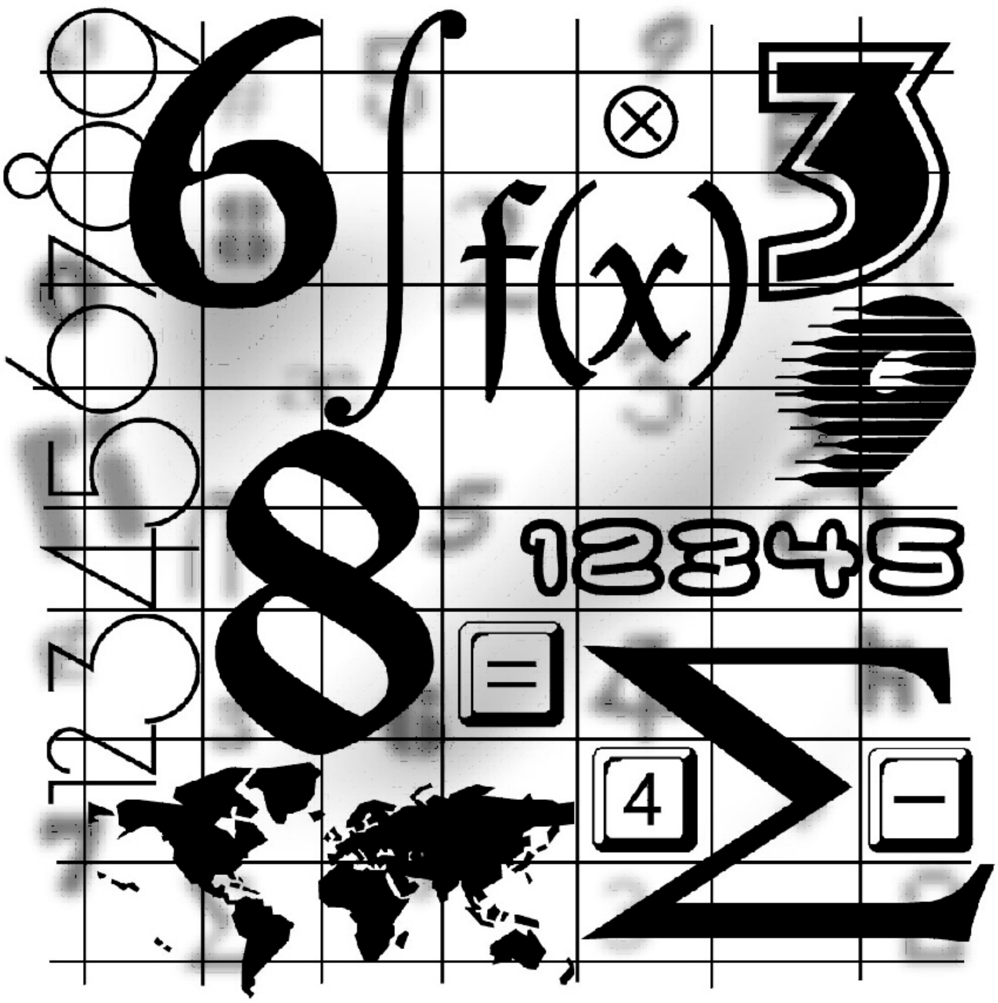
Л. С. Тесленко, О. М. Чадаєв, Я. П. Менько

Комплексний аналіз



**Навчальний посібник
для студентів механіко-математичних факультетів
вищих навчальних закладів**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. В.О. Сухомлинського

Л. С. Тесленко, О. М. Чадаєв, Я. П. Менько

Комплексний аналіз

Навчальний посібник
для студентів механіко-математичних факультетів
вищих навчальних закладів

Миколаїв – 2019

УДК 517.912
ББК 22.161
Т 36

Рецензенти:
ХОМЧЕНКО А.Н., доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри прикладної та вищої математики Чорноморського державного університету імені Петра Могили,
МАЙБОРОДА А.В., кандидат економічних наук, професор, доцент кафедри вищої математики Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова.

Рекомендовано вченою радою механіко-математичного факультету Миколаївського національного університету імені В.О. Сухомлинського як навчальний посібник для студентів механіко-математичних факультетів вищих навчальних закладів (протокол № 10 від 06.06.2018 р.)

Т 36 Тесленко Л.С. та ін.
Комплексний аналіз. Навчальний посібник для студентів механіко-математичних факультетів вищих навчальних закладів. / Тесленко Л. С., Чадаєв О. М., Менько Я. П. – Миколаїв: МНУ, 2019. 121 с.

Посібник створений у відповідності до навчальній програми курсу “Комлексний аналіз” спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика).

Основні розділи посібника: комплексні послідовності і ряди, функції комплексної змінної, похідна і аналітичність функції комплексної змінної, інтеграл, теорія залишків та її застосування до обчислення інтегралів. Матеріали кожного заняття містять посилання на літературу, короткі теоретичні відомості, зразки розв’язання задач, набір завдань для роботи студентів в аудиторії, завдання підвищеної складності і домашнє завдання.

Призначений для студентів фізико-математичних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 517.912
ББК 22.161

Зміст

Вступ

Даний посібник містить методичні рекомендації і дидактичні матеріали до 17 практичних занять, які складені відповідно до програми курсу комплексного аналізу для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика).

Методичні рекомендації складаються з теоретичних відомостей, необхідних для вивчення навчального матеріалу, і прикладів розв'язання основних типів задач.

Дидактичні матеріали містять завдання різної складності, дозволяють викладачеві суттєво активізувати пізнавальну діяльність студентів при вивченні математичного аналізу. А саме:

- індивідуалізувати навчання за темпом, обсягом за змістом;
- поширити в практику вузівського навчання елементи самонавчання;
- навчити студентів виконувати творчі завдання та розв'язувати задачі підвищеної складності;
- налагодити взаємодопомогу в навчанні між студентами академічної групи;
- поєднати аудиторні і позааудиторну роботу студентів при вивченні математичного аналізу та ін.

Цій посібник буде корисним також студентам заочної форми навчання при вивченні комплексного аналізу.

Матеріали кожного практичного заняття складається з чотирьох частин.

Перша частина містить: назву теми; посилання на літературу; короткі теоретичні відомості, необхідні для розв'язання задач по темі; зразки розв'язання задач з методичними вказівками і поясненням до розв'язків; алгоритми розв'язків найбільш типових задач; запитання для самоперевірки.

Друга частина містить набір завдань з розрахунку, як правило, на дві академічні години роботи студентів в аудиторії. Якщо вони не встигли виконати всі завдання, то повинні доопрацювати їх вдома. Це дозволяє індивідуалізувати самостійну роботу студентів за темпом.

Третя частина містить завдання підвищеної складності, що дозволяє індивідуалізувати навчання за складністю та обсягом.

Четверта частина містить домашнє завдання.

Навчальний посібник "Комплексний аналіз" пройшов апробацію на механіко-математичному факультеті Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського та одержав позитивну оцінку у студентів спеціальності "Математика" і викладачів кафедри фізики та математики.

Практичне заняття № 1

Множина комплексних чисел

Частина I

а) ***Основні теоретичні відомості***
([1], с.215 – 220; [2], с.311-320).

1. Означення 1. Комплексним числом називається число виду $z = x + i\,y$, де x та y – дійсні числа, i – уявна одиниця, яка задовольняє рівність $i^2 = -1$. Запис комплексного числа у вигляді $z = x + i\,y$ називається алгебраїчною формою. Числа x та y називаються відповідно дійсною і уявною частиною комплексного числа z і позначаються $x = \mathrm{Re}\,z$, $y = \mathrm{Im}\,z$.

Якщо $y = 0$, то комплексне число $z = x + i\,0 = x$ є дійсним. Якщо $y \neq 0$, то $z = x + i\,y$ – число уявне, причому при $x = 0$ і $y \neq 0$ воно чисто уявне.

Множина комплексних чисел позначається C.

2. Означення 2. Два комплексних числа $z_1 = x_1 + i\,y_1$ і $z_2 = x_2 + i\,y_2$ називаються рівними, якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$. Комплексне число $z = x + i\,y$ дорівнює нулю тільки тоді, коли $x = 0$ і $y = 0$.

3. Якщо кожному комплексному числу $z = x + i\,y$ поставити у відповідність у площині XOY точку $(x; y)$ з координатами x та y (рис. 1), то між множиною всіх комплексних чисел і множиною всіх точок площини буде встановлено взаємно однозначну відповідність. Тому далі замість слова "число z" часто говоритимемо "точка z" і навпаки.

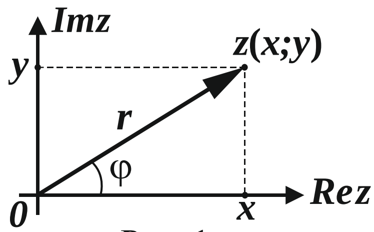


Рис. 1

Число $z = x + i\,y$ називається афіксом точки $(x; y)$. Площина, точки якої зображають комплексні числа, називається комплексною числовою площиною, або просто комплексною площиною. Вісь абсцис при цьому називається дійсною віссю, а вісь ординат – уявною віссю.

