки в англійських книжках можна прочитати, що довжина земного екватора 24900 миль, а відстань від Землі до Місяця 239000 миль. Розмір такої милі – 1,6 кілометра, і називається вони статуткою.

Статутна миля застосовується лише в країнах, де користуються англійською системою мір. Проте є ще одна миля – морська, спільна для всіх країн. Будь-який корабель, хоч би під яким прапором він плавав, за кормою лишає не кілометри простору, а милі. Морська миля дорівнює 1,85 кілометра.

Тому інші назва її – четверть.

Сажень – міра довжини. Існувала вона ще в Стародавній Греції. Як сажень ця міра відома близько 900 років. Її розмір пов’язаний з людиною: сажень – це розмах рук.

У нашій країні давно ніхто нічого не вимірює сажнями, крім моряків, які й досі користуються морським чи англійським сажнем завдовжки 183 сантиметри. Англійський сажень, на відміну від російського, вміщує на 7, а 6 футів. На американських і англійських картах, у таких одиницях вказані глибини морів і океанів. (Сажень дорівнює 213 сантиметрам 3,6 міліметра. Сажень дорівнює 3 аршинам. Сажень дорівнює 7 футам.).

Фут – міра довжини, якою користуються вже тисячі років. Походить вона від англійського слова foot – „ступня”, тобто фут – це довжина ступні людини.

У різних країнах існують різні фути – від 28 до 33 сантиметрів, але най головніший фут – англійський, що дорівнює 30,48 сантиметра. Такої самої величини був і російський фут, котрий існував до переходу нашої країни на метричну систему мір.

Поряд з необхідністю рахувати предмети у людей древніх часів з’явилася потреба вимірювати довжину, масу, об’єм, площу, час та інші величини. Результати вимірювання не завжди вдавалося визначити *натуральним числом*, а приходилося враховувати *частини* визначеної міри. Це стало причиною появи дробів.

Крім необхідності подрібнення цілого на частини, появу дробів обумовлювали також потреби вимірювання. Коли одиниця вимірювання не вкладалася ціле число разів у величині, що вимірюється, то цю одиницю ділили на декілька рівних частин, отримуючи при цьому нову меншу одиницю вимірювання.

Спочатку це були конкретні дроби, частини відомих одиниць. Так, наприклад, у Киїівській Русі „чверть” „осьмина” тривалий час були частинами більш крупних мір та означали конкретні дроби. З часом відбувся перехід від *конкретних* до *загальних (абстрактних)* дробів, не пов’язаних з визначеними мірами.

Першим дробом, який почали використовувати люди, напевно, був дріб ½, що характеризував половину мисливської здобичі, половину деякої міри зерна, половину певної відстані тощо. За дробом $\frac{1}{2}$ з’явились дроби $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$ і так далі, пов’язані з поділом на дві рівні частини половини, а потім четвертини і т.д. Такі дроби називають двійковими [22, с. 157].

Деякі народи у давнину, наприклад египтяне, їх називали основними або одиничними, оскільки чисельник завжди дорівнював одиниці [10, с. 30; 11, с. 26]. (Дроби єгиптян у давні часи представлено на рис. 1)

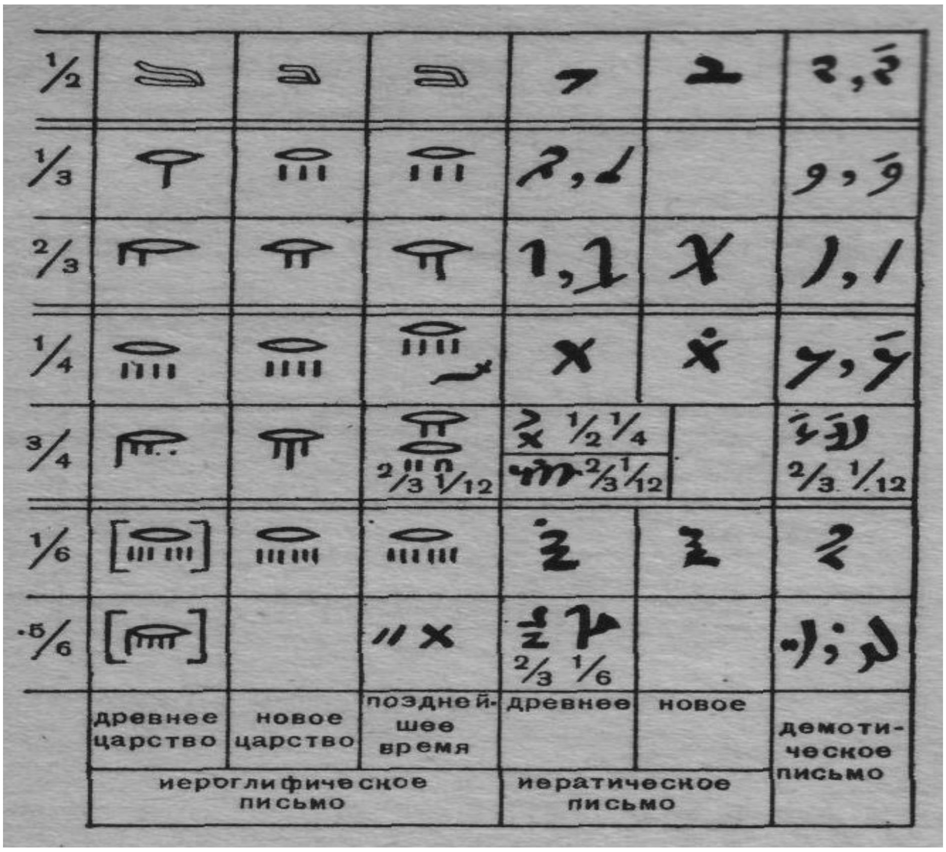


Рис. 1. Запис дробів у Єгипті.

У Стародавньому Вавілоні використовували шістдесяткові дроби (у знаменнику завжди було число 60 або його ступінь), з якими пов’язані до нашого часу вимірювання часу та кутів. Отже, теперішній поділ години на 60 хвилин, хвилини – на 60 секунд; кола на 360 градусів, градуса на 60 хвилин, хвилини на 60 секунд має доволі давню історію. Цікаво, що шістдесятковими дробами вавілонян користувалися у багатьох науках, особливо в астрономії, що й дало іншу назву цим дробам – *астрономічні*. З часом їх стали називати також *звичайними* [10, с. 35].

Отже, можна стверджувати, що шістдесяткова система числення виникла раніше, ніж десяткова та дістала свого подальшого використання, в тому числі – до наших днів.

Давні римляне користувалися здебільшого конкретними дробами. Основною одиницею вимірювання маси та грошовою одиницею у них був *асс,* який поділявся на 12 рівних частин – *унцій.* З часом унції стали використовуватися для вимірювання будь-яких величин. Так виникли римські дванадцятирічні дроби (тобто, дроби із знаменником 12), що, в свою чергу, стало основою для виникнення дванадцятирічної системи числення. Замість дробів: $\frac{1}{12}$ римляне говорили „унція”; $\frac{5}{12}$ – „п’ять унцій” тощо. Три унції називали чвертю, чотири унції – третю, шість унцій – половиною [10, с. 30; 11, с. 25]. (Старовинні записи чисел із дробами представлено у дод. А).

У давній та Київській Русі дроби називали частинами, а пізніше – „ламаними числами”. Найпоширенішими серед них були [2, с. 157; 10, с. 43; 11, с. 34]:

$\frac{1}{2}$ –половина, полтинник	$\frac{1}{3}$ – треть
$\frac{1}{4}$ – четь	$\frac{1}{16}$ – півтреть
$\frac{1}{8}$ – півчеть	$\frac{1}{12}$ – півпівтреть
$\frac{1}{5}$ – п’ятина	$\frac{1}{10}$ – десятина

Важливо, щоб вчитель початкових класів (так само, як і середніх класів) загальноосвітньої школи розумів принципову *відмінність* між поняттями „дріб” і „дробове число”.

Дріб – це лише форма, символ для запису числа як дробового, так і цілого. Наприклад, дробове число $\frac{1}{2}$ можна записати не тільки у формі звичайного дробу, а й за допомогою десяткового дробу (0,5) або процентів (50%). Для учнів початкової школи та 5-6 класів загальноосвітньої школи, з дидактичних міркувань, для скорочення математичної мови терміни „дріб" і „дробове число" часто вживаються як синоніми.

Отже, історично, виникнення дробів пов'язано спочатку із поділом конкретних величин (здобичі, грошових одиниць, величин маси, довжини (відстані) тощо), а пізніше – й загальних (абстрактних) дробів, не пов'язаних з визначеними мірами.

РОЗДІЛ 2
ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ „ДРОБИ” У ПОЧАТКОВИХ КЛАСАХ СЕРЕДНЬОЇ ЗАГАЛЬНООСВІТНЬОЇ ШКОЛИ

2.1. Особливості вивчення величин у початковій школі

З величинами учні знайомляться протягом всього періоду навчання в початковій школі, починаючи з концентру "Десяток".

У початкових класах розглядають як скалярні величини (довжина, площа, маса, місткість, час, вартість, ціна тощо), так і векторну (швидкість).

Вивчення величин - це один із засобів зв'язку навчання математики з життям. Ознайомлення учнів з величинами та одиницями їх вимірювання і формування відповідних умінь та навичок проходить в тісному зв'язку з формуванням поняття натурального числа, з формуванням поняття геометричної фігури. Вивчення величин і одиниць їх вимірювання треба організувати так, щоб діти набули деяких практичних навичок вимірювання величин, конкретно уявляли одиниці їх вимірювання та співвідношення між ними.

Учні повинні засвоїти таке: при розв'язанні задач або в практичній діяльності доводиться вимірювати довжину, площу, відлічувати час, розв'язувати задачі на швидкість, обчислення вартості та інше.

Величини мають певні <u>властивості</u>.

Будь-які дві величини одного роду, або рівні, або одна менша від іншої, чи більша. Величини одного роду можна додавати, в результаті чого дістаємо величину того самого роду. Величини одного роду можна віднімати, множити на число, ділити на число, ділити значення однієї величини на інше.

Учнів слід переконати в тому, що при множенні величини на число дістанемо величину того самого виду: $5\ м^2 * 3 = 15\ м^2$

Множення значень двох однорідних величин допускається в тому випадку, якщо з неї утворюється похідна величина: $5м * 3м = 15м^2$

Порівнюючи величини безпосередньо, можна дізнатися рівні вони чи ні. Щоб отримати більш точний результат порівняння, величини слід виміряти. Вимірювання полягає в тому, щоб порівняти дану величину з деякою величиною, яка прийнята за одиницю вимірювання.

У методиці доцільно виділити три етапи оволодіння основними вимірювальними знаннями, вміннями і навичками. Під час вивчення вимірювання довжин ці етапи такі:

1) вимірювання довжини відрізка за допомогою набору моделей сантиметра;

2) масштабною лінійкою без цифрової школи;

3) масштабною лінійкою з цифровою шкалою.

Ще в до числовий період у шестиліток формують уявлення про протяжність у різних напрямках. У зв'язку з цим ними засвоюються поняття „довший", „коротший", „однаковий за довжиною", „вищий", „нижчий", „однаковий за висотою", „ширший", „вужчий", „однаковий за шириною", „товщий", „тонший", „однаковий за товщиною".

В концентрі „Десяток" ці уявлення узагальнюються і об'єднуються терміном „довжина" та введенням міри для визначення довжини. Спочатку пропонуються учням лабораторні завдання на вимірювання довжини смужок за допомогою інших смужок, які грають роль мірок. При цьому демонструються прийоми вкладання, відкладання, накладання.

В концентрі „Десяток" спочатку розглядають смужки довільної довжини, які вибирають за мірки і ілюструють прийоми вимірювання довжини.

На наступному етапі „міркою" вибирають смужку довжиною 1 см і за довжиною цієї смужки вимірюють певні смужки. Прийом вкладання полягає в тому, що модель «1 см» послідовно вкладають у вимірювальну смужку.

В концентрі „Другий десяток” розглядається нова міра довжини — дециметр, яку вводять на основі співвідношення 10 см = 1 дм, спираючись на аналогію між співвідношеннями лічильних одиниць: 10 одиниць = 1 десяток.

При цьому показують модель дм окремо і на лінійці. Первинні закріплення проводять за завданнями підручника. Учні розглядають моделі 1 см і 1 дм, визначають довжини відрізків, які поділено на сантиметри.
Розглядаються вправи й такого типу:

1) роздроблення іменованих чисел, виражених дм і см:1 дм 3 см = 13 см;

2) перетворення іменованих чисел: 15см = 1 дм 5 см.

У концентрі „Сотня” відбувається ознайомлення з метром, яке проводять за таким планом: бесіда вчителя, за допомогою якої він підводить учнів до висновку, що великі відстані краще вимірювати більшими одиницями мір; показування демонстраційного метра для безпосереднього зорового сприймання; повідомлення співвідношень: 1м = 100см, 1м = 10дм; розгляд моделей метра, виготовлених з різних матеріалів; самостійне виготовлення дітьми метра з паперових смужок; вправи на вимірювання.

Вправи на вимірювання бувають двоякого роду; вимірювання відстані між двома пунктами (точками), наприклад, довжини та висоти класу, довжини шнурка тощо; вимірювання відстаней, що дорівнюють даному числу метрів (наприклад, відміряти три метри ниток).

У концентрі „Тисяча” вводяться нові одиниці вимірювання довжини (мм, км), буквене позначення відрізків. Відрізки широко використовують для розгляду понять збільшення і зменшення числа в кілька разі, кратного порівняння чисел тощо. У даному концентрі розглядаються різні вправи на роздроблення, перетворення, порівняння, дії над мірами довжини.

В концентрі „Багатоцифрові числа” передбачається узагальнення раніше набутих знань, умінь і навичок вимірювання довжини, складається таблиця одиниць вимірювання довжини.

Під час виконання практичних завдань, розв’язування задач, обчислення виразів виконують операції роздроблення, перетворення іменованих чисел, виражених мірами довжини на 4 арифметичні дії над ними.

Розглянемо дані вправи.

1. Роздроблення іменованих чисел : 5 км 735 м =

Зразок міркування: кожний км містить 1000 м. Отже, 5 км — це 5000 м та 735 м разом 5735 м. Отже, 5 км 735 м = 5735 м

2. Перетворення іменованих чисел – дані вправи обернені до попередніх.

5735 м = км м

Зразок міркування: кожен км становить 1000 м, а тому кількість тисяч в даному числі означає км. Інші числа розрядів сотень, десятків і одиниць позначають метри – 735м. (5735 м = 5 км 735 м).

3. Арифметичні дії над складеними іменованими числами, вираженими мірами довжини.

Над іменованими числами слід розрізняти дії над простими іменованими числами: 8 см + 7 см = 15 см = 1 дм 5 см;

та складеними: 3см 2 мм + 5см 9 мм = 32 мм + 59 мм = 91 мм = 9 см 1 мм

Більшу трудність у дітей викликають дії над складеними арифметичними діями, тому розглянемо дане питання конкретніше.

Додавання та віднімання складених іменованих чисел, виражених мірами довжини, проводиться двома способами.

Множення іменованого числа на число виконують єдиним способом: роздроблюють складене іменоване число і одержують просте іменоване число, в наслідок чого зводять дію множення до множення натуральних чисел.

Ділення іменованих чисел, виражених мірами довжини є два види:

1) ділення іменованих чисел на натуральне, яке має зміст ділення на рівні частини; ділення виконується єдиним способом – іменоване число роздроблюють і виконують ділення натуральних чисел:

2) ділення іменованого числа на іменоване, що має характер дії ділення на вміщення; дана дія виконується аналогічним способом до попередньої дії:

Оволодіння технікою виконання арифметичних дій над іменованими числами забезпечує результативність при виконанні різних математичних завдань.

2.2. Ознайомлення з частинами у 3 класі початкової школи

Пропедевтикою до вивчення дробів у 4 класі є ознайомлення учнів з частинами та їх записом у 3 класі. Зрозуміло, що спираючись на життєвий досвід учнів початкової школи, вчитель надає йому систематизованого вигляду. За таких умов при вивченні теми за програмою 4-го класу школярами припускатиметься менша кількість помилок.

Завданнями вивчення теми „Частини” у третьому класі середньої загальноосвітньої школи є:

- ознайомлення учнів з утворенням частин та їх записом;
- усвідомлення зв’язку між назвою частини і тим, на скільки рівних частин

було поділене ціле;

- знаходження частини від числа і числа за його частиною;
- порівнювання частин.

Отже, ознайомити учнів з частинами – сформувати в них конкретні уявлення про частини, тобто утворювати частини практично. Для виконання таких завдань потрібно використовувати достатню кількість наочних посібників, зразків для фронтальної роботи чи пояснення вчителя (здебільшого об'ємних – для поділу навпіл або іншу кількість рівних частин яблука, хлібини тощо), а також моделей геометричних фігур (круги, прямокутники, трикутники, бруски, відрізки, смужки тощо), які повинні бути не тільки у вчителя, а й в кожного з учнів. Правильні уявлення про частки, а пізніше про дроби будуть сформовані тоді, коли учні своїми руками діставатимуть, наприклад, половину круга, квадрата, чверть відрізка тощо.

Адже виконання практичних вправ з предметами узгоджуються з постулатом **народної педагогіки**: *ґрунтовно та усвідомлено засвоюється лише той навчальний матеріал, який став предметом активних дій.*

Покажемо, для прикладу, як сформувати в дітей чіткі уявлення про половину та ознайомити їх із записом відповідного дробу. Вчитель пропонує школярам взяти в руки два однакові круги та перевірити, чи рівні вони. Для цього один круг накладають на інший. Після висновку про рівність кругів, один з них ділять навпіл (на дві рівні частини) при цьому вчитель показує, як потрібно перегнути та розрізати круг. Тепер пропонується перевірити накладанням рівність двох частин одного круга.

Після цього вчитель пропонує взяти в руки цілий круг і одну з двох частин. Демонструє на фронтальному наочному посібнику цілий круг й одну з частин та ознайомлює учнів з її назвою – *половина.* Потім ставить перед дітьми завдання показати половину смужки. Учні виконують завдання та пояснюють, як утворили половину смужки. Після цього вчитель ознайомлює школярів із ще однією назвою половини – «*одна друга*».

При *першому* ознайомленні з частинами доцільно використовувати таку наочність, щоб частина не тільки за величиною, а й за формою відрізнялася від цілого.

Вчитель ставить завдання показати половину кружечка, половину смужки паперу, запитує, хто бачив половину кавуна, хліба тощо. Перегинаючи смужку паперу чи кружечок навпіл, діти роблять висновок, що половини одного й того ж кружечка чи тієї самої смужки паперу рівні.

Для висновку, бажано задавати такі запитання:

- Як порівняти між собою половини круга? (Порівнюємо накладанням половинок круга).
- Які вони будуть між собою? (Вони між собою рівні).
- Що менше: половина вашого кружечка чи цілий кружечок, який ви розрізали навпіл? (Менше половина; цілий круг більше) тощо.

Далі за пропозицією вчителя два учні перегинають, а потім розрізують половини демонстраційного круга навпіл та з'ясовують, на скільки всього частин розрізали круг? Порівняйте, які вони по величині між собою? Як будемо називати одну таку частину цілого круга? (Одна четверта, або чверть). А скільки четвертих частин в одному цілому крузі? А чому ми назвали одну частину круга четвертою частиною? Що менше: одна друга чи одна четверта круга? Як можна назвати кожну частину круга, якщо його поділимо: на 4 рівні частини? на 8 рівних частин? на 6 рівних частин? на 10 рівних частин?

Наше завдання довести на цьому уроці до свідомості дітей *зв'язок* між *назвами частин* і *тим, на скільки рівних частин поділили ціле* (якщо ціле поділили на 2 рівні частини, то кожна така частина – одна друга, якщо на чотири, – одна четверта і т. д.). Потім учні знаходять половину накресленого на дошці і виміряного відрізка. Креслять у зошитах квадрат із стороною, наприклад, 4 см. Ділять його на 4 рівні частини так, щоб було 4 квадрати. Зафарбовують червоним олівцем четверту частину великого квадрата і ділять її навпіл. Відповідають на запитання вчителя: які фігури утворилися? Скільки таких фігур у всьому великому квадраті?

Важливим пропедевтичним завданням до підготовки виконання арифметичних дій з дробами у старшій школі є завдання, яке доцільно використовувати на основі будь-якої наочності, поділеної на певну кількість рівних частин: у цілій величині знаходити дві половини, три третини, чотири четвертих частини тощо. Такі вправи допоможуть у наступних класах школярам вірно обчислювати приклади з дробами виду: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$; $\frac{4}{4}=1$ тощо.

Аналогічну роботу проводять при ознайомленні з третиною і четвертиною. Під час ознайомлення з четвертиною важливо звернути увагу учнів на те, що її отримують не тільки при діленні цілого на чотири рівні частини, а й при діленні половинок навпіл.

Потрібно звернути увагу вчителів на вживання учнями відомих для них понять та їх використання на уроках математики, починаючи з першого класу. Наприклад, «половина хлібини (капустини, відра води тощо)», «третя частина коробки цукерок», «чверть доби», «п’ята частина тканини» тощо.

На основі практичного виконання завдань з фігурами (вимірювання, креслення, поділ на частини, перегинання тощо) учні отримують нові знання про способи утворення дробів, їм повідомляються нові назви дробу та способи його запису (половина, одна друга, $\frac{1}{2}$); значення чисел, за допомогою яких даний дріб записано (чисельник, знаменник).

Бажано, щоб слова «половина», «третина», «четверта частина (чверть)» тощо звучали з вуст вчителя, починаючи з першого та у наступних класах (при вивченні відповідних табличних випадків ділення на 2, 3, 4 рівних частин тощо; при вивченні величин (часу, довжини, маси: півроку, півкілограма, половина відрізка тощо).

Підтвердження нашого підходу знаходимо у підручнику з математики для 3 класу Л.П.Кочиної, Н.П.Листопад [18, с. 41, 51-52, 56, 61-62, 67, 71 тощо].

Формування правильних уявлень учнів про частини (3 клас) неможливе без виконання ними практичних дій з геометричними фігурами, смужками паперу, реальними предметами. Для цього потрібно взяти декілька однакових різнокольорових кругів, квадратів, смужок тощо. Рівні частини можна отримувати за допомогою перегинання на наклеювання однієї з частин. При виконанні таких завдань потрібно розглядати декілька варіантів їх виконання. Наприклад, $\frac{1}{2}$ частину прямокутника або квадрата можна знайти так: (див. рис. 2).

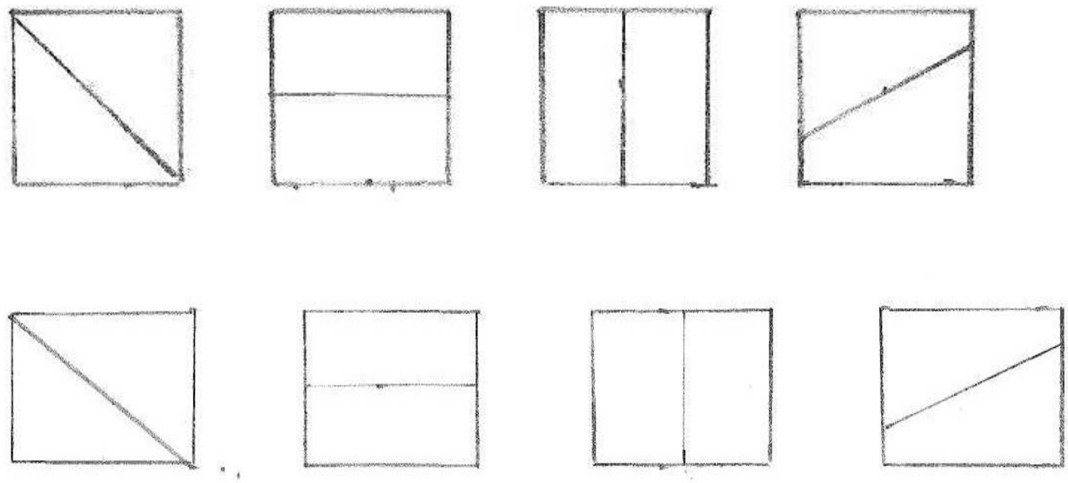


Рис. 2.

Перегинаючи круг (прямокутник, квадрат, смужку паперу, стрічку) школярі повинні зробити висновок, що отримані половини рівні між собою (див. рис. 3).

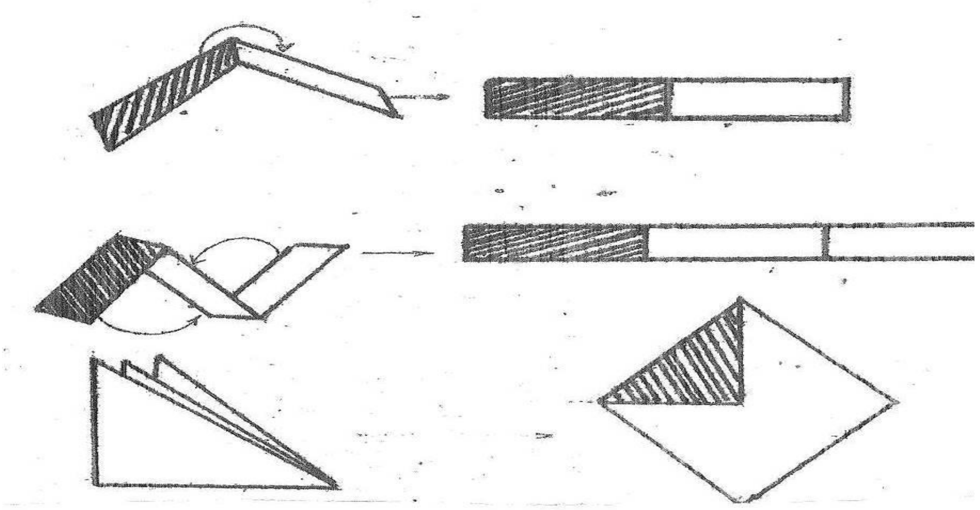


Рис. 3.

З метою *активізації навчальної діяльності учнів* можна запропонувати також невірні варіанти розв’язання (рис. 4), аналіз яких дозволить підвести учнів до важливого **висновку**: частки можуть бути однакові, а частини – нерівні.

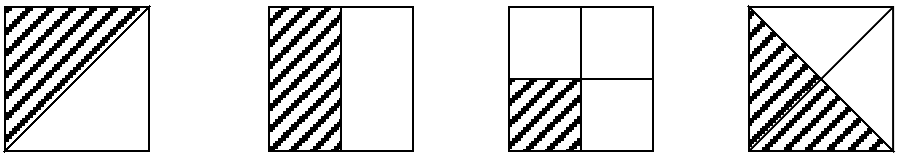


Рис. 4.

Для того, щоб визначити дві або декілька рівних частин, часто використовують такі слова та словосполучення: «навпіл», ,»поділили порівну».

Для *порівняння* різних частин смужок можна запропонувати учням вправу з однаковими за довжиною, але різними за кольорами стрічками. Наприклад, довжина обох стрічок (червоної та зеленої) по 12 см. Відомо, що червону було поділено навпіл, а зелену – на три рівні частини. Учням потрібно дізнатися, частина смужки якого кольору довша (або відповідно – коротша).

Школярі шляхом згинання (перерізання) та накладання (прикладання) порівнюють отримані частини і роблять висновок, що половина смужки (червона) довша, ніж третина (зелена). Свій висновок вони також можуть перевірити вимірюванням довжини кожної з отриманих частин смужок за допомогою лінійки.

Важливим наступним етапом є *запис і читання частин*. Оскільки у 3-му класі учні вчаться позначати частини цифрами, тобто по суті ознайомлюються з дробами без введення термінів «чисельник» і «знаменник», то основну увагу при опануванні нового матеріалу потрібно звернути на правильний вибір чисел, які будуть записані під та над рискою (див. [5, с. 142, №№ 981-984; 8, с. 51-52 № 62-67, с. 56 № 89, с. 61 № 118-121] тощо).

Вчитель пояснює, що частини записують за допомогою двох чисел. Половина круга позначається $\frac{1}{2}$. У зошитах з математики учні записують частини у вигляді дробів, чисельник (число над горизонтальною рискою у клітинці) дорівнює одиниці, а знаменник (число під рискою) дорівнює числу, на скільки рівних частин було поділене ціле.

Після практичного ділення геометричних фігур на рівні частини учні записують позначення цих частин у зошитах. Вважаємо, що для кращого засвоєння теми бажано використовувати практичні вправи з наочністю у зошитах. Саме тому ми пропонуємо школярам крім фронтальної та індивідуальної (або парної) роботи з наборами геометричних фігур (кругів, прямокутників, квадратів, смужок) такі завдання у зошитах.

Розглянемо такий приклад. За допомогою циркуля накреслити круг із заданим радіусом, поділити його на певну кількість рівних частин, зафарбувати одну з них та записати отриману частину під кругом. Якщо поділ круга на 2 та 4 частини у дітей не викликає утруднень, то його поділ на 3 і 6 рівних частин не завжди є вірним. На допомогу повинен прийти вчитель з підказкою властивості радіусу (конкретне положення циркуля) для поділу круга на 6 рівних частин, відповідно, щоб отримати 3 рівні частини круга, потрібно об’єднати по 2 шості частини (див. рис. 5).

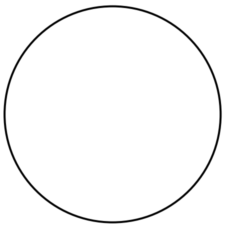


Рис. 5.