Комплексне число $z = x + iy$ можна також зображати вектором, початок якого лежить у точці $(0;0)$ а кінець – у точці $(x; y)$.

4. Означення 3. Модулем комплексного числа $z = x + iy$ називається число $|z|$, яке визначається рівністю $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Геометрично

модуль комплексного числа $z = x + iy$ дорівнює довжині вектора $(x; y)$.

Кожне комплексне число z має модуль, який визначається однозначно, причому $0 \le |z| < +\infty$. Число нуль є єдине комплексне число, модуль якого дорівнює нулю.

Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ називається кут φ, який утворює вектор $(x; y)$ с додатним напрямом дійсної осі. Аргумент комплексного числа z позначається $\operatorname{Arg} z$. Кут φ вважається додатним, якщо обертання додатної частини дійсної осі навколо початку відбувалося проти годинникової стрілки, і від'ємним, якщо це обертання відбувалося за годинниковою стрілкою (рис. 1).

Аргумент має кожне комплексне число z, відмінне від нуля, причому $-\infty < \operatorname{Arg} z < +\infty$. Аргумент визначається з точністю до сталого доданка виду $2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Аргумент числа $z = 0$ є невизначеним.

Одне з нескінченної множини значень $\operatorname{Arg} z$, яке належить проміжку $(-\pi; \pi]$, називають головним значенням і позначають $\arg z$. Отже,

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...),$$

де $-\pi < \arg z \le \pi$.

5. Головне значення аргументу числа $z = x + iy$ можна обчислювати за формулою

$$\arg z = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, \ \textit{при} \ x = 0 \ \ i \ \ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \ \textit{при} \ x = 0 \ \ i \ \ y < 0, \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, \ \textit{при} \ x > 0, \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \pi, \ \textit{при} \ x < 0 \ \ i \ \ y \ge 0, \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - \pi, \ \textit{при} \ x < 0 \ \ i \ \ y < 0. \end{cases}$$

6. Число $\overline{z} = x - iy$ називається спряженим для числа $z = x + iy$. Оскільки $\overline{\overline{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$, то z і $\overline{z}$ – взаємно спряжені числа. Для них справедливі рівності:

$$|z| = |\overline{z}|, \qquad z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

і, якщо z не є дійсним від'ємним числом, то $\arg \overline{z} = -\arg z$.

Для дійсних від'ємних значень z маємо $\arg z = \arg \overline{z} = \pi$. Точки z і $\overline{z}$ на комплексній площині розташовані симетрично відносно дійсної осі.

7. <u>Означення 4</u>. Сума, різниця, добуток, частка двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x_2 + iy_2$ визначаються рівностями:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0).$$

Для операцій над комплексними числами справедливі ті ж самі закони, що і для елементів поля.

8. Дійсна і уявна частини комплексного числа $z = x + iy \neq 0$ через модуль і, аргумент цього числа пов'язані формулами:

$$\operatorname{Re} z = |z| \cos \operatorname{Arg} z, \quad \operatorname{Im} z = |z| \sin \operatorname{Arg} z,$$

а саме число z може бути записане у вигляді:

$$z = |z| \, (\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z) = |z| \, (\cos \arg z + i \sin \arg z).$$

Ця форма запису комплексного числа z називається тригонометричною.

9. Добуток двох комплексних чисел, записаних в тригонометричній формі $z_1 = |z_1| \, (\cos \operatorname{Arg} z_1 + i \sin \operatorname{Arg} z_1)$ і $z_2 = |z_2| (\cos \operatorname{Arg} z_2 + i \sin \operatorname{Arg} z_2)$ дорівнює

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| \big(\cos(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) + i \sin(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2)\big).$$

Звідси $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$, тобто модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку модулів, а аргумент добутку дорівнює сумі аргументів множників.

10. Формула Муавра.

$$\big(|z| (\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)\big)^n = |z|^n \, (\cos n \operatorname{Arg} z + i \sin n \operatorname{Arg} z).$$

11. Частка комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі дорівнює

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2) + i \sin(\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2)).$$

Отже, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$, тобто модуль частки дорівнює частці модулів діленого і дільника, а аргумент частки дорівнює різниці аргументів діленого і дільника.

12. Означення 5. Коренем n-го ступеня з комплексного числа z називається комплексне число w, яке є розв'язком рівняння $w^n = z$, де z – задане комплексне число, n – натуральне число. При $z \neq 0$ існує n різних комплексних чисел $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, таких, що $w_k^n = z$, $k = \overline{0; n-1}$. Ці числа, що позначаються символом $\sqrt[n]{z}$, обчислюються за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}_+ \left(\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right) \quad (k = \overline{0; n-1}),$$

де $\sqrt[n]{|z|}_+$ є арифметичне значення кореня $\sqrt[n]{|z|}$. Геометрично ці n значень виразу $\sqrt[n]{z}$ зображуються вершинами деякого правильного n-кутника, який вписано в коло радіуса $\sqrt[n]{|z|}_+$ з центром у початку координат.

б) ***Питання для самоперевірки***

1. Дати означення комплексного числа.
2. Які комплексні числа називаються рівними, спряженими?
3. Серед наведених чисел

$$z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = -2 - 3i, \quad z_3 = -2, \quad z_4 = 5i,$$
$$z_5 = 2 + 3i, \quad z_6 = -2 + 3i, \quad z_7 = 2 - 3i, \quad z_8 = -5i$$

виберіть: а) чисто уявні комплексні числа; б) чисто дійсні комплексні числа; в) спряжені комплексні числа; г) рівні комплексні числа:

4. Дати означення модуля комплексного числа. Знайти модулі комплексних чисел $3 + 4i$, $1 - i$, $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$.
5. Дати означення аргументу комплексного числа. Знайти головні значення аргуменів комплексних чисел $2 - 2i$, $-1 + i$, $\sqrt{3} - i$.
6. Як визначається добуток і частка двох комплексних чисел?
7. Що називається тригонометричною формою комплексного числа?
8. Скільки значень має корінь n-го степеня з комплексного числа?
9. Як знайти всі значення кореня n-го степеня?

в) ***Методичні вказівки до розв'язування задач***

1. Виконати дії: $3 - i + \dfrac{2i}{1+i}$.

Розв'язання. Спочатку виконаємо ділення у другому доданку, помноживши дріб на число, спряжене до знаменника, а потім виконаємо додавання двох комплексних чисел. Матимемо:

$$3-i+\frac{2i}{1+i}=3-i+\frac{2i\cdot(1-i)}{(1+i)(1-i)}=3-i+\frac{2i-2i^2}{1^2+1^2}=$$

$$=3-i+\frac{2i+2}{2}=3-i+i+1=4.$$

Відповідь: 4.

2. Довести нерівності

$$|\operatorname{Re} z|\le|z|,\quad |\operatorname{Im} z|\le|z|,\quad |z|\le|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|.$$

Розв'язання. Оскільки $|x|=\sqrt{x^2}$, $\sqrt{x^2+y^2}\le|x|+|y|$, то

$$|\operatorname{Re} z|=\sqrt{x^2}\le\sqrt{x^2+y^2}=|z|,\qquad |\operatorname{Im} z|=\sqrt{y^2}\le\sqrt{x^2+y^2}=|z|,$$

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\le|x|+|y|=|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|,$$

тобто модуль як дійсної, так і уявної частин комплексного числа z не перевищує модуля цього числа, а модуль числа z не перевищує суми модулів його дійсної та уявної частин.

3. Розв'язати рівняння: $z\cdot\overline{z}+2i=2\overline{z}+4$.

Розв'язання. Подамо число z в алгебраїчної формі $z=x+iy$, тоді $\overline{z}=x-iy$. Підставимо вирази z і $\overline{z}$ в рівняння, матимемо:

$$(x+iy)(x-iy)+2i=2(x-iy)+4,$$

$$(x^2+y^2)+2i=(2x+4)-2iy.$$

Маємо рівність двох комплексних чисел, яка буде справджуватись тоді і тільки тоді, коли рівні їх дійсні і уявні частини, тобто:

$$\begin{cases}x^2+y^2=2x+4,\\ 2=-2y;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=2x+4,\\ y=-1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-3=0,\\ y=-1;\end{cases}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=3,\\ y=-1;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ y=-1.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Тобто розв'язком рівняння будуть два комплексних числа $z_1=3-i$ і $z_2=-1-i$.

Відповідь: $z_1=3-i$, $z_2=-1-i$.

4. Знайти модуль і головне значення аргументу комплексного числа $z=-\sqrt{3}-i$. Подати це число в тригонометричній формі.

<u>*Розв'язання.*</u> Знайдемо модуль z: $|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2.$ За формулою (1) знайдемо аргумент числа. Оскільки $x = -\sqrt{3} < 0$ і $y = -1 < 0$, то

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi = \operatorname{arctg}\frac{-1}{-\sqrt{3}} - \pi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

Аргумент комплексного числа легко знайти з геометричних міркувань. Проілюструємо це на прикладі даного числа. Зобразимо число на комплексній площині $z = -\sqrt{3} - i$ (рис. 2). Відмітимо головне значення φ аргументу. Напрям відліку кут φ – від'ємний. Модуль φ дорівнює сумі прямого кута і гострого кута α: $\varphi = -\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Гострий кут α легко знайти з прямокутного трикутника AOB:

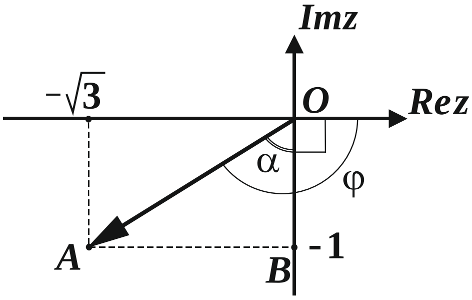


Рис. 2

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Маємо $\varphi = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{5\pi}{6}$.

Отже $z = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

Зауважимо, що за властивостями тригонометричних функцій число z можна подати у вигляді $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, але це не буде тригонометричною формою.

Відповідь: $z = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

5. Знайти множину точок комплексної площини, яка задовольняє умову: а) $|z - 2| = |1 - 2z|$; б) $|z - 1| \le |z + 1|$, в) $\begin{cases} \frac{\pi}{4} \le arg\, z \le \frac{3\pi}{4}; \\ |z - 3i| \ge 1. \end{cases}$

<u>*Розв'язання.*</u>

а) Якщо $z = x + iy$, то дане рівняння можна записати у вигляді

$$|x + iy - 2| = |1 - 2(x - iy)| \text{ або } |x - 2 + iy| = |1 - 2x + 2iy|.$$

Скориставшись означенням модуля, матимемо:

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(1-2x)^2+4y^2}\,,$$

$$(x-2)^2+y^2=(1-2x)^2+4y^2,$$

$$x^2-4x+4+y^2=1-4x+4x^2+4y^2,$$

$$3x^2+3y^2=3,$$

$$x^2+y^2=1.$$

Отже, геометричним образом даного рівняння є коло з центром в початку координат і радіусом одиниця.

б) Дану нерівність можна подати у вигляді $|x+iy-1|\le|x+iy+1|$. Скориставшись означенням модуля, матимемо:

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}\le\sqrt{(x+1)^2+y^2}\,,$$

$$(x-1)^2+y^2\le(x+1)^2+y^2,$$

$$x^2-2x+1+y^2\le x^2+2x+1+y^2,$$

$$-4x\le 0$$

$$x\ge 0.$$

Отже, геометричним образом даної нерівності є права півплощина комплексної площини з границею.

в) Перша нерівність системи $\frac{\pi}{4}\le\arg z\le\frac{3\pi}{4}$ визначає кут між променями $\arg z=\frac{\pi}{4}$ і $\arg z=\frac{3\pi}{4}$. Другу нерівність можна подати у вигляді $x^2+(y-3)^2\ge 1$, тому вона визначає зовнішність круга радіуса одиниця с центром в точці $z_0=3i$. Отже, дана система визначає кут $\frac{\pi}{4}\le arg\,z\le\frac{3\pi}{4}$ с вирізаною частиною круга (рис. 3).

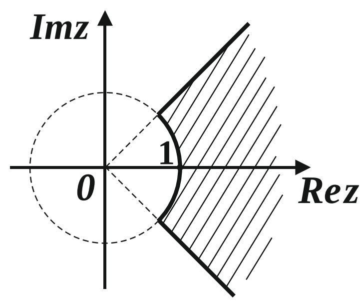


Рис. 3

6. Знайти і зобразити всі значення кореня із числа $\sqrt[3]{1+i}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Оскільки $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)$, то

$$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right),$$

Для $k=0{,}1{,}2$ матимемо такі три значення кореня:

$$k=0:\quad w_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right);$$

$$k=1:\quad w_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$k=3:\quad w_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12\pi}\right).$$

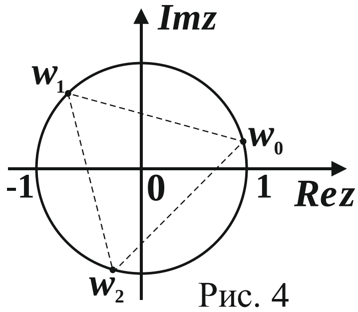


Рис. 4

Побудувавши точки w_0, w_1, w_2 у комплексній площині, отримаємо правильний трикутник, вершини якого і є значеннями кореня із числа $\sqrt[3]{1+i}$ (рис. 4).

Частина II
Виконати завдання

1. Обчислити:

$$1)\ \frac{1}{i};\ 2)\ \frac{5i-3}{i-1};\ 3)\ \frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x};\ 4)\ (2+i)(2-i);\ 5)\ 1+\frac{i}{1-i}.$$

2. Довести рівності і нерівності:

$$1)\quad \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2};\quad 2)\ \operatorname{Re} z=\frac{z+\bar{z}}{2};\quad 3)\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};\quad 4)\ |z|\ge|\operatorname{Im} z|.$$

3. Розв’язати рівняння: 1) $z\bar{z}=2z-1$; 2) $z+\bar{z}=2z^2$.

4. Знайти модулі і головні значення аргументів комплексних чисел. Записати ці числа в тригонометричній формі:

$$1)\ i;\ 2)\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2};\ 3)\ -5;\ 4)\ -1+i;\ 5)\ -\frac{7}{2}-i\frac{7\sqrt{3}}{2};\ 6)\ 5-7i.$$

5. Знайти множину точок комплексної площини, яка задовольняє умову:

$$1)\ |z-z_0|=R,\ |z-z_0|>R,\ |z-z_0|<R\ \ (R>0);\quad 2)\ \operatorname{Re} z\ge 0;$$

$$3)\ |z+1|<|2-z|;\ 4)\ \begin{cases}\dfrac{\pi}{4}\le\arg z\le\dfrac{3\pi}{4}\\ 1\le\operatorname{Im} z\le 2\end{cases};\ 5)\ \begin{cases}\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z+2\ge 0\\ |z-1-i|>1\end{cases}.$$

6. Знайти і зобразити всі значення кореня: 1) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[5]{32}$.

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. Нехай $z = x + iy \neq 0$. Записати в алгебраїчній формі вираз $\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{\bar{z}^2}$.

2. Обчислити $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{60}$.

3. Знайти добуток усіх коренів рівняння $z^8 = 1 - i$.

4. Яка множина в комплексної площині z визначається умовою $|z-1| \geq 2|z-i|$?

Частина IV
Домашнє завдання

1. Обчислити: 1) $\dfrac{1+i}{1-i}$; 2) $i + \dfrac{1}{i}$.

2. Довести рівності і нерівності:

1) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$; 2) $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$; 3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; 4) $|z| \geq |\operatorname{Re} z|$.

3. Розв’язати рівняння: 1) $\bar{z} = -3z - 1 + 2i$; 2) $z^2 + z \cdot \bar{z} = 8 - 4i$.

4. Знайти модулі і головні значення аргументів комплексних чисел. Записати ці числа в тригонометричній формі.

1) $-2i$; 2) $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$; 3) $2 - i\sqrt{3}$; 4) $3i - 1$.

5. Знайти множину точок комплексної площини, яка задовольняє умову:

1) $\begin{cases} 1 \leq \operatorname{Re} z < 2, \\ |\operatorname{Im} z| < 1; \end{cases}$ 2) $|z + i| \geq 1$; 3) $\operatorname{Re} z^2 < 1$;

4) $\begin{cases} \dfrac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \dfrac{5\pi}{6}, \\ -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1; \end{cases}$ 5) $1 \leq |z - 2i| \leq 2$.

6. Знайти і зобразити всі значення кореня: 1) $\sqrt[3]{2-2i}$; 2) $\sqrt[6]{64}$.

Відповіді

Частина II. 1. 1) $-i$; 2) $4-i$; 3) $\cos 2x + i\sin 2x$; 4) 5; 5) $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$.

3. 1) $z=1$; 2) $z_1=0$, $z_2=1$. **4.** 1) $1, \frac{\pi}{2}$; 2) $1, -\frac{\pi}{6}$; 3) $5, \pi$; 4) $\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}$; 5) $7, -\frac{2\pi}{3}$; 6) $\sqrt{74}, -\operatorname{arctg}\frac{7}{5}$. **5.** 1) коло радіуса R з центром в точці z_0; зовнішність круга, обмеженого цим колом; круг радіуса R з центром в точці z_0; 2) права півплощина комплексної площини; 3) $\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$ (півплощина); 4) рівнобічна трапеція, обмежена прямими $y=x$, $y=-x$, $y=1$ і $y=2$; 5) півплощина $x+y+2\geq 0$, з якої вирізано круг радіуса 1 з центром в точці $z_0=1+i$.

6. 1) $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi+6k\pi}{12}+i\sin\frac{\pi+6k\pi}{12}\right)$, $k=\overline{0;3}$;

2) $\sqrt[5]{32}=2\left(\cos\frac{2\pi k}{5}+i\sin\frac{2\pi k}{5}\right)$, $k=\overline{0;4}$.