Після практичного ділення геометричних фігур на рівні частини школярам пропонується записати отримані частини у вигляді дробу. При цьому учні повинні запам’ятати, що для отримання третьої (п’ятої, сьомої тощо) частини круга (прямокутника, смужки, відрізка) потрібно цей круг (прямокутник, смужку, відрізок) поділити на три (п’ять, сім тощо) рівні частини та взяти одну з них.

Учитель показує, як треба посередині між двома клітинками провести спочатку горизонтальну риску, у верхній клітинці над рискою написати цифру

1, а в нижній – під рискою цифру 2 (у другому крузі – 4, у третьому – 3, у четвертому – 6). Число, записане під рискою, показує, на скільки рівних частин поділено ціле, а число 1, написане над рискою, показує, що взяли таку одну частину. (Оскільки пізніше вивчатимуться дроби із чисельником більше 1, наприклад $\frac{3}{5}$, то учні знатимуть про важливість значення числа вгорі та внизу).

Під час виконання таких завдань учні переконуються, що *однакові* числа «*під*» і «*над*» рискою у записі дробу показують *ціле*. Наприклад, будь-який предмет поділили на 3 частини і взяли всі три частини, то отримали знову ціле. Даний висновок вважаємо важливим, оскільки він дозволить школярам легко складати ціле з двох половинок, трьох третинок тощо та вірно утворювати рівності виду $\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{5}{5}=1$. Надалі, учні розумітимуть, що у цілому завжди знаходяться дві половини, три треті частини, чотири четвертих тощо.

Для закріплення цих знань і умінь учням пропонують різні вправи. Це насамперед вправи на називання і записування частин (рис. 6). Наприклад: «Назвіть і запишіть, яку частину квадрата (круга) відрізано (зафарбовано, заштриховано)».

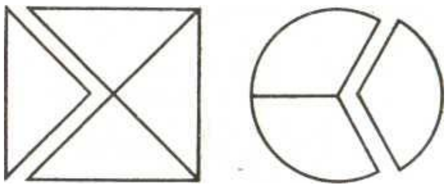


Рис. 6.

Можна запропонувати самим дітям зобразити яку-небудь частину відрізка (круга, квадрата і т. д.) і записати цю частину.

Бажано у кожному випадку записувати, скільки всього частин у цілому. Наприклад, скільки четвертих часток круга у цілому крузі? Скільки третіх часток відрізка в усьому відрізку? Тощо.

Ефективною вправою для формування уявлень про частини є практичне порівняння частин тієї самої величини за допомогою наочних посібників.

Наприклад, пропонують порівняти $\frac{1}{3}$ та $\frac{1}{2}$ частини шляхом ділення одного й того ж відрізка на 2 та 3 рівні частини (див. рис. 7).

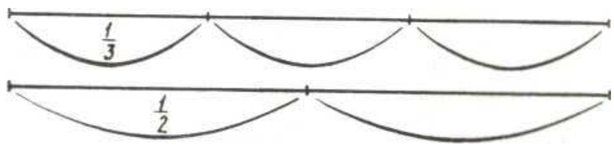
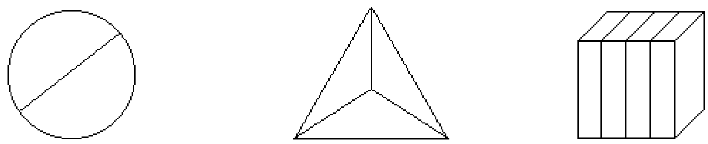


Рис. 7.

Порівнюючи, переконуються, що $\frac{1}{3}$ менше, ніж $\frac{1}{2}$ і навпаки: $\frac{1}{2}$ більша, ніж $\frac{1}{3}$.

Після усвідомлення поняття про частину одиниці, учні лічать частинами одиниці. Використовуючи дидактичний матеріал, вони лічать: перша, друга половина (круга); перша, друга, третя третина (стрічки) тощо. У процесі такої лічби учні з’ясовують, що цілу одиницю (круг, стрічку, смужку паперу тощо) можна представити двома половинами, трьома третіми частинами, чотирма четвертими і т. д.

Отже, дітям вже у третьому класі можна запропонувати з опорою на наочність рівності виду (див. рис. 8).



$\frac{2}{2}=1$ $\frac{3}{3}=1$ $\frac{4}{4}=1$

Рис. 8.

Крім того, виконання практичних завдань з декількома однаковими геометричними фігурами, поділеними на різну кількість рівних частин, допоможе школярам виконувати прості арифметичні дії з частинами. Наприклад, було подане таке завдання. Накреслити два однакових прямокутники (з довжиною 4 см, шириною 2 см). Один потрібно поділити навпіл, а другий – на чотири рівні частини. Не обмежуючи учнів одним варіантом виконання такого завдання: можливі варіанти поділу потрібно після виконання завдання обговорити, тоді вони прийдуть до важливого висновку: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. Крім того, за допомогою наочності можливо здійснити порівняння частин: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$.

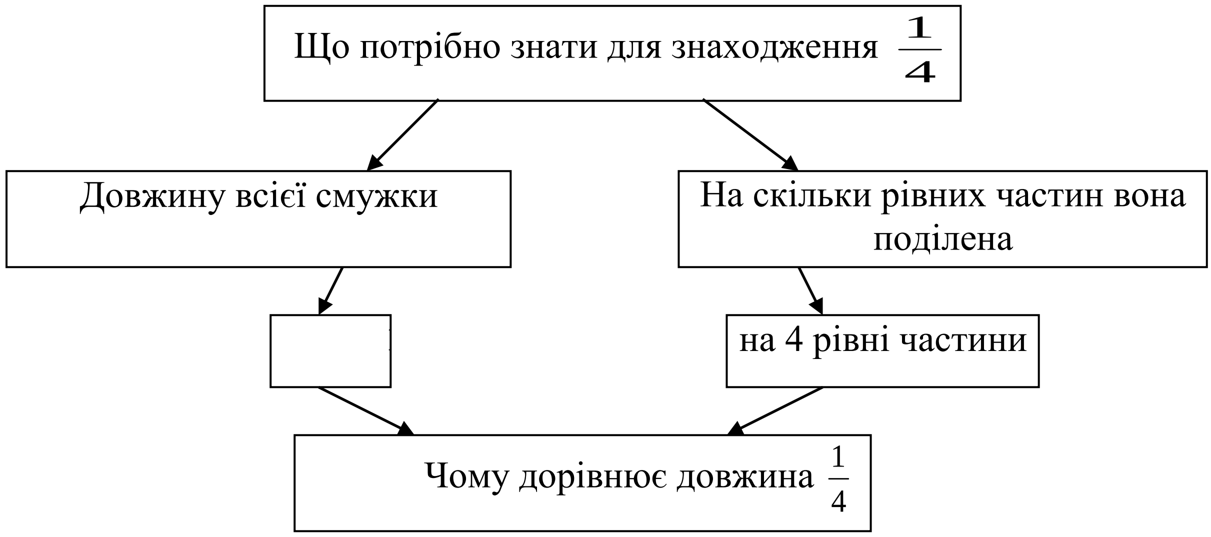
На закріплення завдань на знаходження однієї частини від числа вчитель пропонує розв’язання простих і складених задач. Для учнів третього класу у підручнику М. Богдановича [5] є текстові задачі, в яких використовуються назви частин. Наприклад:

1) № 355, с. 55: Доба має 24 години. Доросла людина повинна спати третину доби, а дитина – на 2 години більше. Скільки годин повинна спати дитина?

2) № 829, с. 123: У квітковий магазин завезли 100 гладіолусів. П’яту частину становили білі гладіолуси, а решту – червоні. Скільки червоних гладіолусів завезли в магазин тощо.

Розв’язування задач на обчислення частин базується на розумінні учнів самого процесу знаходження даної частини числа. Так, для знаходження $\frac{1}{4}$ смужки треба її довжину поділити на 4 рівні частини; для знаходження половини (другої) частини числа його ділять навпіл (на 2), а для знаходження п’ятої частини числа його ділять на 5 тощо.

Для виконання завдання на знаходження $\frac{1}{4}$ частини смужки схему аналізу задачі можна представити таким чином:



Аналогічні завдання можна пропонувати учням, абстрагуючись від наочності. Так, при проведенні усних обчислень, доцільним є виконання вправ на знаходження половини чисел (20, 44, 96 тощо); третини чисел (15, 60, 96 тощо); четвертинок чисел (20, 44, 96). Подане завдання можна ускладнювати, вибірково порівнюючи отримані різні частини одного числа.

Оскільки при вивченні одиниць вимірювання довжини використовуються поняття частини, наприклад, дм складає десяту частина метра, то вважаємо за доцільне виконання завдань виду:

1) скільки хвилин у половині (третині, одній шостій частині) години? Скільки годин у половині (третині, чверті) доби? тощо;

2) знайдіть половину 1 см; п'яту частину 1 м; шосту частину 3 дм тощо.

Зауважимо, що такі завдання достатньо представлені у традиційних підручниках з математики для початкової школи [5; 18].

Завдання на порівняння частин смужок запропоновано у підручнику М.В.Богдановича. Математика. 3 клас. Наприклад, [5, с. 54, № 354]. Виміряй довжину кожної смужки, а потім знайди довжину четвертої частини першої смужки і довжину шостої частини другої. Результати обчислення перевір вимірюванням. Це завдання учні виконують без запису дробів (рис. 9).

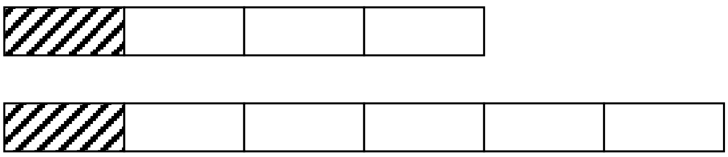


Рис. 9.

Після задач геометричного змісту пропонуються текстові задачі, в яких використовуються поняття «частина числа» [там само, с. 149-150, №№ 1033-1034, 1036].

У розділі «Повторення вивченого за рік» також запропоновані такі завдання та текстові задачі [5, с. 152 № 1048, с. 154 № 1072. с. 156 №№ 1082, 1090, с. 157 №№ 1092, 1100; 8, с. 124 №№ 213-214, 218; с. 141 №№ 10-12, 18, с. 163 № 35 (2), с. 174 № 95].

Отже, після виконання різних вправ можна перейти до розв’язування життєвих задач на знаходження однієї частини.

Для прикладу розглянемо задачу № 1036 [5, с. 150], в якій подано умову, її розв’язання та запропоновано завдання: «Поясни, про що дізналися кожною дією».

Бабуся хотіла законсервувати 10 банок вишневого компоту, а законсервувала на п’яту частину більше, ніж планувала. Скільки банок вишневого компоту вийшло?

Розв’язання

1) 10 : 5 = 2 (б.);

2) 10 + 2 = 12 (б.)

Відповідь: 12 банок.

Учні усно дають пояснення, що при виконанні першої дії було знайдено, на скільки більше банок законсервувала бабуся, ніж планувала, а у другій – скільки всього банок компоту вона заготовила.

Розв’язування задач ***на знаходження частини числа і числа за його частиною*** також сприяє формуванню уявлень про частини величини. У цьому їх основне призначення. Тому задачі на знаходження частини числа і числа за його частиною розв’язують на наочній основі.

Розглянемо, як можна ознайомити учнів з розв’язуванням задач кожного виду. Спочатку вводять *задачі на знаходження частини числа*. Для ознайомлення з розв’язуванням задач краще пропонувати задачі, які легко ілюструвати. Наприклад, пропонують задачу: «Від смужки довжиною 15 см відрізали $\frac{1}{3}$ її. Чому дорівнює довжина відрізаної смужки?»

Учні креслять відрізок довжиною 15 см у зошитах. Потім з’ясовують, як знайти одну третю частину (поділити на 3 рівні частини і взяти з них одну). Розв’язання записують так: 15 : 3 = 5 (см).

Відповідь: 5 см.

Задачі на знаходження числа за його частиною даються школярам трохи важче, ніж задачі на знаходження частини від числа. Саме тому найбільш оптимальним вважаємо використання методу порівняння цих двох видів задач та використання наочності для конкретизації їх умов.

Наприклад, подано таку задачу : «Відрізок АВ становить $\frac{1}{3}$ частину відрізка АС і дорівнює 2 см. Знайдіть довжину відрізка АС». Для виконання завдання учням можна запропонувати такий схематичний малюнок, який супроводжується запитаннями вчителя (див. рис. 10):

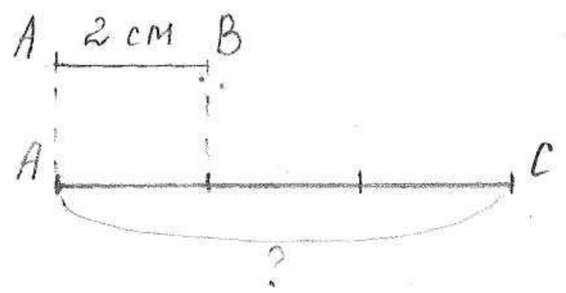


Рис. 10.

- Яку частину відрізка АС становить відрізок АВ?
- Скільки таких третіх частин вміщується у відрізку АС?
- Яка довжина третьої частини?
- Як знайти довжину всього відрізка?

За допомогою такої наочності та запитань учителя учні легко зможуть знайти правильне розв’язання задачі: 2 · 3 = 6 (см).

Доцільним є розв’язання аналогічних декількох задач, при цьому намагаючись наочно показати тільки відомий компонент з умови (довжину конкретної частини), не виконуючи креслення для унаочнення загальної величини.

На основі запитань вчителя («Із скількох частин складається ціле, якщо відомо, що це – третя (четверта, п’ята тощо) частина?») діти повинні з’ясувати, що для знаходження числа за його частиною потрібно подану величину (частину) помножити на їх кількість.

За підручником з математики Л. Кочиної, Н. Листопад у 3 класі текстові задачі із частинами зустрічаються протягом вивчення тем: «Множення двох і ділення на 2 (узагальнення). Половина»; «Множення трьох і ділення на 3 (узагальнення). Третина»; «Множення чотирьох і ділення на 4 (узагальнення). Четвертина» та після їх вивчення у розділах «Поміркуємо. Задачі-розрахунки» (див. [18, с. 61, с. 90, 92] тощо).

При розв'язуванні задач на знаходження частини від числа автор пропонує школярам правило: «Задачі **на знаходження частини від числа** розв'язують дією ділення» [18, с. 88].

Задачі на знаходження числа за його частиною автори пропонують на основі порівняння двох видів задач (там само, № 33]):

1. У книжці 18 сторінок. Тарас прочитав $\frac{1}{3}$ книжки. Скільки сторінок прочитав Тарас?
2. Тарас прочитав третю частину книжки, що становить 6 сторінок. Скільки сторінок у цій книжці?

Після міркування та розв'язування другої задачі, учні їх порівнюють та приходять до висновку, що друга задача іншого виду. Автори пропонують наступне правило: «Це задача **на знаходження числа за його частиною**. Її розв'язують дією множення» [18, с. 92].