Частина III. **1.** $\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. **2.** -2^{30}. **3.** $-1+i$.

Частина IV. **1.** 1) i; 2) 0. **3**. 1) $z=-\frac{1}{4}+i$; 2) $z_1=2-i$, $z_2=-2+i$.

4. 1) $|z|=2$, $-2i=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$;

2) $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}=1\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

3) $2-i\sqrt{3}=\sqrt{7}\left(\cos\left(-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\sin\left(-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; 4) $\sqrt{10}$, $\pi - arctg\, 3$.

5. 2) зовнішність круга радіуса 1 з центром в точці $z=-i$ із границею; 3) $x^2-y^2<1$; 5) кільце з центром в точці $(0;2)$, внутрішнім радіусом 1, зовнішнім радіусом 2.

6. 1) $\sqrt[3]{2-2i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi+8\pi k}{12}+i\sin\frac{-\pi+8\pi k}{12}\right)$, $k=\overline{0;2}$;

2) $\sqrt[6]{64}=2\left(\cos\frac{\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi k}{3}\right)$, $k=\overline{0;5}$.

Практичне заняття № 2

Послідовності і ряди комплексних чисел

Частина I

а) ***Основні теоретичні відомості***
([1], с.220 – 232; [2], с.349-351).

1. <u>Означення 1.</u> Нехай дано послідовність комплексних чисел $\{z_n\}$ ($n = 1,2,...$). Комплексне число $c = a + ib$ називається скінченою границею послідовності $\{z_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число $N(\varepsilon)$ таке, що $|z_n - c| < \varepsilon$ для всіх $n > N(\varepsilon)$.

2. <u>Означення 2.</u> Послідовність, яка має скінчену границю, називається збіжною, а послідовність, яка не має скінченої границі – розбіжною. Те, що число c є границею послідовності, символічно записується так:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \quad \text{або} \quad z_n \to c \ \ (n \to \infty).$$

3. <u>Означення 3.</u> Околом (ε-околом) точки c називається круг $|z - c| < \varepsilon$ з центром у точці c.

4. Геометрична інтерпретація границі послідовності. Якщо число c є границею послідовності $\{z_n\}$, то це означає, що всі точки z_n для $n > N(\varepsilon)$ містяться всередині круга радіуса ε з центром у точці c, тобто в ε-околі точки c (рис. 5).

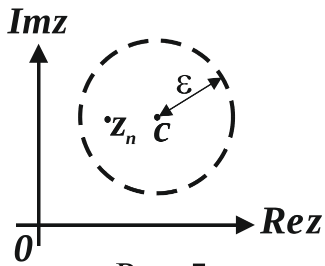


Рис. 5

5. <u>Означення 4.</u> Послідовність комплексних чисел $\{z_n\}$ має нескінченну границю, якщо для довільного додатного числа M знайдеться натуральне число $N(M)$ таке, що $|z_n| > M$ для всіх $n > N(M)$.

Якщо послідовність $\{z_n\}$ має нескінченну границю, то кажуть також, що вона прямує до нескінченності, або розбігається до нескінченності, і записують

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \quad \text{або} \quad z_n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

6. Геометрична інтерпретація нескінченної границі послідовності. Якщо послідовність $\{z_n\}$ має нескінченну границю, то геометрично це

означає, що, яке б не було число $M > 0$, всі точки z_n для $n > N(M)$ лежать поза кругом радіуса M з центром у точці $z = 0$.

7. Означення 5. Послідовність $\{z_n\}$ називається обмеженою, якщо існує таке число $C > 0$, що нерівність $|z_n| \le C$ виконується для всіх $n = 1,2,...$, тобто всі точки z_n належать кругу радіуса C з центром у точці $z = 0$. В противному разі послідовність $\{z_n\}$ називається необмеженою.

Якщо $z_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то послідовність $\{z_n\}$ необмежена. Обернене твердження невірне.

8. Для збіжних послідовностей комплексних чисел справедливі теореми, аналогічні до відповідних теорем, що стосуються збіжних послідовностей дійсних чисел.

9. Теорема (зв'язок між границею послідовності комплексних чисел і границями послідовностей дійсних чисел).

Для того, щоб послідовність $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ мала скінчену границю $c = a + ib$, необхідно і достатньо, щоб послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ мали скінченні границі, які відповідно дорівнюють a і b.

10. Властивості збіжних послідовностей комплексних чисел:

а) Збіжна послідовність має тільки одну границю.

б) Збіжна послідовність обмежена.

в) Якщо $z_n = c$ для $n = 1,2,..$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$.

г) Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(1)} = c_1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(2)} = c_2$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(z_n^{(1)} + z_n^{(2)}\right) = c_1 + c_2, \quad \lim_{n\to\infty}\left(z_n^{(1)} - z_n^{(2)}\right) = c_1 - c_2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(z_n^{(1)} \cdot z_n^{(2)}\right) = c_1 \cdot c_2, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{z_n^{(1)}}{z_n^{(2)}} = \frac{c_1}{c_2}$$

(остання рівність справедлива при додатковій умові: $c_2 \ne 0$).

д) Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} z_n^{(1)} = 0$, а $\left|z_n^{(2)}\right| \le C$ $(n = 1,2,...)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n^{(1)} \cdot z_n^{(2)}) = 0$.

11. Означення 6. Вираз виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + ... + z_n + ..., \tag{1}$$

де z_n $(n = 1,2,...)$ – комплексні числа, називається числовим рядом. Числа $z_1, z_2, ...$ називаються членами ряду, z_n – n-м, або загальним, членом ряду.

12. Означення 7. Суми

$$S_1 = z_1,$$
$$S_2 = z_1 + z_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

називаються частинними сумами ряду (1).

13. Означення 8. Ряд (1) називається збіжним, якщо збігається послідовність його частинних сум, і розбіжним, якщо послідовність його частинних сум розбігається.

14. Означення 9. Якщо ряд (1) збігається, то границю $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ називають сумою ряду (1) і записують $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, а число $R_n = S - S_n$ називають його n-ою остачею. Остача збіжного ряду прямує до нуля при $n \to \infty$.

15. Властивості рядів з комплексними членами.

а) Якщо ряд (1) збігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

б) Ряд (1) і ряд

$$z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+k} + \ldots \tag{2}$$

який утворено з ряду (1) відкиданням його перших n членів, одночасно збігаються або розбігаються, причому якщо ряд (1) збігається і має суму S, то ряд (2) також збігається і має суму, яка дорівнює $R_n = S - S_n$.

в) Якщо ряд (1) збігається і має суму S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cz_n$ також збігається і має суму, що дорівнює cS.

г) Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^{(1)}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^{(2)}$ збігаються і мають суми, які відповідно дорівнюють $S^{(1)}$ і $S^{(2)}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(z_n^{(1)} + z_n^{(2)}\right)$, який називається сумою рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^{(1)}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^{(2)}$, також збігається і має суму $S^{(1)} + S^{(2)}$.

д) Якщо ряд (1) збігається і має суму S, то ряд

$$(z_1 + z_2 + \ldots + z_{k_1}) + (z_{k_1+1} + z_{k_1+2} + \ldots + z_{k_2}) +$$
$$+ (z_{k_2+1} + \ldots + z_{k_3}) + \ldots + (z_{k_\nu+1} + \ldots + z_{k_{\nu+1}}) + \ldots,$$

який утворено з ряду (1) об'єднанням його членів у групи, також збігається і має суму, що дорівнює S.

16. Теорема (критерій Коші збіжності ряду). Для того щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігався, необхідної достатньо, щоб для довільного $\varepsilon > 0$ існувало натуральне число $N(\varepsilon)$ таке, що $\left| z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p} \right| < \varepsilon$ для всіх $n > N(\varepsilon)$ і $p = 1,2,\ldots$

17. Теорема. Якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| z_n \right| = \left| z_1 \right| + \left| z_2 \right| + \ldots + \left| z_n \right| + \ldots \tag{3}$$

утворений з модулів членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

18. Означення 10. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| z_n \right|$, утворений з модулів членів даного ряду. Якщо ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| z_n \right|$ розбігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ називається умовно збіжним.

19. Теорема. Для того щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, де $z_n = x_n + i y_n$ збігався до числа $S = P + iQ$, необхідно і достатньо, щоб ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots \tag{5}$$

збігалися відповідно до P і Q. Для того, щоб $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігався абсолютно, необхідно і достатньо, щоб збігалися абсолютно ряди (4) і (5).

20. Нехай дано два ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(1)} = z_1^{(1)} + z_2^{(1)} + \ldots + z_n^{(1)} + \ldots, \tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(2)} = z_1^{(2)} + z_2^{(2)} + \ldots + z_n^{(2)} + \ldots \tag{7}$$

Тоді ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots , \tag{8}$$

де $w_n = z_1^{(1)} z_n^{(2)} + z_2^{(1)} z_{n-1}^{(2)} + \ldots + z_n^{(1)} z_1^{(2)}$ називається добутком за Коші рядів (6) та (7).

21. Властивості абсолютно збіжних рядів:

1) Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається абсолютно і має суму S, то ряд, утворений з даного переставлянням його членів, також збігається абсолютно і має ту ж суму S.

2) Якщо ряди (6) і (7) збігаються абсолютно і мають суми, які відповідно дорівнюють $S^{(1)}$ і $S^{(2)}$, то ряд (8), що є добутком за Коші рядів (6) і (7), також збігається абсолютно і має суму, яка дорівнює добутку $S^{(1)} S^{(2)}$.

б) *Питання для самоперевірки.*

1. Дати означення границі послідовності.
2. Навести приклад збіжної і розбіжної послідовності комплексних чисел.
3. Сформулюйте теорему про зв'язок між границею послідовності комплексних чисел і границями послідовностей дійсних чисел.
4. Чи будуть збіжними такі послідовності:

а) $\{z_n\} = \left\{ \dfrac{2n+1}{3n-2} + i \cdot \dfrac{n+1}{n} \right\}$; б) $\{z_n\} = \left\{ \dfrac{n^2-3}{n+1} + i \cdot \dfrac{1}{n} \right\}$?

5. Яку послідовність називають обмеженою?
6. Чи будуть обмеженими такі послідовності:

а) $\{z_n\} = \left\{ (-1)^n + \dfrac{i}{n} \right\}$; б) $\{z_n\} = \left\{ \dfrac{1}{n} + i \cdot n \right\}$?

7. Дати означення ряду комплексних чисел.
8. Що називається частинною сумою ряду?
9. Які ряди називаються збіжними? Що називають сумою збіжного ряду?
10. Які ряди називають розбіжними?
11. Сформулюйте критерій збіжності ряду.
12. Дати означення абсолютно і умовно збіжних рядів. Навести приклади.
13. Сформулюйте основні властивості абсолютно збіжних рядів. Які з цих властивостей не мають місця для умовно збіжних рядів?

в) *Методичні вказівки до розв'язування задач*

1. Визначити, чи є послідовність $\{z_n\} = \left\{\dfrac{2ni}{n+i}\right\}$ обмеженою.

Розв'язання. За означенням послідовність $\{z_n\}$ буде обмеженою тоді, коли існує таке число $C > 0$, що $|z_n| \le C$ для всіх $n = 1,2,...$ Оцінимо модуль загального члена послідовності:

$$|z_n| = \left|\frac{2ni}{n+i}\right| = \frac{|2ni|}{|n+i|} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{2n}{\sqrt{n^2}} = 2.$$

Отже, існує таке число $C = 2 > 0$, що $|z_n| \le 2$ для всіх $n = 1,2,...$, а значить, дана послідовність обмежена.

2. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2ni+1}{3n} = \dfrac{2}{3}i$ за означенням границі.

Розв'язання. Візьмемо довільне число ε і будемо шукати натуральне число $N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$\left|\frac{2ni+1}{3n} - \frac{2}{3}i\right| < \varepsilon.$$

Розв'яжемо нерівність відносно n:

$$\left|\frac{2ni+1}{3n} - \frac{2}{3}i\right| = \left|\frac{2ni+1-2ni}{3n}\right| = \left|\frac{1}{3n}\right| = \frac{1}{3n} < \varepsilon,$$

$$3n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad n > \frac{1}{3\varepsilon}.$$

Якщо за $N(\varepsilon)$ обрати $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]$, то маємо:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{3\varepsilon}\right] \;\; \forall n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; \left|\frac{2ni+1}{3n} - \frac{2}{3}i\right| < \varepsilon.$$

За означенням 1 границі це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2ni+1}{3n} = \dfrac{2}{3}i$.

3. Обчислити границю послідовності $\{z_n\} = \dfrac{n+1}{n} + i \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$.

Розв'язання. Для того щоб знайти границю $c = a + ib$ послідовності $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$, потрібно знайти границі послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, які відповідно дорівнюють a і b. Знайдемо їх:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1;$$

$$b=\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right)^{-\frac{1}{n}\cdot 2n}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$$

Тоді дана послідовність збігається до числа $c=1+i\cdot e^{-2}$.

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=1+i\cdot e^{-2}$.

4. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+i\frac{1}{n}\right)$.

<u>*Розв'язання.*</u> Дослідимо збіжність кожного з рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.
Перший ряд збіжний як геометричний ряд із знаменником $q=\frac{1}{2}$, $|\,q\,|<1$, а другий – розбіжний як гармонічний ряд. Тоді вихідний ряд є розбіжним.

5. Дослідити абсолютну збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(in)^n}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Складемо ряд із модулів: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n!}{(in)^n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{|\,in\,|^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.
Дослідимо його збіжність за ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{1}{e}<1.$$

Отримали, що ряд із модулів збігається, а значить даний ряд збігається абсолютно.

Частина II
Виконати завдання

1. Визначити, чи обмежені послідовності:

1) $z_n=i^{2n}\cdot\frac{n+1}{n}$; 2) $z_n=n\cdot\arg\left(\cos\frac{1}{n}+i\sin\frac{1}{n}\right)$;

3) $z_n=\frac{n^2+1}{in}$; 4) $z_n=\arg(z^n)$, $z\neq 0$.

2. Обчислити границі послідовностей:

1) $z_n=\frac{n+1}{2n+3}+i\frac{1+n^2}{3n^2-n+1}$; 2) $z_n=n\cdot(\sqrt[n]{2}-1)+i\cdot\frac{n-1}{3n}$;

3) $z_n = \sqrt{n^2+n} - n + i \cdot \dfrac{\ln(2+n)}{\ln(3+n)}$;

4) $z_n = n^2\left(1-\cos\dfrac{3}{n}\right) + i(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n})\sin\dfrac{1}{n}$;

5) $z_n = \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n + i\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{-n}$.

3. Дослідити збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n\ln n} + i\dfrac{2}{n^2+1}\right)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} + i\dfrac{4^n}{n!}\right)$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{2n^4+n+1} + i\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{1}{n} + i\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)$.

4. Дослідити абсолютну збіжність рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n\cdot 2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3+i^n)^n}{n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!(e-i)^n}{n^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n\cdot i}{3n+i}\right)^n$.

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. З'ясувати, при яких значеннях комплексного параметра a послідовності збігаються: 1) $\{a^n\}$; 2) $\left\{\dfrac{a^n}{n!}\right\}$; 3) $\{na^n\}$; 4) $\{1+a+\ldots+a^n\}$.

2. Знайти всі значення дійсного параметра a, при яких збігаються ряди: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{n!}i^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\ln(n^2+1))^a}{n}i^n$.

Частина IV
Домашнє завдання

1. Визначити, чи обмежені послідовності: 1) $z_n = i^n$; 2) $z_n = n + \dfrac{i}{n}$?

2. Обчислити границі послідовностей:

1) $z_n = n\cdot\sin\dfrac{1}{n} + i\cdot\dfrac{a^n}{n!}$, $a - \textit{дійсне}$, $a>0$;

2) $z_n = \left(\dfrac{n+i}{n-i}\right)^2$; 3) $z_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} + i\cdot\dfrac{2n}{100+3n}$.

3. Дослідити збіжність рядів:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}+i\frac{2^n}{n!}\right);\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{n!}+i\frac{2n-1}{3^n}\right).$$

4. Дослідити абсолютну збіжність рядів:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{n^2}\right); \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n+n}+i\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-n^2}\right);$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n}+i\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right); \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}+i\frac{2^n}{n!}\right).$$

Відповіді

Частина II. 1. 1), 2), 4) – обмежені, 3) – необмежена. **2**. 1) $\frac{1}{2}+\frac{i}{3}$; 2) $ln\,2+\frac{1}{3}i$; 3) $\frac{1}{2}+i$; 4) $\frac{9}{2}+i$; 5) $\sqrt{e}-i\sqrt[3]{e}$. **3.** 1) розбіжний; 2) збіжний; 3) збіжний умовно; 4) розбіжний. **4.** 1) абсолютно збіжний; 2) не є абсолютно збіжним; 3) не є абсолютно збіжним; 4) абсолютно збіжний.

Частина III. **1.** 1) при $|a|<1$ і при $a=1$; 2) при всіх a; 3) при $|a|<1$; 4) при $|a|<1$. **2.** 1) при $a<0$; 2) при $a>1$.

Частина IV. **1.** 1) обмежена; 2) не обмежена. **2**. 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{2}{3}i$. **3.** 1) збіжний; 2) збіжний. **4.** 1) збіжний умовно; 2) абсолютно збіжний; 3) абсолютно збіжний; 4) розбіжний.

Практичне заняття № 3

Функції комплексної змінної

Частина І

а) ***Основні теоретичні відомості***
([1], с.233 – 242; [2], с.320-327).

1. Означення 1. Нехай E – довільна множина комплексних чисел. Якщо кожному комплексному числу $z \in E$ за певним правилом (законом) відповідає одне або кілька комплексних чисел w деякої множини G, то кажуть, що на множині E визначено функцію $w = f(z)$.

Множину E при цьому називають областю визначення або областю існування функції, z – незалежною змінною або аргументом, w – залежною змінною або функцією, G – множиною значень функції.