Отже, задачі на знаходження числа за його частиною і задачі на знаходження частини числа вводять по черзі і пропонують як для усного, так і для письмового розв'язування, а потім – як взаємо обернені задачі пропонуються одночасно.

Зазначимо, що краще спочатку розв'язувати задачі з конкретним змістом, а не з абстрактними числами (щоб учні конкретно уявляли частину величини (одну третину відра води, чверть кошика яблук, одну п'яту частину сувою тканини, одну соту частину метра тощо), а згодом – перейти до розв'язування задач з числами.

Важливою, на наш погляд, є також послідовність введення задач даних видів: у III класі розглядають лише прості взаємно обернені задачі на знаходження частини числа та числа за його частиною, а в IV класі ці задачі включають до складених.

2.3. Особливості вивчення дробових чисел у 4 класі

З дробовими числами у формі звичайних дробів учні ознайомлюються у зв'язку з вивченням арифметичних дій множення та ділення у концентрі багатоцифрових чисел у четвертому класі. Вивчення даної теми базується на сформованих раніше уявленнях, а також знаннях, уміннях і навичках, яких вони набули, ознайомлюючись з частинами величини (числа).

Під час формування поняття звичайного дробу, порівняння дробів з однаковими знаменниками варто широко залучати наочність і практичні дії учнів на розбивання відрізків, круга, квадрата, інших об'єктів на рівні частини і позначення за допомогою дробу різних частин цілого, а також пов'язувати вивчення цього матеріалу з метричною системою мір (довжина, площа, час, об'єм, грошові одиниці тощо), що природно показує учням походження дробів з практик вимірювань [31, с.158].

Так, у IV класі вчитель нагадує учням, як записати отриманий дріб, поділивши перегинанням один круг на 4, другий такий самий на 8 рівних частин тощо. Аналогічно, накресливши відрізок в 14 клітинок завдовжки, школярі відокремлюють дужкою (або виділяють кольоровим олівцем) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ цього відрізка та записують отримані дроби.

Терміни «чисельник» і «знаменник» не слід подавати учням на перших порах, а тільки згодом, коли вони добре усвідомлять функцію знаменника і чисельника в позначенні дробу. Разом з записом частин школярі порівнюють різні частини від однієї одиниці: *спочатку практично*, на основі накладання або зорового зіставлення, використовуючи для цього заготовлені круги, смужки паперу, моделі відрізків, прямокутних фігур тощо, а *згодом – на основі* важливого *висновку* про співвідношення між цілою одиницею і частинами її, а саме: коли **ціле поділити на рівні частини,** то **кожна частина буде менша від цього цілого;** третя (восьма, п’ята) частина круга (смужки паперу) в три рази (вісім, п’ять) менша, ніж цілий круг (вся смужка тощо)**; чим на більшу кількість частин** поділено ціле**,** тим кожна частина його **буде менша.** Даний висновок базується на особливостях та взаємозв’язках величин з оберненою пропорційною залежністю.

Для чіткого усвідомлення даного висновку вчитель пропонує поділити перегинанням цілий круг на дві рівні частини, порівняти ці частини (вони рівні): порівняти половину кружечка з цілим (половина менша від цілого); порівняти четверті частини від такого ж самого кружечка (вони всі рівні); порівняти четверту частину з цілим кружечком (вона менша); порівняти четверту частину кружечка з його половиною тощо.

Достатня кількість розв’язання таких вправ сприятиме формуванню чітких уявлень в учнів про дробове число.

Для введення понять «дробові числа», «чисельник», «знаменник» можна обрати такий варіант. Учням пропонується розв’язати задачу: «Мама поділила яблуко між двома сестрами порівну. Яку частину яблука отримала кожна з сестер?». Для обрання школярами правильного розв’язання задачі з усіх запропонованих ними, пропонуємо вчителю використати реальне яблуко та поділити його навпіл, як це вимагала умова задачі. За допомогою запитань, учитель має підвести дітей до називання отриманого результату (половина, одна друга) з відповідними доказами цих назв (ділили навпіл, порівну, з двох однакових частин взяли одну), які і є відповідями задачі.

Для оформлення розв’язання учням можна запропонувати на дошці запис: $1 : 2 = \frac{1}{2}$ (ябл.).

Аналогічно діти розв’язують наступну задачу: «Іванко, Богдан, Тарас, Петро і Микола поділили один пиріг порівну. Яку частину пирога отримав кожний з хлопчиків?».

Після оформлення розв'язання цієї задачі, вчитель повідомляє дітям, що числа виду $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$ тощо називають *дробовими* числами. Наприклад, число $\frac{2}{7}$ – це дріб, в якому знаменник (7) показує на скільки рівних частин поділили предмет, а чисельник (2) – скільки взято таких частин.

Отже, для *первинного закріплення* вчитель обирає вправи на читання дробів і пояснення їх утворення. Для *вторинного закріплення* учням пропонується записувати дроби під диктовку, використовуючи різні варіанти їх читання. Наприклад: «три сьомих», «чисельник дорівнює трьом, а знаменник – семи», «смужку поділили на сім рівних частин і взяли три з них», «знаменник – число сім, а чисельник – три».

Отримані відомості про дроби та їх зображення використовуються під час розв'язування задач двох типів:

1) знаходження дробу числа;

2) знаходження числа за його частиною.

Використання на уроці проблемних ситуацій дозволить вчителеві активізувати навчальну діяльність учнів, результатом якої буде правильне розв'язання висунутих завдань. Так, при виконанні декількох завдань на знаходження дробу відрізка, учні зможуть самостійно дійти **висновку,** що **для знаходження дробу числа (як результату вимірювання довжини відрізка) його спочатку ділять на знаменник, знаходячи відповідно одну частину, а потім множать на чисельник, оскільки він показує, скільки взято таких частин.**

Наприклад, учням було запропоновано накреслити у зошиті відрізок довжиною 9 см та знайти його $\frac{2}{3}$. Спираючись на смислове значення знаменника і чисельника у записі дробу, учні виконують та ілюструють дві операції:

1) знаходження третьої частини відрізка : учні записують першу дію у зошитах: 1) 9 : 3 = 3 (см) – $\frac{1}{3}$ частина ;

2) знаходження довжини $\frac{2}{3}$ відрізка: учні записують другу дію у зошитах: 2) $3 \cdot 2 = 6$ (см) – $\frac{2}{3}$.

Далі пишуть відповідь задачі: 6 см – це $\frac{2}{3}$ від 9 см.

Коли буде відпрацьовано розв'язування задач такого ж типу, їх розв'язання представляють або у дві дії (як наведено вище), або складають вираз, об'єднав обидві операції так: $9 : 3 \cdot 2 = 6$ (см).

При повторенні матеріалу і вивченні письмового множення та ділення у межах 1000 на початку 4 класу учням (за підручником М.В.Богдановича [6]) пропонуються такі завдання:

1. С. 9 № 45. Відрізок АК становить $\frac{1}{3}$ відрізка АВ (рис. 12). АВ = 10 см 8 мм. Знайди довжину відрізка АК.

Рис. 11.

2. С. 10 № 57. У четвертому класі 11 відмінників. Це $\frac{1}{3}$всієї кількості учнів класу. Скільки учнів у четвертому класі?

3. С. 11 № 64. Дівчинка купила книжку за 4 грн. 80 к. Вона витратила $\frac{1}{2}$ грошей, що були в неї. Скільки грошей було у дівчинки?

4. С. 13 № 82. Деревину найкраще склеювати тоді, коли в ній міститься дев'ята частина води. Скільки води міститься в деревині масою 18 кг, готовій до склеювання?

5. С. 15 № 102. Маса сирих цеглин становить 350 кг. Після сушіння та випалювання їх маса зменшилася на п'яту частину. Якою стала маса цеглин після сушіння та випалювання? Тощо.

Отже, у 4-му класі школярам можна пропонувати такі завдання :

1. Яку частину метра становить 1 см; 7 см?

(Оскільки 1 м містить 100 см, то 1 см – це сота частина метра, а 7 см – 7 сотих частин метра (1 см = $\frac{1}{100}$ì ; 7 см = $\frac{7}{100}$ì).

2. Прочитай дроби, назви чисельник та знаменник кожного з них та поясни, що вони означають: $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{6}{6}$; $\frac{4}{9}$ тощо.

Після цього слід повторити алгоритм розв'язування задач на знаходження однієї частини числа, а пізніше – перейти до розв'язування складених задач. Розглянемо такий наприклад:

Учні посадили саджанці – ялинки і берізки. Ялинок було 35, а число берізок становило $\frac{3}{7}$ від числа ялинок. Скільки берізок посадили учні?

Розв'язання:

1) 35 : 7 = 5 (д.) – $\frac{1}{7}$ частина;

2) 5 х 3 = 21 (д.) – берізок посадили учні.

Відповідь. 21 берізку.

Для **порівняння** дробів звичайно використовують ілюстрації з однаковими прямокутниками. Розглянемо більш детально, як дане завдання пропонують виконувати методисти, за таким алгоритмом.

1. Учням пропонують накреслити в зошиті прямокутник, довжина якого 16 см, а ширина 1 см. Це один прямокутник. Запишемо. (У першому прямокутнику учні записують число 1.)
2. Накресліть під першим прямокутником такий самий другий і поділіть його на 2 рівні частини. (Виконують.) Які частини дістали? (Другі, половини.) Скільки других частин у цілому прямокутнику? Підпишіть.
3. Нижче накресліть такий самий прямокутник і поділіть його на 4 рівні частини. Як називається кожна частина? Підпишіть.
4. Накресліть четвертий такий самий прямокутник і поділіть його на 8 рівних частин. Як називаються утворені частини? Скільки восьмих частин у цілому? Підпишіть.

Важливими, на наш погляд, є запитання, які пов'язані з порівнянням та отриманням «різних» частин, на які діти дають відповіді, використовуючи рисунки прямокутників: скільки четвертих частин у цілому прямокутнику? Скільки четвертин частин у половині? Скільки потрібно взяти восьмих частин для отримання половини? Що більше: одна друга чи одна четверта; одна друга чи дві четверті; одна четверта чи три четверті; дві другі чи чотири четверті? Скільки восьмих частин в одній чверті; у половині прямокутника? Що більше: три восьмих чи одна четверта? Якому дробу дорівнює одна друга? Тощо.

Аналогічним способом порівнюють інші дроби, але з іншими ілюстраціями: наприклад, для порівняння дробів із знаменниками 3, 6 і 9 обирають однакові відрізки та ділять їх відповідно на 3, 6 і 9 рівних частин тощо.

Відповіді на всі запитання з порівняння дробів учні початкової школи можуть дати тільки з основою на наочність. Наприклад:

$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5}$ $\quad$ $\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{5}$ $\quad$ $\frac{7}{8} \cdot \frac{7}{10}$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{8}$ $\quad$ $\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10}$ $\quad$ $\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{5}$

Зрозуміло, що у таких завданнях для учнів є „пастка” – використання дробу $\frac{5}{5}$, який означає ціле. В основному, школярі справляються з поданими завданнями добре. Проте завдання самостійно підбирати числа так, щоб рівності та нерівності були вірними (виду $\frac{3}{4} = \frac{*}{8}$; $\frac{5}{10} > \frac{*}{4}$; $\frac{1}{3} < \frac{*}{5}$ тощо), зазвичай, в учнів викликають найбільшу кількість помилок. Це означає, що такі завдання вимагають від вчителя початкової школи проведення ретельного фронтального аналізу.

У 4 класі після вивчення та закріплення теми завдання із дробами пропонуються також для усних обчислень. При цьому бажано спиратися на знання учнів з різних змістових ліній, визначених програмою з математики для 1-4 класів [28]. Наприклад:

1. У класі 30 учнів. $\frac{2}{3}$з них займаються у спортивних секціях Скільки учнів не займаються спортом?

2. Знайди помилку та обчисли правильно

$\frac{2}{3}$ від 240 = 360

$\frac{3}{10}$ кг = 30 г

$\frac{3}{5}$ м = 6 дм

$\frac{2}{5}$ год. = 20 хв

3. Порівняй

$\frac{1}{2}$т * 50 ц

$\frac{2}{3}$ см * 2 мм

$\frac{4}{5}$ кг * 500 гр

4. Довжина ділянки прямокутної форми становить 80 метрів, а ширина становить $\frac{3}{5}$ її довжини. Знайди площу та периметр даної ділянки.

Якщо вчитель переконався у сформованості в учнів розуміння дробу та вірності виконання школярами завдань на їх порівняння з опорою на наочність, можна запропонувати декілька задач:

1. Бабуся спекла пиріг, який поділила на 10 рівних частин. Тато з'їв один шматочок пирога, а мама – два. Яку частину пирога з'їв тато, а яку частину мама?
2. Пиріг поділили порівну на 3 гостей, а прийшло друзів – у 2 рази більше. Як господині не залишити кожного гостя без солодкого?

Виконання першого завдання в основному не викликає в учнів труднощів, оскільки вони, правильно визначаючи чисельник і знаменник, легко знаходять відповідь на запитання задачі ($\frac{1}{10};\frac{2}{10}$). Після запису відповідних дробів учням пропонується їх порівняти. Учні міркують так: «Оскільки тато з'їв один шматочок, а мама 2, то отримуємо таку відповідь-нерівність: $\frac{1}{10}<\frac{2}{10};\frac{2}{10}>\frac{1}{10}$.».

Друге ж завдання можна вважати задачею з логічним навантаженням, оскільки її розв’язання потребує від учнів міркувань та пошуку нестандартного рішення. В задачі зовсім не обов’язково дізнаватися, скільки саме гостей прийшло, хоча діти (в основному) доходять розв’язання цієї задачі саме через визначення цієї величини: вони спочатку знаходять, скільки ж гостей прийшло, а потім, знаючи, що пиріг вже було поділено на 3 частини, доходять висновку про розподіл кожної частини ще навпіл.

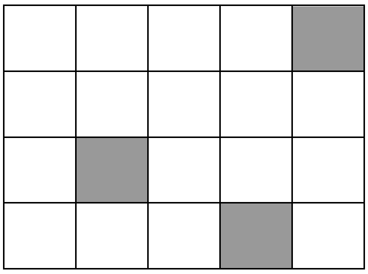
Важливою, за нашим переконанням, є послідовність введення завдань з використанням моделей та графічних зображень, які допомагають молодших школярам вивчати дану тему. Оскільки за новою програмою з математики у 4-му класі вводяться поняття об’ємних фігур (циліндр, конус, куб, піраміда тощо), то вважаємо за необхідне визнати таку послідовність у виборі моделей: спочатку плоскі, а згодом – об’ємні, що сприятиме міцному засвоєнню знань учнів не тільки теми «Дроби», а й інших змістових ліній.

*Інноваційні підхо*ди до виконання завдань для учнів початкової школи на з’ясування сутності дробів, їх порівняння та розв’язування задач із цим поняттям ми розглянемо більш детально у наступному розділі.

Для завдань з тематичної атестації для учнів 4-го класу загальноосвітньої школи [15, с.] пропонуються такі тести, пов’язані з поняттям дробів:

Перший рівень

1. Яка частина прямокутника заштрихована?



а) $\frac{3}{24}$; б) $\frac{4}{5}$;

в) $\frac{3}{20}$; г) $\frac{4}{20}$.

2. $\frac{3}{6}$ від 120 дорівнює:

а) 20; б) 60; в) 6; г) 240.

3. Знайди число, якщо $\frac{1}{7}$ його дорівнює 420:

а) 60; б) 292; в) 4200; г) 2940.

4. $\frac{2}{5}$ від 1 км дорівнює:

а) 200; б) 400; в) 40; г) 200.

5. Сума всіх знаменників дробів $\frac{2}{7}$; $\frac{9}{10}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}$ дорівнює:

а) 15; б) 40; в) 25; г) 20.

6. 1 м становить □ частину від 1 км:

а) $\frac{1}{10}$; б) $\frac{1}{100}$; в) $\frac{1}{1000}$; г) $\frac{1}{10000}$.

За тестовими завданнями з метою перевірки засвоєння учнями теми «Дроби» у 4-му класі за іншим збірником [8, с. 124] пропонуються:

1. Яка частина круга заштрихована?

а) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{3}{8}$;
б) $\frac{8}{3}$; г) $\frac{5}{3}$.

2. Яка з нерівностей є правильною?

а) $\frac{4}{5} < 1$; б) $1 < \frac{7}{8}$; в) $\frac{4}{5} > \frac{5}{11}$; г) $\frac{1}{6} > \frac{1}{6}$.

3. $\frac{4}{5}$ від числа 60 дорівнює…

а) 48; б) 12; в) 15; г) 3.

4. $\frac{1}{7}$ від числа a дорівнює 42. Число a в такому випадку дорівнює…

а) 6; б) 49; в) 294; г) 35.

5. Якщо від числа 200 відняти $\frac{3}{5}$ його, то отримаємо…

а) 44; б) 132; в) 88; г) 352.

6. Щоб знайти $\frac{1}{6}$ від суми чисел 840 і 60, треба…

а) 840 : 6; в) (840 + 60) : 6;

б) (840 + 60) х 6; г) 840 + 60 : 6.

7. На заводі працюють 600 робітників, із них $\frac{3}{5}$ токарі. Щоб знайти, скільки на заводі працює токарів, треба…

а) 600 : 5 · 3; б) 600 · 5 : 3; в) 600 : 3 · 5; г) 600 : 5 : 3.

8. Якщо за день туристи пройшли 24 км, що становить $\frac{1}{3}$ маршруту, то для знаходження довжини маршруту треба…

а) 24 : 3; б) 24 + 3; в) 24 · 3; г) 24 – 3.

9. Ширина поля 25 м, довжина – на 50 м більша. $\frac{2}{5}$ поля засіяно пшеницею, а решту – просом. Отже просом засіяно …

а) 450 м^2;   б) 300 м^2;   в) 750 м^2;   г) 1125 м^2.

10. На одній ділянці школярі виростили 124 т капусти, а на другій – у 2 рази більше. Четверту частину всієї капусти залишили на корм кролям, що дорівнює…

а**)** 248 кг;   б) 93 кг;   в) 372 кг;   г) 62 кг.

Отже, за допомогою тестових завдань та різних видів самостійних робіт вчителі початкових класів з’ясовують рівень засвоєння учнями молодшого шкільного віку теми „Дроби”.

2.4. Наступність у вивченні величин та дробів у 5-6 класах загальноосвітньої школи

Наступність у вивченні теми «Дроби» ми можемо легко прослідкувати за підручником математики для 5 класу [22]. Завдання у ньому класифікуються за двома рівнями: *рівень А* – усні вправи та простіші (обов’язкові) задачі, розв'язання яких гарантує позитивну оцінку; *рівень В* – більш складні задачі, розв'язання яких дозволяє отримати більш високий бал.

Наприклад, після вивчення параграфу „Звичайні дроби", *рівень А* містить такі завдання для учнів [22, с. 160]:

1. Яку частину години становить урок?
2. Накресли відрізок завдовжки 1 дм та відрізки, довжини яких становлять $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{7}{10}$ довжини даного відрізка.
3. Слимак проповз за 5 хвилин 2 метра. Знайди швидкість слимака.
4. Яке натуральне число представлено дробом: $\frac{12}{3}$; $\frac{7}{7}$; $\frac{10}{5}$; $\frac{8}{1}$?

(Міркування учнів пов'язане з виконанням арифметичної дії ділення: $\frac{12}{3} = 12:3 = 4$; $\frac{7}{7} = 7:7 = 1$; $\frac{10}{5} = 10:5 = 2$; $\frac{8}{1} = 8:1 = 8$).

5. Запиши у вигляді дробу частку 1 : 3; 2 : 5; 3 : 7; 4 : 9.

6. Як називається: сота частина метра (центнера) ; тисячна частина кілометра (тонни; кілограма); сьома частина тижня; дванадцята частина року?

7. Яку частину хвилини становить 1 секунда; 3 секунди? Яку частину доби становить 1 година; 8 годин?

8. Поїзд має пройти шлях між містами А і В, що дорівнює 300 км. Він уже пройшов $\frac{3}{5}$ цього шляху. Скільки це становить кілометрів? Розв'яжи задачу, користуючись схемою (рис. 12).

Рис. 12.

9. Шість хлопчиків упіймали 5 кг риби і поділили її порівну. Скільки кілограмів риби отримав кожний хлопчик?

10. Склади задачу, розв'язком якої є дріб $\frac{3}{5}$.

11. Шматок дроту має довжину 48 м. Знайди довжини таких його частин:

а) $\frac{1}{12}$; б) $\frac{5}{8}$; в) $\frac{7}{16}$; г) $\frac{17}{24}$ тощо.

Рівень В за названим підручником пропонує для учнів такі завдання :

1. Ліс площею 5 га розбили на 8 рівних ділянок. Яку частину площі лісу становить площа кожної ділянки? Яка площа кожної ділянки у гектарах?

2. Лижник пройшов $\frac{16}{25}$ дистанції завдовжки 50 км. Скільки кілометрів йому залишилося пройти до фінішу?

3. Сад площею 420 кв.м засаджено яблунями, сливами і вишнями, причому яблунями засаджено $\frac{3}{7}$, а сливами – $\frac{5}{14}$ площі саду. Яка площа саду засаджена вишнями?

4. $\frac{3}{7}$ деякого числа дорівнює 21. Знайди це число. Тощо [22, с. 161-162].

За іншим підручником [2] при вивченні теми «Дробові числа і звичайні» пропонуються такі завдання: половина, одна десята, півтора, два з половиною – це приклади **дробових** чисел. Записувати **дробові числа** можна за допомогою *звичайних* або *десяткових* дробів.

Розглянемо спочатку **звичайні дроби**. Половину звичайним дробом записують так: $\frac{1}{2}$. Читають: «Одна друга». Цей запис показує: щось ціле поділили на дві рівні частини і взяли тільки одну з них. **Звичайний дріб** записують за допомогою *дробової риски*. Число, написане під нею, – знаменник дробу. Він показує, наскільки рівних частин поділено одне ціле. Над дробовою рискою пишуть чисельник дробу. Він показує, скільки таких частин узято 9. Наприклад, у дробі $\frac{3}{5}$ (три п'ятих) знаменником є число 5, а чисельником – 3 (див. рис. 13).

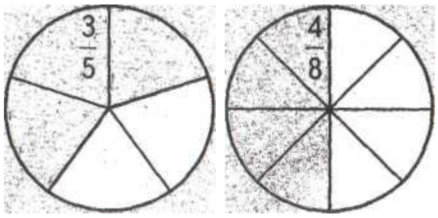


Рис. 13.

Отже, ми переконалися, що дане завдання учням п’ятого класу пропонується для повторення вивченого у початковій школі. Далі за названим підручником [2] пропонуються завдання з метою повторення знаходження частини від числа та числа за його частиною: ,,щоб знайти половину числа, досить поділити його на 2. Щоб знайти третину числа, треба поділити його на 3. Замість ,,частина числа” кажуть «дріб від числа» [2, с. --].

Далі пропонується виконати завдання на порівняння дробів з однаковими знаменниками та вводиться правило: **із двох дробів з однаковими знаменниками той дріб більший, в якого чисельник більший**.

Цікавим і важливим на наш погляд, є підхід про порівняння звичайних дробів за допомогою координатного променя. І хоча даний приклад не відповідає програмі початкової школи, вважаємо, що для майбутніх учителів початкових класів, так само, як і для вчителів-практиків, його повторити не зайве. Розглянемо даний приклад за підручником Бевз В.П., Бевз В.Г. для 5 класу [4].

Якщо одиничний відрізок поділити, наприклад, на 5 рівних частин, то кожна з них становитиме $\frac{1}{5}$ одиничного відрізка. Відкладаючи послідовно один за одним такі відрізки на промені, дістанемо координатний промінь. На цьому координатному промені помічено точки, координати яких – дроби із знаменником 5.

Зверни увагу! Звичайний дріб, у якого чисельник менший від знаменника, називають правильним. Дріб, у якого чисельник не менший від знаменника, називають неправильним.

Наприклад, дроби $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{7}$ – правильні, а $\frac{9}{7}$, $\frac{5}{3}$ – неправильні. Кожний правильний дріб менший за 1, а кожний неправильний дріб більший за будь-який правильний дріб [4, с. --].

У 6-му класі продовжується вивчення звичайних дробів: розглядається основна властивість дробу, скорочення, порівняння, додавання і віднімання дробів з різними знаменниками, множення та ділення звичайних дробів. Основна мета вивчення теми на даному етапі – сформувати міцні навички перетворення дробів і виконання чотирьох арифметичних дій над ними.

Вимоги до знань і умінь на даному етапі такі:

- знати основну властивість дробу і застосовувати її до скорочення дробів і зведення дробів до найменшого спільного знаменника;
- знати правила додавання і віднімання дробів з різними знаменниками, множення і ділення дробів;
- виконувати чотири арифметичні дії над довільними звичайними дробами;
- розв'язувати арифметичними способами текстові задачі з використанням звичайних дробів [31, с. ---].

За підручником з математики для 6 класу учням пропонується вивчення основної властивості дробів: **якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число, то дістанемо дріб, що дорівнює даному.** Після чого приступають до порівняння звичайних дробів, використовуючи дану властивість або правила зведення дробів до спільного знаменника [19, с. 69-73]. Крім арифметичних дій з дробами, учні отримують нові знання щодо перетворення звичайних дробів у десяткові [там само, с. 76-78].

Отже, здійснений методичний аналіз завдань з вивчення теми «Дроби» дозволяє стверджувати про наявність наступності та ускладненості основних понять, пов'язаних із дробами, для учнів з початкових класів та 5-6 класів загальноосвітньої школи.

Розділ 3. Інноваційні підходи при вивчення тем «Величини» та «Дроби» у початковій школі

3.1. Моделювання як вид короткого запису до задач із дробовими числами

Серед численних видів вправ, які розв’язують учні під час вивчення курсу математики, текстові задачі займають особливе місце. Це зумовлюється тими функціями, які виконують задачі на кожному етапі шкільного періоду навчання: розвиток обчислювальних навичок та логічного мислення учнів, формування прийомів розумової діяльності, умінь і навичок математичного моделювання реальних процесів, виховання у школярів світогляду й розуміння опосередкованості зв’язку математики з оточуючим світом, практичною діяльністю людей.

У шкільній практиці розв’язуванню текстових задач приділяється багато часу і уваги. Проте більшість учнів і випускників початкової загальноосвітньої школи зазнають значних труднощів в процесі їх розв’язання, особливо на етапі складання математичної моделі задачі. Пов’язано це з тим, що для школярів є значною різниця між конкретно-образною формою умови задачі та її абстрактною математичною моделлю. У певних випадках побудова допоміжних моделей задачі (схемно-графічних зображень, складання таблиць) дає змогу подолати ці труднощі. Але форми традиційно використовуваних графічних моделей не дає можливості зафіксувати процес аналізу і відшукування її розв’язання.

Дослідженнями психологів і методистів [3; 4; 9; 13; 23; 24; 25; 31] встановлено, що ефективність використання допоміжних моделей як засобу відшукання розв’язання задачі визначається такими умовами: а) ступенем повноти відтворення в моделі елементів задачі; б) простотою засобів її побудови і дослідження; в) існуванням можливості перетворення моделі (властивістю динамічності).

Умова кожної текстової задачі містить множину величин (відомих і невідомих) та їх числових значень, а також систему співвідношень, якими ці величини зв'язані між собою. Кожне співвідношення зв'язує, як правило, три величини (виняток становлять відношення рівності і додавання трьох і більше величин, але їх легко можна подати у вигляді залежних трійок).

Розглянемо використання моделей та схем як видів короткого запису для розв'язування задач, які пов'язані з поняттям дробу. Пошук розв'язання таких задач значно полегшується, якщо використовувати моделювання як вид короткого запису, що дає, в цілому, позитивний результат.

Наведемо декілька прикладів текстових задач та їх умов у вигляді моделей.

1. Марійка віддала братові половину своїх цукерок і ще дві цукерки та у неї не залишилося жодної цукерки. Скільки цукерок було у Марійки?

Графічна схема буде такою (див. рис. 14):

2 цукерки

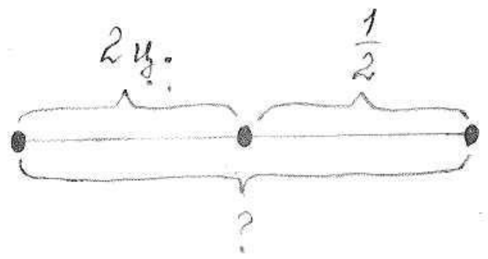
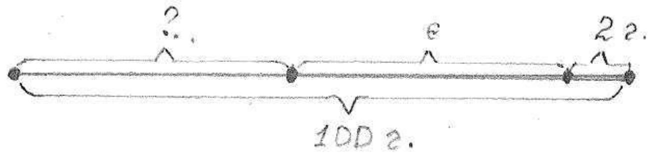


Рис. 14.

Ця схема дозволяє дітям легко відповісти на запитання задачі: у Марійки було: 2 х 2 = 4 (ц.)

Відповідь: 4 цукерки було у Марійки.

2. Маса сома 3 кг і ще половина всієї маси. Яка маса сома?



(Схема дозволяє швидко знайти розв’язання задачі: 3 х 2 = 6 (кг)

Відповідь: 6 кілограмів маса всієї риби.

3. У вазі були яблука. Микола взяв половину яблук, а Іванко – половину того, що залишилося і ще 4 яблука, після чого яблук у вазі не залишилося. Скільки яблук було у вазі? (Див. рис. 15).