2. Задання комплексної функції комплексної змінної $w = u + iv = f(z)$, $z = x + iy \in E$, рівносильне заданню системи двох дійсних функцій від двох дійсних змінних:

$$\begin{cases} u = u(x;y), \\ v = v(x;y) \end{cases}$$

для всіх $(x;y) \in E$ таких, що для довільного $z = x + iy \in E$ маємо $f(z) = u(x;y) + i\,v(x;y)$. Функція $u(x;y)$ називається дійсною частиною функції комплексної змінної, а $v(x;y)$ – її уявною частиною. При цьому пишуть $u(x;y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x;y) = \operatorname{Im} f(z)$.

3. Означення 2. Функція $w = f(z)$, визначена в області E, називається однолистою в цій області, якщо для кожної пари різних точок z_1 і z_2, взятих з області E, числа $w_1 = f(z_1)$ і $w_2 = f(z_2)$ також різні.

4. Означення 3. Нехай функція $w = f(z)$ визначена в усіх точках області E, крім, можливо, внутрішньої точки $z_0 \in E$. Комплексне число $c = a + ib$ називають границею функції $w = f(z)$ в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх $z \in E$, які задовольняють нерівність $0 < |z - z_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(z) - c| < \varepsilon$.

Той факт, що c є границею функції $w = f(z)$ в точці $z_0 \in E$, записують так: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = c$ або $f(z) \to c$, $z \to z_0$.

5. Якщо c – границя функції $f(z)$ в точці z_0, то з геометричної точки зору це означає, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $z \in E$ $(z \neq z_0)$, що містяться в крузі $\left| z - z_0 \right| < \delta$, точки $w = f(z)$ знаходяться в крузі $\left| w - c \right| < \varepsilon$ (рис. 3).

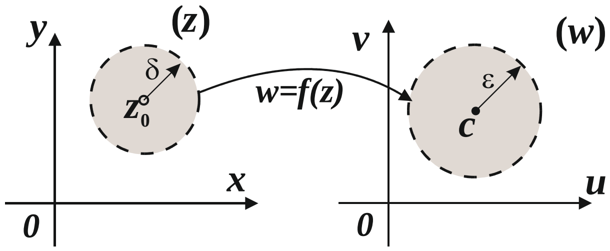


Рис. 6

6. Теорема 1. Для того, щоб функція $w = f(z)$ в точці $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in E$ мала границю $c = a + ib$, необхідно і достатньо, щоб дійсні функції $u = u(x;y)$ і $v = v(x;y)$ в точці $(x_0;y_0)$ мали відповідно границі a і b.

7. <u>Теорема 2</u>. Якщо функції $f(z)$ і $g(z)$ в точці z_0 мають границі, то функції $f(z) \pm g(z)$ і $f(z) \cdot g(z)$ мають в цій точці границі, які дорівнюють:

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z);$$

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) \cdot \varphi(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim_{z \to z_0} \text{g}(z).$$

Якщо, крім того, $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) \neq 0$, то існує границя функції $\dfrac{f(z)}{g(z)}$, причому $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)}$.

8. Функція $w = f(z)$ в точці z_0 називається нескінченно великою і записується $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, якщо для будь-якого як завгодно великого числа $M > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх $z \in E$ $(z \neq z_0)$, які задовольняють нерівність $\left| z - z_0 \right| < \delta$ виконується нерівність $\left| f(z) \right| > M$.

б) *Питання для самоперевірки.*

1. Дати означення функції комплексної змінної.

2. Визначити область визначення функцій: а) $w = \dfrac{2}{z}$; б) $w = \dfrac{1}{z^2 + 1}$.

3. Знайти дійсну і уявну частини функцій: а) $w = x - 2y + i(2x + y)$;

б) $w = x^2 - 1$; в) $w = x + 3y - i(x - y)$; г) $w = \dfrac{-2ix - y - iy}{2}$.

4. Яка функція називається однолистою в області?

5. Що називають границею функції в точці?

6. Сформулюйте теорему, яка встановлює зв'язок між границею функції і границями її дійсної і уявної частин.

7. Чи існують границі таких функцій: а) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{z}$; б) $\lim\limits_{z \to 0} \sin \dfrac{1}{z}$?

в) *Методичні вказівки до розв'язування задач.*

1. Виділити дійсну і уявну частини функції $w = \dfrac{1}{\bar{z}}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Для виділення дійсної і уявної частини функції потрібно в ліву частину рівності $w = f(z)$ замість w підставити $u + iv$, в праву – замість z підставити $x + iy$, потім прирівняти дійсну частину дійсній, уявну – уявній. Матимемо:

$$u + iv = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{\overline{x + iy}} = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Відділяючи дійсну частину від уявної, знайдемо:

$$u = \operatorname{Re} w = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \operatorname{Im} w = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Відповідь: $\operatorname{Re} w = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Im} w = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

2. Визначити область однолистості функції $w = \dfrac{1}{z}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Оскільки

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2} \quad (z_1, z_2 \neq 0) \Leftrightarrow z_1 = z_2,$$

То умова $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{z_2}$ не виконується ніколи при $z_1 \neq z_2$. Отже, дана функція буде однолистою у будь-якій множині, яка не містить точку $z = 0$.

3. Користуючись означенням границі довести, що $\lim\limits_{z \to -i} \dfrac{2z - 1}{z + 1} = \dfrac{1 - 3i}{2}$.

<u>*Доведення.*</u> Згідно з означенням границі функції потрібно довести, що для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $z \in E$,

які задовольняють нерівності $0 < |z-(-i)| < \delta(\varepsilon)$, виконується нерівність $\left|\dfrac{2z-1}{z+1} - \dfrac{1-3i}{2}\right| < \varepsilon.$

Перетворюючи цю нерівність, одержимо $\dfrac{3}{\sqrt{2}}\left|\dfrac{z+i}{z+1}\right| < \varepsilon$ або $\left|\dfrac{z+1}{z+i}\right| > \dfrac{3}{\varepsilon\sqrt{2}}$. Оскільки $\left|\dfrac{z+1}{z+i}\right| = \left|1 - \dfrac{-1+i}{z+i}\right| > \left|\dfrac{-1+i}{z+i}\right| - 1$, то для виконання нерівності $\left|\dfrac{z+1}{z+i}\right| > \dfrac{3}{\varepsilon\sqrt{2}}$ достатньо, щоб виконувалась нерівність $\left|\dfrac{1-i}{z+i}\right| - 1 > \dfrac{3}{\varepsilon\sqrt{2}}$, звідки $|z+i| < \dfrac{2\varepsilon}{3+\varepsilon\sqrt{2}}$.

Отже, нерівність $\left|\dfrac{2z-1}{z+1} - \dfrac{1-3i}{2}\right| < \varepsilon$ виконується тоді, коли $0 < |z-(-i)| < \delta$, де $\delta = \dfrac{2\varepsilon}{3+\varepsilon\sqrt{2}}$ (при $z = -i$ нерівність, очевидно, також виконується).

4. Знайти границю $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^3 - i^3}{z^2 - i^2}$.

<u>Розв'язання.</u> Тут безпосередньо застосувати теорему 1 не можна, бо $\lim\limits_{z\to i}(z^2 - i^2) = 0$. Проте, оскільки за означенням границі $z \neq i$, то при $z \neq i$ маємо $\dfrac{z^3 - i^3}{z^2 - i^2} = \dfrac{(z-i)(z^2 + zi + i^2)}{(z-i)(z+i)} = \dfrac{z^2 + zi + i^2}{z+i}$.

Тут $\lim\limits_{z\to i}(z+i) = 2i \neq 0$, тому $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^3 - i^3}{z^2 - i^2} = \lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2 + zi + i^2 z}{z+i} = \dfrac{3i^2}{2i} = \dfrac{3}{2}i$.

Відповідь: $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^3 - i^3}{z^2 - i^2} = \dfrac{3}{2}i$.

Частина ІІ
Виконати завдання

1. Виділити дійсну і уявну частини функцій:

1) $w = z^2$; 2) $w = z^3 + 1$; 3) $w = \dfrac{\overline{z}}{z+1}$;

4) $w = \dfrac{z}{3i}\cdot \operatorname{Im} z$; 5) $w = z^n$; 6) $w = \dfrac{z^3}{|z|}$.

2. Визначити області однолистості функцій:

1) $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$; 2) $w = \dfrac{|z|}{z}$; 3) $w = z^2$.

3. Користуючись означенням границі функції довести, що:

1) $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z-i}{z} = 1-i$; 2) $\lim\limits_{z\to 2}(3z-5) = 1$; 3) $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z+1}{z-1} = \infty$.

4. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(z-2)(z+1)(z+4)+8}{z}$; 2) $\lim\limits_{z\to 1-i}\bar{z}$; 3) $\lim\limits_{z\to -i} 2\arg z$;

4) $\lim\limits_{z\to 1-i}\dfrac{z^2-2z+2}{z-1+i}$; 5) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^3-3z+1}{z^2+1}$.

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. Нехай $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ – поліном n-го степеня ($n \ge 1$). Довести, що $\lim\limits_{z\to\infty}(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n) = \infty$.