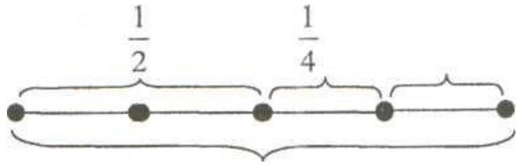


Рис. 15.

Із короткого запису у вигляді схеми учні роблять висновок, що 4 яблука – це четверта частина всіх яблук, що були у вазі. Тому у вазі було

4 х 4=16 (ябл.).

Відповідь: 16 яблук було у вазі.

4. Туристи пройшли за три дні 25 км. За перший день вони пройшли 2/5 усього шляху. Скільки кілометрів пройшли туристи за перший день? (Див. рис. 16).

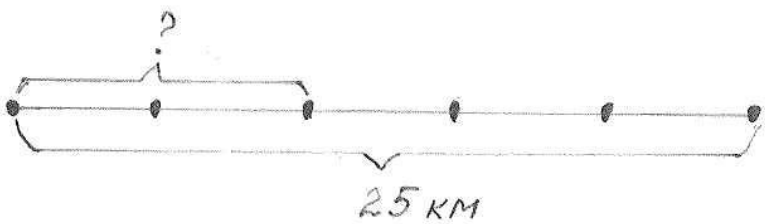


Рис. 16.

(Оскільки весь шлях дорівнює 25 км, то одна п’ята частина шляху дорівнює 25 : 5 = 5 (км). Тоді $\frac{2}{5}$ шляху – це 5 х 2=10 (км).

Розв’язання задачі можна представити виразом 25 : 5 * 4 = 10 (км) – пройшли туристи за перший день.

Відповідь: 10 км.

5. Розв'язати задачу, користуючись схемою (рис. 17). Поїзд, рухаючись від міста А до міста В, пройшов 150 км, що становить $\frac{3}{5}$ відстані між цими містами. Яка відстань між містами?

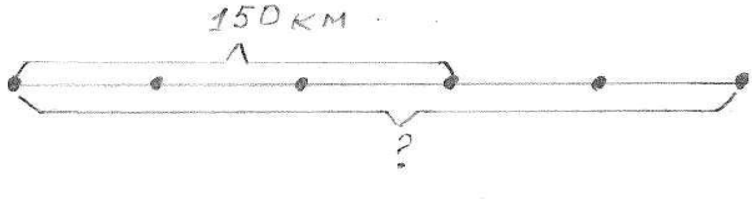


Рис. 17.

Розв'язання задачі учні подають по діях або виразом :

1) 150 : 3 = 50 (км) – третя частина відстані;

2) 50 x 5 = 250 (км) – відстань між містами.

150 : 3 x 5 = 250 (км)

Відповідь: 250 кілометрів.

6. Маса тюленя становить 200 кг та ще $\frac{3}{4}$ його маси. Яка маса тюленя? (Див. рис. 18).

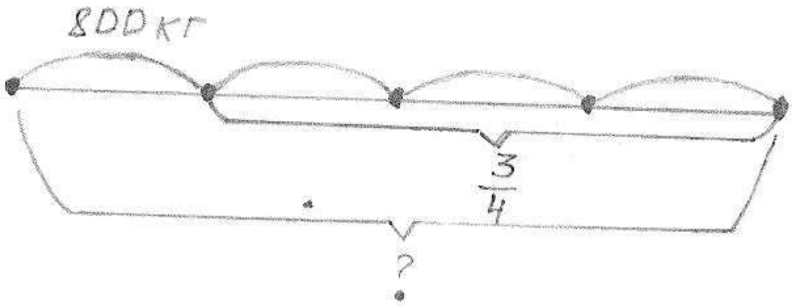


Рис. 18.

7. Старовинна задача. У пастуха, який вів 80 биків, запитали: "Яку частину биків своєї численної череди ти ведеш?" Він відповів: "Я веду половину від третини худоби". Скільки биків було у всій череді? [, с. 56].

На кресленні (рис. 19) весь відрізок ділимо спочатку на три однакові частини (великі відмітки), а потім кожну третину ділимо на дві рівні частини, отримуємо половину від третини, що складає 80 биків.

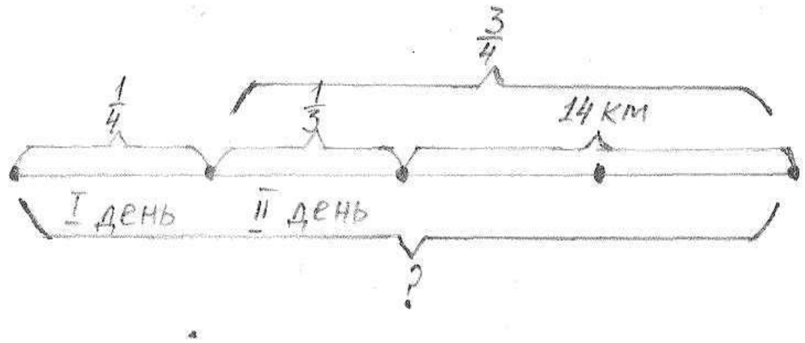


Рис. 19.

Унаочнення до умови задачі дозволяє вірно визначити її розв’язання шляхом міркування: в усій череді биків у 6 разів більше, тобто 80 х 6 = 480 (б.)

Відповідь: 480 биків.

Отже, використання моделей як короткого запису до задач із дробами дозволяє визначити взаємозв’язки між даними та шуканими величинами, а тому – полегшує пошук правильного їх розв’язування.

3.2. Використання моделей при вивченні величин та дробів

Різні види наочності (малюнки, моделі, схеми, креслення) допомагають учням у свідомому виявленні прихованих залежностей між цілим та його частинами. Крім того, вірно підібрана наочність як важливий засіб навчання залучає школярів до активного мислення, пошуку оптимальних шляхів розв’язування задач, сприяє свідомому засвоєнню математичного матеріалу, створює умови для активізації навчальної роботи з таких розумових операцій, як: спостереження, абстрагування, порівняння, узагальнення тощо.

З метою відпрацювання уміння правильно записувати дроби пропонуємо виконувати з учнями такі завдання :

1) визначити, який знаменник буде у таких випадках (рис. 26):

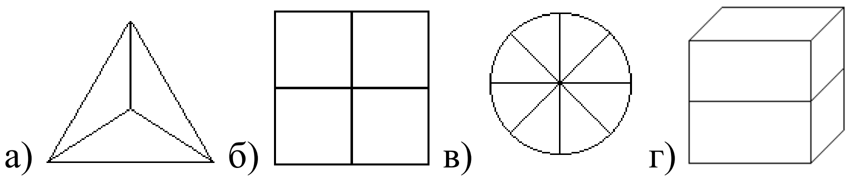


Рис. 20.

Виконуючи таке завдання учні переконуються, що знаменник завжди дорівнює числу рівних частин, на які поділено фігуру;

2) визначення чисельнику дробу у таких випадках (рис. 27):

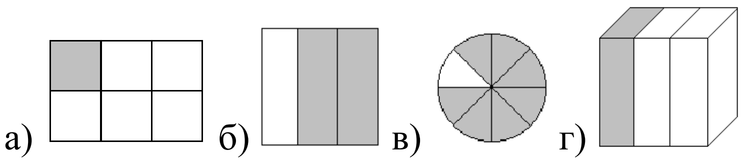


Рис. 21.

3) Запиши дробовими числами: одна сьома, дві дев'ятих, одна друга, сім восьмих, три п'ятих, одне ціле.

4) Назви дроби, які позначають зафарбовану частину фігури (рис. 28):

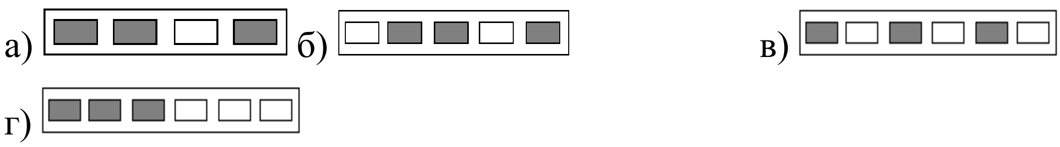


Рис. 22.

Що цікавого помітили?

Оскільки доволі часто учні легко визначають чисельник, який показує число зафарбованих частин, залишаючи поза увагою незафарбовані частини фігури, можна пропонувати усно в кожній з них називати по два чисельники, які відповідно означають число зафарбованих і незафарбованих частин.

Бажано, щоб учні виконували вправи не тільки з готовими моделями дробів, а й конструювали їх самостійно. Так, при початковому ознайомленні з термінами „чисельник" і „знаменник" у 4 класі учні будуть спиратися на готові моделі дробів, оскільки основною дидактичною метою на даному етапі є визначення сутності дробу та алгоритму його отримання. Наприклад, для дробу $\frac{3}{4}$ алгоритмом будуть такі дії:

1) поділити ціле на 4 однакові частини;

2) взяти 3 таких частини.

Для закріплення даного алгоритму можна запропонувати завдання :

1. На скільки рівних частин поділено ціле у таких випадках? Що показує зафарбована частина (рис. 29)?

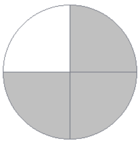
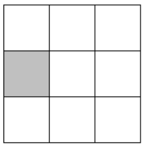
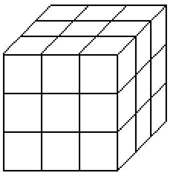
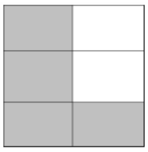
а)  б)  в)  г) 

Рис. 23.

2. Вкажіть ціле, на якому зафарбовано (рис. 30 та 31):

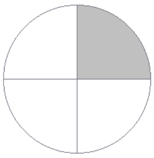
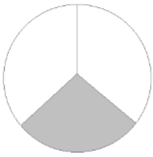
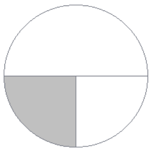
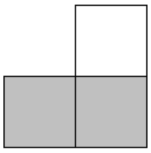
$\frac{1}{3}$ цілого а)  б)  в)  г) 

Рис. 24.

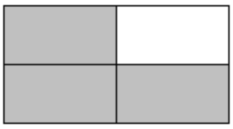
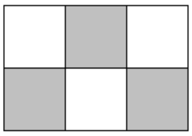
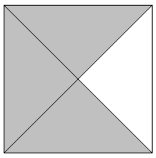
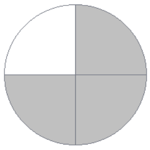
$\frac{3}{4}$ цілого а)  б)  в)  г) 

Рис. 25.

3. Під кожним малюнком обведи дріб, який показує, яку частину цілого заштриховано (рис. 26):

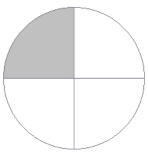
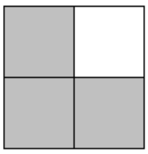
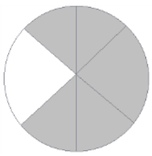
а) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$  б) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}$.  в) $\frac{5}{6}; \frac{6}{8}; \frac{5}{10}$. 

Рис. 26.

4. Під кожним малюнком вибери та обведи дріб, який показує, яка частина цілого залишилася незаштрихованою (рис. 27):

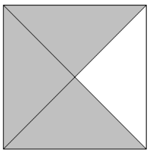
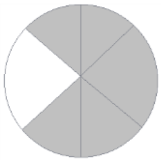
а) $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{2}{3}$  б) $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{3}{4}.$  в) $\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{1}{8}$ 

Рис. 27.

5. Запиши дроби, які показують, яку частину цілого зафарбували (рис. 34):

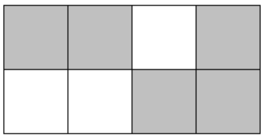
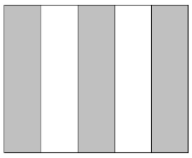
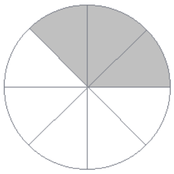
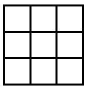
а)  б)  в) 

Рис. 28.

6.Запиши дроби, які показують, яка частина цілого залишилася незафарбованою (рис. 28).

7. Яку частину квадрата  становлять фігури (рис. 29):

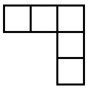
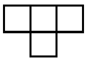
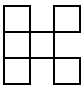
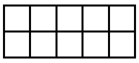
а)  б)  в)  г) 

Рис. 29.

Важливо замітити, що завдання по визначенню та запису дробів може бути пов'язаними як з величинами довжини, площі, об'єму тощо, так і дискретних множин, які утворені однаковими предметами (елементами) та поділені на рівні частини. Для прикладу оберемо декілька таких множин, на яких учням пропонуються завдання, аналогічні попереднім:

1. На скільки рівних частин поділено ціле у таких випадках? Що показує зафарбована частина (рис. 30)?

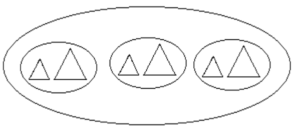
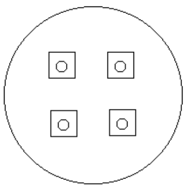
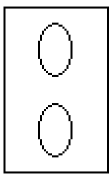
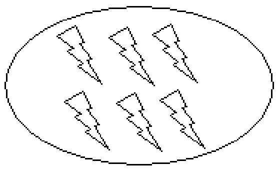
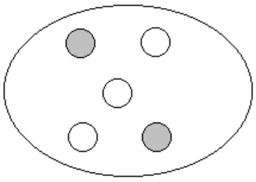
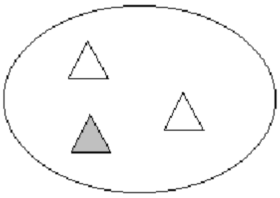
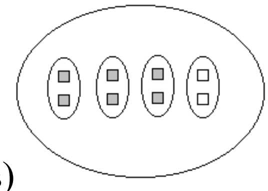
а)  б)  в)  г) 

Рис. 30.

2. Вкажіть ціле, на якому зафарбовано $\frac{3}{4}$ (рис. 31):

а)  б)  в) 

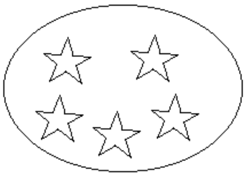
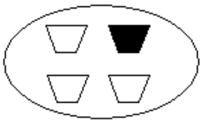
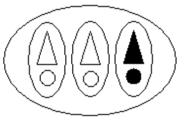
г) 

Рис. 31.

3. Під кожним малюнком обведи дріб, який показує, яку частину цілого заштриховано (рис. 32):

а)  $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$ б)  $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}$

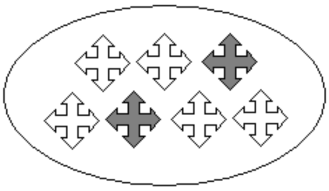
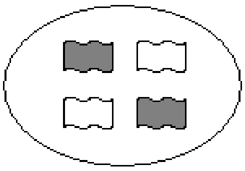
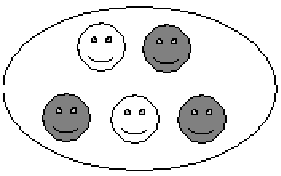
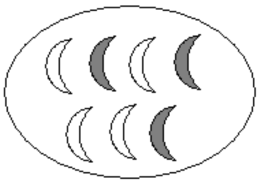
в)  $\frac{5}{6}; \frac{5}{8}; \frac{5}{10}$ г)  $\frac{1}{7}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{7}$

Рис. 32.