2. Дано функцію $w = \dfrac{z^2 - iz - 1}{2iz}$, де $z = \cos(i\varphi) + i\sin(i\varphi)$ і φ – довільне дійсне число. Довести, що w – дійсна функція від φ.

Частина IV
Домашнє завдання

1. Виділити дійсну і уявну частини функцій:

1) $w = \dfrac{z-1}{z+2}$; 2) $w = z\cdot \operatorname{Re} z$; 3) $w = z^2\cdot\bar{z}$;

4) $w = z - \dfrac{1}{z}$; 5) $w = \bar{z}\cdot\operatorname{Re}(z-1)$; 6) $w = \dfrac{|z|}{z^2}$.

2. Визначити області однолистості функцій:

1) $w = z\cdot \operatorname{Im} z$; 2) $w = z\cdot\bar{z}$.

3. Користуючись означенням границі довести, що:

1) $\lim\limits_{z\to 1-i}\dfrac{1}{z+2i} = \dfrac{1-i}{2}$; 2) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z}{z^2-1} = 0$.

4. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{z\to\infty}\left(\dfrac{z^3}{3z^2-4} - \dfrac{z^2}{3z+2}\right)$; 2) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z^2-5z+1}{3z^3+1}$; 3) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\bar{z}}{|z^2|}$; 4) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z-2i}{z+i}$.

Відповіді

Частина II. 1. 1) $u(x;y)=x^2-y^2$, $v(x;y)=2xy$; 2) $u(x;y)=x^3+3xy^2+1$, $v(x;y)=3x^2y-y^3$; 3) $u(x;y)=\dfrac{x^2-y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$, $v(x;y)=\dfrac{-2xy-y}{(x+1)^2+y^2}$; 4) $u(x;y)=\dfrac{1}{3}y^2$, $v(x;y)=-\dfrac{1}{3}xy$; 4) $u(r;\varphi)=r^n\cos n\varphi$, $v(r;\varphi)=r^n\sin n\varphi$; 6) $u(x;y)=\dfrac{x^3-3xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $v(x;y)=\dfrac{3x^2y-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **2.** 1) область, що не має різних точок z_1 і z_2, зв'язаних співвідношенням $z_1\cdot z_2=1$; 2) області однолистості не існують; 3) будь-яка область, яка не містить пари точок, симетричних відносно початку координат. **4.** 1) -6; 2) $1+i$; 3) $-\pi$; 4) $-2i$; 5) ∞.

Частина IV. **1.** 1) $u(x;y)=\dfrac{x^2+y^2+x-2}{(x+2)^2+y^2}$, $v(x;y)=\dfrac{3y}{(x+2)^2+y^2}$; 2) $u(x;y)=x^2$, $v(x;y)=xy$; 3) $u(x;y)=x^3+xy^2$, $v(x;y)=x^2y+y^3$; 4) $u(x;y)=x-\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v(x;y)=y+\dfrac{y}{x^2+y^2}$; 5) $u(x;y)=x(x-1)$, $v(x;y)=y(1-x)$; 6) $u(x;y)=\dfrac{(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^2}$, $v(x;y)=-\dfrac{2xy\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^2}$. **2.** 1) півплощини $\operatorname{Re} z>0$ або $\operatorname{Re} z<0$; 2) області однолистості не існують. **4.** 1) $\dfrac{2}{9}$**;** 2) 0; 3) ∞; 4) 1.

Практичне заняття № 4

Похідна і аналітичність функцій комплексної змінної

Частина І

а) ***Основні теоретичні відомості***
([1], с.276 – 283; [2], с.327-333).

1. Нехай функція $w = f(z)$ визначена в області E комплексної площини (z). Візьмемо дві точки $z_0 \in E$ і $z_0 + \Delta z \in E$, ($z_0 = x_0 + iy_0$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$). Тоді комплексне число $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ називають приростом функції $w = f(z)$ в точці z_0.

2. Границя відношення $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$, якщо вона існує, називається похідною функції $f(z)$ в точці z_0 і позначається $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0)$.

3. Якщо функція $w = f(z)$ в точці z_0 має похідну, то вона диференційована в цій точці. Функція, яка диференційована в кожній точці області E, називається диференційованою в цій області.

4. Якщо функції $f(z)$ і $g(z)$ в точці z мають похідні, то:

1) $\left(f(z) \pm g(z)\right)' = f'(z) \pm g'(z)$;

2) $\left(f(z)g(z)\right)' = f'(z)g(z) + g'(z)f(z)$;

3) якщо, крім того, $g(z) \neq 0$, то $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{\left(g(z)\right)^2}$.

5. <u>Теорема.</u> Нехай функція $w = f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ така, що дійсні функції $u(x;y)$ і $v(x;y)$ мають в точці $(x;y)$ неперервні частинні похідні. Тоді для того, щоб дана функція в точці $z = x + iy$ була диференційованою, необхідно і достатньо, щоб в точці $(x;y)$ виконувалися умови Коші - Рімана:

$$\frac{\partial u(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x;y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x;y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x;y)}{\partial x}.$$

При виконанні умов теореми для похідної $f'(z)$ має місце формула

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

6. Однозначна функція $f(z)$ називається аналітичною в точці $z\in E$, якщо вона диференційована в деякому околі цієї точки. Однозначна функція $f(z)$ називається аналітичною в області E, якщо вона диференційована в кожній точці цієї області.

7. Функція $\varphi(x,y)$ називається гармонічною в області E, якщо вона має в цій області неперервні частинні похідні до другого порядку включно і задовольняє в цій області рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

Дійсна і уявна частини функції $w=f(x;y)=u(x;y)+iv(x;y)$, аналітичної в області E, є гармонічними функціями в цій області.

8. Гармонічні функції $u(x;y)$ і $v(x;y)$, які задовольняють умови Коші-Рімана, називаються спряженими гармонічними функціями.

б) ***Питання для самоперевірки.***

1. Дати означення похідної функції комплексної змінної.
2. Які умови повинні виконуватись для того, щоб функція в точці $z=x+iy$ була диференційованою?
3. Чи можна щось сказати про аналітичність функцій $w=\ln 2+i\cdot\arg z$ і $w=z+\sqrt{1+z^2}$ в якій-небудь області?
3. Чи завжди дійсна і уявна частини аналітичної функції є гармонічними функціями?
4. Який вигляд має рівняння Лапласа?

в) ***Методичні вказівки до розв'язування задач.***

1. Знайти похідну функції $w=z^2$ за означенням.

<u>*Розв'язання.*</u> Знаходимо $\Delta w=(z+\Delta z)^2-z^2=2z\Delta z+(x\Delta z)^2$. Тоді

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=\lim_{\Delta z\to 0}2z+\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z=2z.$$

2. Використовуючи умови Коші-Рімана, знайти множини точок, де функція $\dfrac{\overline{z}}{|z|}$ диференційована.

Розв'язання. Функція $f(z)=\frac{\overline{z}}{|z|}$ визначена на всій комплексній площині, крім точки $z=0$. Виділимо дійсну і уявну частини цієї функції:

$u(x;y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $v(x;y)=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Диференційованість цих функцій в точці $(x;y)$, $x^2+y^2\neq 0$, очевидна. Щоб переконатися у виконанні умов Коші-Рімана, обчислимо частинні похідні цих функцій:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Очевидно, що при $x^2+y^2\neq 0$ одна з умов Коші-Рімана не виконується $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}\right)$, тобто функція $f(z)=\frac{\overline{z}}{|z|}$ не диференційована на всій комплексній площині.

3. Визначити, в яких точках комплексної площини функція $f(z)=\cos x+i\sin y$ ($z=x+iy$) має похідну. Чому дорівнює похідна в цих точках? Чи буде ця функція аналітичною в якій-небудь області площини?

Розв'язання. Так як $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)=\cos x+i\sin y$, то $u(x;y)=\cos x$, $v(x;y)=\sin y$. Частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}=-\sin x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $\frac{\partial v}{\partial x}=0;$ $\frac{\partial v}{\partial y}=\cos y$ неперервні на всій площині. Одна із умов Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ виконується в усіх точках площини. Будемо шукати точки (x,y), в яких виконується друга умова:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Leftrightarrow -\sin x=\cos y\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos y\Leftrightarrow$$

$$y=\pm\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+2k\pi\Leftrightarrow\ y=\pm x+(4k\pm 1)\frac{\pi}{2}\ \ (k=0,\pm 1,\ldots).$$

Ці рівняння задають нескінченну сукупність прямих.

Отже, в кожній точці z цих прямих дана функція має похідну, причому $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-\sin x$.

Функція $f(z)=\cos x+i\sin y$ не є аналітичною в жодній точці площини, бо кожен круг площині (z) містить точки, в яких $f(z)$ не має похідної.

4. Нехай $f(z)=x^2+ax+by^2+i(2xy+cy)$. Визначити числа a, b і c, при яких функція $f(z)$ буде аналітичною в певній області.