4. Запиши дроби, які показують, яку частину цілого зафарбували (рис. 33):

а)  б)  в) 

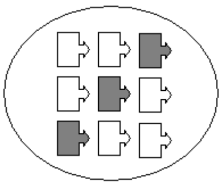
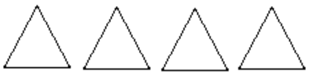
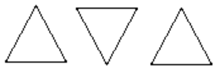
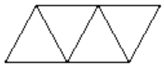
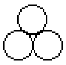
г) 

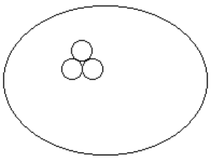
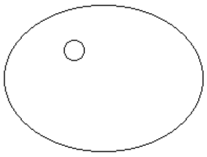
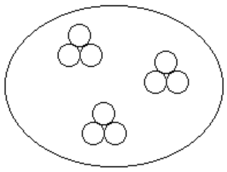
Рис. 33.

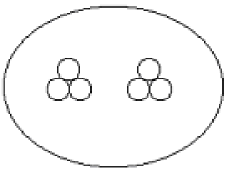
Оскільки задачі на знаходження цілого за його частиною є оберненими до розглянутих вище завдань по знаходженню частини (дробу) цілого (числа), тому доречним при їх виконанні також використовувати моделі. Розглянемо декілька прикладів таких завдань.

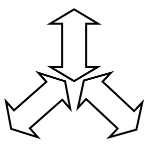
1.  – це $\frac{1}{4}$ частина цілого. Визначте серед запропонованих варіантів ціле:

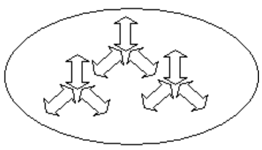
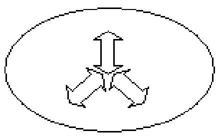
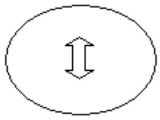
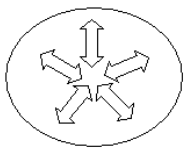
а) б) в) г)

2.  – це $\frac{1}{3}$ частина цілого. Визначте серед запропонованих варіантів ціле:

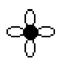
а)  б)  в) 

г) 

3.  – це $\frac{3}{5}$ цілого. Визначте серед запропонованих варіантів ціле:

а)  б)  в)  г) 

4. Намалюй ціле, якщо :

а) $\frac{1}{3}$ цілого – це  ;

б) $\frac{3}{4}$ цілого – це □□□ ;

в) $\frac{1}{6}$ цілого – це ☆.

Ускладнення можуть викликати у дітей такі завдання 3 та 4 (варіант б), оскільки його виконання передбачає алгоритмічну послідовність: визначити спочатку одну частину цілого, для чого потрібно даний об'єкт поділити на 3, а тільки після цього визначити ціле, помноживши знайдену частину на їх кількість, що показує знаменник.

Такі моделі дозволять учням переконатися, що для визначення дробу можуть бути обрані будь-які об'єкти.

Важливо зазначити, що використання даних моделей при вивченні теми передбачає логічної послідовності: на перших етапах опанування учнями понять „чисельник" і „знаменник" бажано користуватися готовими (фронтальними) моделями, а з поступовим „просуненням" учнів по темі – ускладнювати завдання та пропонувати їм самостійно конструювати моделі дробів.

Більш складними можна вважати завдання, які вимагають від учнів самостійної побудови моделей дробів. З цією метою вчитель може запропонувати учням варіанти своєї інструктивної допомоги:

а) у виборі цілого у вигляді певної фігури (або кількості однакових предметів);

б) у розбитті цілого на потрібну кількість рівних частин тощо.

Серед інноваційних підходів до вивчення математики взагалі, теми "Дроби" – зокрема, чільне місце посідає використання інтегративних та міжпредметних зв'язків. Так, за нашим переконанням, при вивченні даної теми доцільним буде подати учням цікавий матеріал з музики, оскільки звичайні дроби часто використовують у житті, в різних науках, і навіть – у мистецтві.

Наприклад, у музиці для позначення тривалості різних нот використовують спеціальні позначення. Отже, учні на уроках музики ознайомлюються з половиною, чвертю, восьмою і шістнадцятою частками цілої ноти. Позначають їх такими значками:

ціла 

восьма 

восьмі 

половина 

шістнадцята 

чверть 

Діти, які займаються музикою, знають, що тривалість однієї восьмої дорівнює двом шістнадцятим, дві восьми – дорівнюють чверті, дві чверті – половині, а дві половини, в свою чергу, – тривалості цілої ноти, або чотирьом ударам метронома, і навпаки.

З опорою на наочність школярі повинні показувати і записувати відповідні частини. Наведемо приклад одного з таких завдань на уроці математики для учнів 3-го класу.

На дошці прикріплені моделі 5 однакових кругів, поділені на 2, 3, 4, 6, 8 частин. (рис.34):

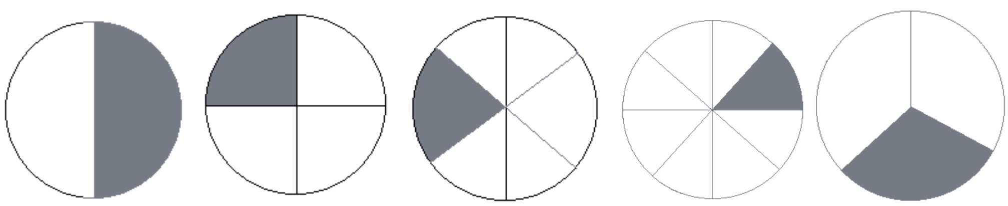


Рис. 34.

Вчитель задає запитання:

- Які геометричні фігури на дошці?
- Чи є серед кругів такі, які поділені на однакову кількість частин?

- Зверніть увагу на перший круг ліворуч. На скільки частин він поділений?
- Покажіть заштриховану частину круга. Яка це частина? Запишіть відповідний дріб під цим кругом.
- На скільки рівних частин поділено другий круг?
- Покажіть заштриховану частину круга. Яка це частина? Позначте її відповідним дробом.
- Зверніть увагу на записані дроби. Що ж означає число, яке записане під рискою? А що означає число над рискою у записі дробів?

Аналогічна робота проводиться з іншими кругами.

Для активізації розумової діяльності та самоперевірки учнів можна запропонувати таблицю:

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
е	*н*	*а*	*в*	*с*

Розташувавши дроби у відповідності до представлених кругів, школярі відгадують зашифроване слово.

Оскільки використання моделей також дозволяє учням самостійно виконувати алгоритм і знаходити розв’язання задачі на знаходження дробу від числа та числа за його частиною, то для розв’язування задач таких видів краще використовувати *динамічні моделі*, які учні самостійно можуть виготовити на уроках трудового навчання чи художньої праці.

Приклад 1. Потрібно взяти декілька однакових різнокольорових кругів (наприклад, 4), виготовлених кожним учнем. Перший кружечок залишають цілим і наклеюють на картон; пишуть на ньому цифру 1. Другий кружечок ділять навпіл і на кожній половині пишуть $\frac{1}{2}$ (наклеюють так, щоб одна з половинок могла розкриватися). Третій кружечок ділять на 4 рівні частини, записуючи на кожній $\frac{1}{4}$. (Підклеюють так, щоб можна було розкривати весь круг (клеєм намащують лише $\frac{1}{4}$ частину). Нарешті, четвертий ділять на 8 рівних частин і записують на кожній $\frac{1}{8}$. (Підклеюють аналогічно попереднім).

Бажано, щоб отримані моделі були наклеєними на одному аркуші одна під одною, що надасть можливість молодшим школярам легко виконувати їх порівняння. Наприклад, було запропоновано завдання знайти шляхом згинання та порівняти $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8}$ частини круга. Виконуючи порівняння дробів на основі таких динамічних моделей, діти легко переконуються, що, наприклад, у половині кружечка вміщується $\frac{2}{4}$ або $\frac{4}{8}$ його частини; порівнюють тощо.

Приклад 2. Аналогічні вправи діти виконують і з паперовими смужками, квадратиками чи прямокутниками. Наприклад, першу смужку паперу поділили на 3 рівні частини, а наступну – на шість однакових частин, отримавши з кожної (однієї) третьої $\frac{2}{6}$ частини смужки, а якщо їх розігнути, то буде $\frac{3}{3}$.

Важливим у такому ланцюжку перетворень є висновки про рівності та нерівності: $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$; $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $\frac{3}{3}=1$; $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$; …. І навпаки.

Таким чином, цікавими та корисними завданнями з моделями дробів є завдання на роздроблення частин у дрібніші і перетворення дрібніших у крупніші. Їх доцільно розглядати одночасно, оскільки це взаємообернені задачі.

Наприклад: на кружечках учень з'ясував, що $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ бо половину кружечка він перегнув навпіл і дістав з 2 частини однієї половини (1/4), а тому $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$. Розправивши круг, школяр знову пересвідчився, що один кружечок становить $\frac{2}{2}$. Отже, $\frac{2}{2}=1$.

Динамічні моделі дозволяють учням зробити важливий висновок: щоб отримати $\frac{1}{4}$ частину, можна поділити $\frac{1}{2}$ навпіл або скласти дві $\frac{1}{8}$ частин.

Якщо звернути увагу школярів на дроби $\frac{1}{2}$ та $\frac{1}{4}$, а круг уявити циферблатом годинника, то вони краще зрозуміють значення висловів „половина другої години”, „чверть на п’яту”, „без чверті одинадцять” тощо. Важливо зазначити, що завдання, які містять внутрішньо предметні зв’язки при вивченні теми „Дроби” у курсі математики початкової школи, представлені у традиційних підручниках у достатньому обсязі (див. підрозділ 2 другого розділу даного посібника).

З інтересом учні розв’язують вправи на заповнення пропущеного числа частин у записах: $\frac{*}{3}=\frac{2}{6}$; $\frac{3}{5}=\frac{*}{10}$; $\frac{*}{7}=1$ тощо.

Переконані, що вчителю важливо звернути увагу учнів на вірне використання у життєвих ситуаціях словосполучень: „половина на третю годину”, „без чверті десята вечора” тощо. Школярі при такому підході будуть припускати значно меншу кількість помилок.

Для усних обчислень також можна запропонувати задачі:

1. Мати купила 2 десятки яєць. П’яту частину вона зварила на сніданок. Скільки яєць зварила мати?

2. Урок триває 45 хвилин, а перерва становить його третину. Скільки триває перерва?

3. Від тканини довжиною 1 метр відрізали половину. Скільки сантиметрів залишилося? Тощо.

Оскільки виконання завдань на порівняння дробів дуже часто викликають у дітей труднощі, пропонуємо декілька варіантів виконання завдань, які, за нашими переконаннями, допоможуть учням молодшого шкільного віку ці труднощі подолати.

Для початку, потрібно класифікувати усі випадки завдань на порівняння дробів. Це можна зробити так:

1. *Порівняння дробів з однаковими знаменниками*.

Наприклад, учням запропоновано порівняти $\frac{1}{5};\frac{2}{5};\frac{4}{5}$. На основі використання моделей вчитель спрямовує шлях міркування дітей, які самостійно можуть зробити висновок про те, що при порівнянні дробів з однаковими знаменниками увага звертається на чисельник, при чому: чим більше чисельник (чим більше взято таких однакових частин), тим і більше дріб.

Даний висновок учні можуть легко зробити самостійно без моделей, спираючись на життєвий досвід. Пропонуємо використати „солодке уявлення” та з’ясувати сутність кожного з дробів: прийшло 5 гостей і пиріг (торт тощо) було поділено на п’ять частин. Для порівняння потрібно уявити відповідні „порції” на тарілці, що дозволить дітям легко розташувати дроби (за кількістю „смачних” порцій, на кількість яких вказує чисельник) у порядку зростання або спадання.

Підтвердження нашого підходу з солодким знаходимо у підручнику з математики для 5-го класу (див.[2, с.178-179]).

2. Порівняння дробів з однаковими чисельниками.

Наприклад, учням запропоновано порівняти дроби $\frac{2}{3};\frac{2}{5};\frac{2}{7}$. Після запитань вчителя про спільне та розбіжності у цих дробах звертаємо увагу на чисельник. Якщо однаковий чисельник, то це означає, що брали по 2 частини. Оскільки знаменник різний, то відповідно брали і різні частини. Використання моделей дозволить учням зробити правильний висновок про те, що чим більше знаменник, тим частина буде меншою. Тому при порівнянні дробів з однаковими чисельниками більшим буде той дріб, у якого знаменник менше та навпаки.

3. Порівняння „різних” дробів.

Оскільки за програмою початковою школи учні не ознайомлюються з правилом приведення дробів до спільного знаменника (до отримання першої групи), то цей випадок можна вважати для школярів найбільш складним. Його розв’язання передбачається тільки з опорою на наочність. Потрібно зауважити, що даний випадок є пропедевтичним для вивчення операцій (арифметичних дій) з дробами, що вивчають учні у середніх класах загальноосвітньої школи [23, с. 13; 31, с. 157].

Наприклад, молодші школярі отримали завдання розташувати у порядку зростання такі дроби: $\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{5}{8};\frac{1}{8};\frac{3}{4};\frac{3}{8}$.

Доцільними будуть запитання вчителя про сутності цих дробів (що показує чисельник, що – знаменник). При цьому звертається увага на найбільший знаменник. Визначив його (8), учні пояснюють, що певний об'єкт було поділено на 8 рівних частин. Для розташування дробів у правильній послідовності учням пропонується використання моделей. Можна обрати такі варіанти, які дозволять легко виконати завдання:

1. Накреслити відрізок, довжиною 8 см. Далі за запитаннями вчителя про сутність кожного дробу, учні будуть виконувати відповідні дії з відрізком та робити додаткові креслення кожної з частин, які позначені даними дробами. (Для зручності та наочного виконання учні можуть використовувати різнокольорові олівці). В зошитах поступово отримають такі моделі дробів (рис. 35).

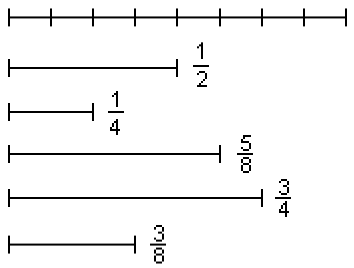


Рис. 35.

2. Накреслити три однакових відрізка, довжиною 8 см. Перший з них поділити на 2 рівні частини, другий – на 4, а третій – на 8 рівних частин. З початку третього відрізка накреслити спадаючий промінь, на який пунктиром будуть „опускатися" дроби. Учні починають відмічати точками дроби за запропонованою їх послідовністю та отримають в результаті таку модель (рис. 36):

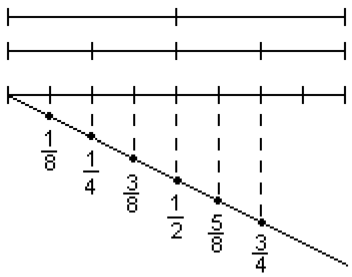


Рис. 36.

3. Накреслити прямокутник у 8 клітинок. Поступово зафарбовувати даний прямокутник (кольоровими олівцями або різними видами штриховки) так, щоб отримані частини відповідали дробам. Учні можуть обрати свій варіант прямокутника, самостійно визначив модель (рис. 37):

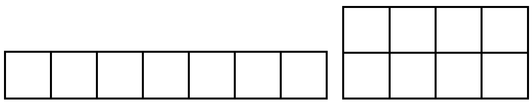


Рис. 37.

Власний досвід педагогічної діяльності переконує, що використання моделей допомагає учням початкових класів правильно виконувати завдання на порівняння дробів. Це означає, що в курсі методики викладання математики майбутніх учителів початкової ланки освіти потрібно готувати до такої інноваційної діяльності під час вивчення теми “Дроби”.

Для виконання завдань з моделями учням початкової школи бажано пропонувати використовувати кольорові олівці. Це дозволяє не тільки чітко визначати потрібну частину цілого, а й урізноманітнювати навчальну діяльність школярів. Учням можна пропонувати такі завдання :

1. Зафарбувати частину цілого, яка відповідає дробу (рис. 38):

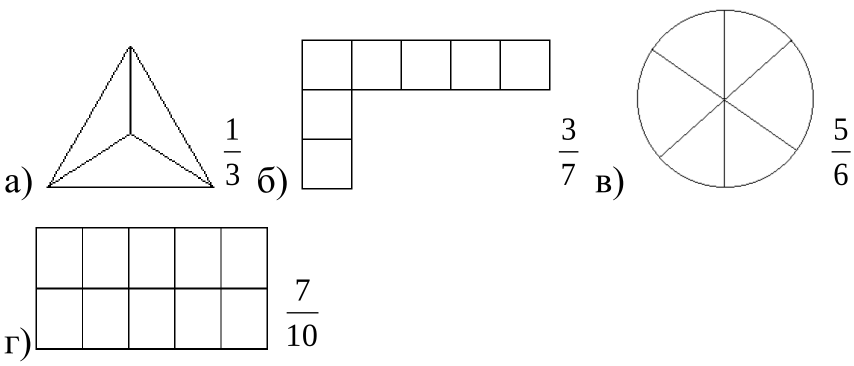
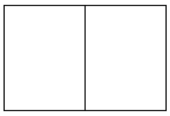
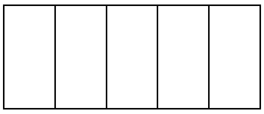
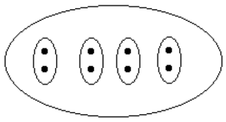


Рис. 38.

2. Зафарбуй фігуру так, щоб незафарбована частина відповідала вказаному дробу (рис. 39):

а)  $\frac{1}{2}$ б)  $\frac{2}{5}$ в)  $\frac{3}{4}$

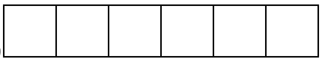
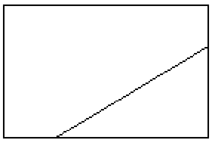
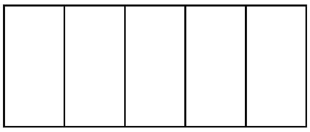
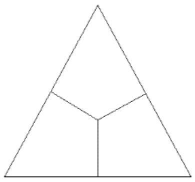
г)  $\frac{1}{6}$

Рис. 39

3. Зафарбуй, якщо можливо, частину цілого, яка відповідає дробу (рис. 40):

а)  $\frac{1}{2}$ б)  $\frac{3}{5}$ в)  $\frac{2}{3}$

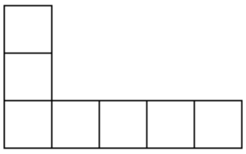
г)  $\frac{2}{7}$

Рис. 40.

4. Накресли у зошиті два однакових квадрати зі стороною 3 см. У першому зафарбуй деякі клітинки так, щоб отримати узор з клітинок зошита. Під цим квадратом записати дріб, який означає кількість зафарбованих клітинок. Другий квадрат зафарбуй іншим узором, але з такою ж кількістю зафарбованих клітинок. Запиши відповідний дріб під другим квадратом. Поясни, чому малюнки у квадратів різні, а дроби під квадратами однакові?

5. Накреслити смужку в 16 кліток завдовжки, четверту частину смужки пофарбувати в червоний колір, другу чверть – у синій, третю чверть – у жовтий. Скільки всього клітинок пофарбовано? Яка частина всієї смужки зафарбована?

6. Накреслити смужку в 16 клітинок завдовжки. Пофарбувати $\frac{3}{4}$

смужки у зелений колір. У скільки разів більше зелених клітинок, ніж білих (не пофарбованих)?

Дане завдання вважаємо пропедевтикою до порівняння дробів у 5-6 класах загальноосвітньої школи. Проте, якщо записати під смужкою відповідні отримані дроби, то завдання стане доступно учням (це перший випадок у порівнянні, які ми вже розглядали – з однаковими знаменниками: звертаємо увагу на чисельник).

7. Накресли два однакові прямокутники, в яких довжина дорівнює 4 см, а ширина – 2 см. Перший прямокутник поділи на квадрати зі стороною 1 см, а другий – на клітинки. Зафарбуй *одним* кольором у першому квадраті 2 частини, у другому – цим самим кольором таку ж кількість клітинок Запиши отримані дроби під кожним квадратом. Порівняй частини та дроби. (Див. рис. 47). Учні запишуть такі рівності та нерівності: 2/32 4/32; 4/32…2/32 2/8;

Зафарбуй *іншим* кольором у першому квадраті 4 клітинки і цим самим кольором у другому квадраті також 4 клітинки. Запиши відповідні дроби під кожним квадратом. Як по іншому можна назвати дріб, який записано під першим квадратом? Порівняй дроби, які записані другим кольором.

Останнє завдання вважаємо за доцільне використовувати при вивченні також теми „Площа”. У наведеному прикладі площа прямокутників однакова, але перший було поділено на квадрантні сантиметри, а для другого міркою була клітинка у зошиті. Через проблемні запитання вчитель підводить дітей до висновку, що чим більша мірка, то тим мешу кількість разів вона вміщується у фігурі та навпаки. Порівнявши обидві мірки (квадратний сантиметр і клітинку) учні зможуть пояснити, чому знаменники в отриманих дробах різні і чому саме у першому прямокутнику знаменник менше, ніж у другому.

Таким чином, ми переконалися, що порівняння дробів з різними чисельниками і знаменниками можливе лише на основі наочно-практичних вправ. У середніх класах загальноосвітньої школи учні ознайомлюються з основною властивістю дробу: якщо один і той самий дріб (чисельник і знаменник) помножити (або поділити) на одне й теж число, то отримуються рівні дроби. При порівнянні дробів з однаковими знаменниками більшим є той дріб, чисельник якого більше, і навпаки.

Найвищим рівнем складності можна вважати завдання, виконання яких передбачає самостійне визначення учнями вибору цілого (однією фігурою або множини однакових предметів), його розбиття на рівні частини, виділення потрібної кількості таких частин. З цією метою виконують такі завдання :

1. Намалюй ціле (фігуру). Зафарбуй: одним кольором $\frac{1}{2}$; другим $\frac{3}{4}$ частини фігури.

2. Намалюй ціле у вигляді 5 однакових об’єктів. Зафарбуй: одним кольором $\frac{1}{5}$; другим – $\frac{3}{5}$; третім – $\frac{4}{5}$ частини цілого.

3. Накресли відрізок, довжиною 9 см. Визнач на ньому одним кольором $\frac{1}{3}$; другим – $\frac{2}{3}$; третім – $\frac{4}{3}$ цілого.

При виконанні останнього завдання потрібно звернутися до учнів з метою перевірки правильного розв’язування останньої частини завдання, оскільки третій колір має вийти за межі відрізка.

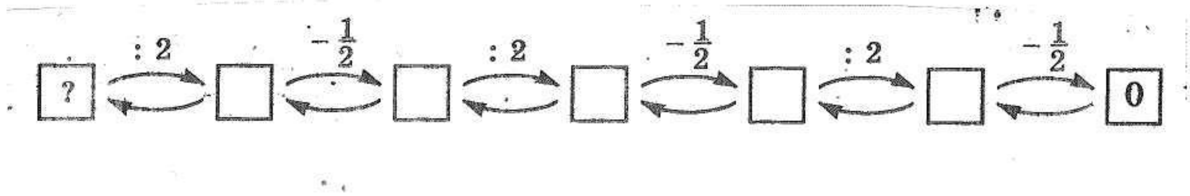
Завдання з моделювання можна поєднувати з цікавим матеріалом. Наприклад, подано таку задачу:

Ведмідь в корзинці плюшки ніс,
А на лісній галявинці
Він половину плюшок з’їв
І плюс іще півплюшки.

Ішов, ішов, і всівся відпочити,
І під “ку-ку” зозулі
Знов половину плюшок з’їв
І плюс іще півплюшки.

Засутеніло, він прискорив крок,
Але на ганку хатки
Він знову з'їв пів-залишку
І плюс іще півплюшки.

З порожньою корзинкою – нажаль!
Він в дім зайшов похмуро…
Я хочу щоб сказали ви,
А скільки плюшок було?



Зацікавити учнів може яскравий малюнок ведмежати з корзинкою, що надасть вчителеві можливість провести зв'язок із життям та виховний момент.

Учні для розв'язування задачі виконають таку модель (див. рис. 41):

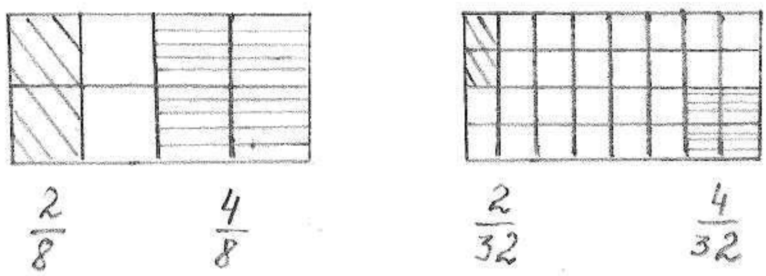


Рис. 41.

За допомогою наведеної моделі можливо знайти вірну відповідь.

Цікаво, додатковим матеріалом при вивченні теми „Дроби" можуть слугувати сірники, за допомогою яких складають геометричні фігури та визначають їх частини. Таким чином, ми на конкретних прикладах показали, яке значення має визначення наступності та використання інтеграційних зв’язків при вивчення теми „Дроби”.

Переконані, що розглянуті методичні прийоми сприятимуть усвідомленому та міцному засвоєнню теми, формуванню в учнів чіткості та точності думки, логічного й критичного мислення.

В цілому, ми мали можливість переконатися, що використання моделей при вивченні теми відіграє важливу роль не тільки в засвоєнні математичних понять, розвитку математичного мислення, грамотності, компетентності, а й у творчості учнів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Авраменко К. Б. Математична освітня галузь : Освітня програма початкової освіти «*Світ, в якому я живу»* / упор. Якименко С.І. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2018. С. 29-43.
2. Авраменко К. Б. Особливості формування професійно-методичної компетентності майбутніх учителів початкової школи : Теоретико-методичні засади підготовки учителів початкової школи до запровадження освітніх технологій в умовах сучасного освітнього середовища: Монографія / за заг. ред. К. Б. Авраменко. Миколаїв: Іліон, 2016. 172 с.
3. Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах: Учебн. пособие для учащихся пед. училищ / Под ред. М.А.Бантовой. 3-е изд. М.: Просвещение, 1984. 335 с.
4. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Математика: Підручник для 5 класу загальноосвітніх навчальних закладів. К.: Зодіак-ЕКО, 2005. 352 с.
5. Богданович М. В. Методика викладання математики в початкових класах: Навч. пос. М. В. Богданович, М. В. Козак, Я. А. Король. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. 336 с.
6. Богданович М.В. та ін. Методика викладання математики в початкових класах: Навч. посібник / М.В.Богданович, М.В.Козак, Я.А.Король. К.: А.С.К., 2008. 352 с.
7. Василенко І.З. Методика викладання математики в початкових класах / За ред. В.М.Кухар. К.: Вища школа, 1971. 376 с.
8. Глейзер Г.И. История математики в школе: IV-VI кл.: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1981. 239 с.
9. Державний стандарт початкової загальної освіти. *Початкова школа*. 2011. № 7. С. 1-18.
10. Зміни до навчальних програм початкової школи. URL: http://Ed-era.ua.
11. Коваль Л. В., Скворцова С. О. Методика навчання математики: теорія і практика: Підручник для студентів за спеціальністю 6.010100 «Початкове

навчання», освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» [2-ге вид., допов. і переробл.]. Х.: ЧП «Принт-Лідер», 2011. 414 с.

12. Лишенко Г. П. Вивчення величин у початкових класах. Одеса: Пальміра, 2006. 100 с.
13. Математика: 5 – 12 класи: Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. К.-Ірпінь: Перун, 2005. 32 с.
14. Математика-5. Підручник для 5 класу / За ред. Г.Янченко. Тернопіль: Підручники і посібники, 2001. 272 с.
15. Моро М.Г., Пишкало А.М. Методика навчання математики в 1-3 класах: Посібник для вчителя. К.: Рад. школа, 1979. 376 с.
16. Навчальні програми для загальноосвітніх навчальних закладів. 1 – 4 класи. К.: Видавничий дім «Освіта», 2011. 392 с. С. 138-170 (математична освітня галузь).
17. Нова українська школа. Концептуальні засади реформування середньої школи. МОН 27. 10. 2016 р. URL: https://www.kmu.gov.ua/storage/app/media/reforms/ukrainska-shkola-compressed.pdf. 3.
18. Новий Державний стандарт початкової освіти URL: nus.org.ua/uryad-opublikuvav-novyj-derzhstandart-pochatkovoj-osvity-docyment.pdf.
19. Підручники з математики для початкової школи. 1-4 клас /авт. М. В. Богданович, Г. П. Лишенко. К.: 2015-2020 рр.
20. Підручники з математики для початкової школи. 1-4 клас. / авт. С. Скворцова. К.: 2015-2020 рр.
21. Синякова О. Ейдетика на уроках математики. Ознайомлення з дробами. 4 клас. Початкова освіта. 2008. Січень. № 2 (234).
22. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. К.: Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.
23. Сухарева Л.С. Навчальні ігри на уроках математики. 1 - 4 класи. Х.: Вид. група «Основа», 2007. 176 с.

ДЛЯ НОТАТОК