<u>*Розв'язання.*</u> Для даної функції $u=x^2+ax+by^2$, $v=2xy+cy$. Частинні похідні дорівнюють: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+a$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2by$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x+c$. Для визначення невідомих коефіцієнтів a, b і c скористаємось умовами Коші-Рімана, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x+a=2x+c, \\ 2by=-2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c, \\ b=-1. \end{cases}$$

Отже, якщо $a=c$ і $b=-1$, то умови Коші-Рімана виконуються на всій комплексній площині. При цьому $f'(z)=2x+a+2iy$ неперервна на всій комплексній площині, а значить, $f(z)$ – аналітична на всій комплексній площині.

5. Визначити, чи є функція $\varphi(x;y)=arctg\dfrac{y}{x}$ гармонічною.

<u>*Розв'язання.*</u> Функція $\varphi(x;y)=arctg\dfrac{y}{x}$ визначена на всій комплексній площині, крім прямої $x=0$. Знайдемо частинні похідні цієї функції:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Частинні похідні існують і неперервні в області визначення функції $\varphi(x;y)$ і задовольняють рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

Звідси випливає, що функція $\varphi(x;y)=\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$ гармонічна в півплощинах, які визначаються нерівностями $x>0$, $x<0$.

6. Довести, що пара функцій $u(x;y)=3x^2y-y^3$ і $v(x;y)=-x^3+3xy^2$ є спряженими гармонічними функціями.

<u>*Розв'язання.*</u> Для того, щоб пара функцій $u(x;y)$ і $v(x;y)$ були спряженими гармонічними, потрібно, щоб виконувались такі дві умови: 1) кожна з них має бути гармонічною; 2) для цих функцій мають виконуватись умови Коші-Рімана.

Перевіримо виконання першої умови. Для цього знайдемо частинні похідні функцій $u(x;y)$ і $v(x;y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6xy,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3x^2-3y^2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-3x^2+3y^2,\ \frac{\partial v}{\partial y}=6xy,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-6x,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-6x.$$

Очевидно, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ і $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$, а значить, функції $u(x;y)$ і $v(x;y)$ – гармонічні.

Перевіримо виконання другої умови.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x;y)}{\partial x}=\dfrac{\partial v(x;y)}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u(x;y)}{\partial y}=-\dfrac{\partial v(x;y)}{\partial x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6xy=6xy,\\ 3x^2-3y^2=-(-3x^2+3y^2)\end{cases}.$$

Отже, умови Коші-Рімана виконуються на всій комплексній площині. Таким чином, дана пара функцій $u(x;y)$ і $v(x;y)$ є спряженими гармонічними функціями.

7. Чи існує така аналітична функція $f(z)$, у якої дійсна частина дорівнює x^3+y^3?

<u>*Розв'язання.*</u> Для відповіді на поставлене питання перш за все перевіримо, чи є функція $u(x;y)=x^3+y^3$ гармонічною. Знайдемо:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y.$$

Складемо рівняння Лапласа для функції $u(x;y)$, отримаємо: $6x+6y=0$. Звідси зрозуміло, що функція $u(x;y)$ задовольняє рівнянню Лапласа лише у точках прямої $y=-x$ і тому не буде гармонічною ні в якій області. Отже, не існує аналітичної функції, у якої дійсна частина дорівнює x^3+y^3.

8. Побудувати аналітичну функцію $f(z)$ за її дійсною частиною $\mathrm{Re}\, f(z)=x^2-y^2+x$ і значенню $f(0)=i$.

Розв'язання. Нехай $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$, тоді u і v пов’язані умовами Коші-Рімана:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Leftrightarrow\frac{\partial v}{\partial x}=2y, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\Leftrightarrow\frac{\partial v}{\partial y}=2x+1. \qquad (2)$$

Шукатимемо функцію $v(x;y)$ у вигляді

$$v=\int 2y\,dx+\varphi(y), \qquad (3)$$

де $\varphi(y)$ – довільна функція, яка залежить тільки від y (але не від x).

Тут інтегрування виконується по змінній x; y виконує роль параметра. Для такої функції $v(x;y)$, очевидно, виконується умова (1). Підберемо функцію $\varphi(y)$ так, щоб виконувалась ще й умова (2).

З (3) маємо $v=2xy+\varphi(y)$, тому

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2x+\varphi'(y).$$

Але нам потрібно, щоб $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ задовольняла умові (2). Тоді

$$\varphi'(y)=1,\ \varphi(y)=\int\varphi'(y)dy=y+C\ \ (C=const),$$

$$v(x,y)=2xy+y+C,$$

$$f(z)=x^2-y^2+x+i(2xy+y+C).$$

Враховуючи умову $f(0)=i$, отримаємо: $C=1$. Отже, функція $f(z)$ відновлюється однозначно:

$$f(z)=x^2-y^2+x+i(2xy+y+1)=(x^2-y^2+2ixy)+(x+iy)+i=z^2+z+i.$$

Частина II
Виконати завдання

1. Знайти похідну функції за означенням: 1) $w=z^3+1$; 2) $w=z^2+2z$.

2. Використовуючи умови Коші-Рімана, знайти множини точок, де функції диференційовані: 1) $\dfrac{1}{z}$; 2) $|z|^2$; 3) $z\cdot\operatorname{Re}z$.

3. Визначити, в яких точках комплексної площини функція $f(z)$ має похідну. Чому дорівнює похідна в цих точках? Чи буде ця функція аналітичною в якій-небудь області площини?

1) $f(z)=x^2+2ixy$; 2) $f(z)=-2r\sin\varphi+2ir\cos\varphi$, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

4. Визначити числа a і b, при яких функція $f(z)$ буде аналітичною в певній області, якщо $f(z)=ax^2-y^2+2+i(2bxy+1)$.

5. Визначити, чи є функції гармонічними:

$$1)\ \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2);\quad 2)\ \sqrt{x^2+y^2};\quad 3)\ e^x\sin y.$$

6. Довести, що дані пари функцій $u(x;y)$ і $v(x;y)$ є спряженими гармонічними функціями:

$$1)\ u(x;y)=\frac{x}{x^2+y^2},\ \ v(x;y)=-\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$2)\ u(x,y)=e^x\cos y+x,\ v(x,y)=e^x\sin y+y.$$

7. Чи існує така аналітична функція $f(z)$, у якої:

$$1)\ \operatorname{Re} f(z)=x^2+y^2;\quad 2)\ \operatorname{Im} f(z)=xy^2.$$

8. Побудувати аналітичну функцію $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ за її дійсною або уявною частиною:

$$1)\ u(x;y)=x^2-y^2+x;\qquad 2)\ v(x;y)=e^{-2y}\cos 2x+x.$$

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. Довести, що якщо функція $f(z)$, $z\in D$ являється аналітичною і $f'(z)=0$ $(\forall z\in D)$, то $f(z)$ постійна в області *D*.

2. Довести, що функція $f(z)=\arg z$, $z\neq 0$ не є аналітичною.

3. Довести, що якщо $f(z)$ і $zf(z)$ – гармонічні функції в області *D*, то $f(z)$ – аналітична в *D*.

Частина IV
Домашнє завдання

1. Використовуючи умови Коші-Рімана, знайти множини точок, де функції диференційовані: 1) $\dfrac{1}{\bar z}$; 2) $\left(\bar z\right)^2$.

2. Визначити, в яких точках комплексної площини функція $f(z)=z^3-(\operatorname{Im} z)^3$ має похідну. Чому дорівнює похідна в цих точках? Чи буде ця функція аналітичною в якій-небудь області площини?

3. Визначити числа a, b і c, при яких функція $f(z)$ буде аналітичною в певній області, якщо:

$$f(z)=ax^2-by^2+5x+y-\frac{y}{x^2+y^2}+i\left(2cxy-x+5y-\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

4. Визначити, чи є функції гармонічними:

$$1)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};\ 2)\ x^3-3x^2y-3xy^2+y^3;\ 3)\ 2\cos x\cdot\operatorname{ch} y-x^2+y^2.$$

5. Довести, що дані пари функцій $u(x;y)$ і $v(x;y)$ є спряженими гармонічними функціями:

$$1)\ u(x;y)=xy\,,\ v(x;y)=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\,;$$

$$2)\ u(x;y)=x^2-y^2+xy\,,\ v(x;y)=2xy-\frac{1}{2}(x^2-y^2)\,.$$

6. Чи існує така аналітична функція $f(z)$, у якої:

$$1)\ \operatorname{Re} f(z)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,;\ 2)\ \operatorname{Re} f(z)=\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

7. Побудувати аналітичну функцію $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ за її дійсною або уявною частиною:

$$1)\ u(x;y)=\frac{x^2-x+y^2}{x^2+y^2}\,,\ f(1)=0\,;\quad 2)\ v(x;y)=e^{-2y}\cos 2x\,.$$

Відповіді

Частина ІІ. 1. 1) $3z^2$; 2) $2z+2$. **2**. 1) вся комплексна множина, крім точки $z=0$; 2) $z=0$; 3) $z=0$. **3.** 1) $y=0$, $-\infty<x<+\infty$, $f'(z)=2x$, ні; 2) вся комплексна множина, $f'(z)=2i$, вся комплексна множина. **4.** $a=c$, $b=1$. **5.** 1) так; 2) ні; 3) так. **7.** 1) ні; 2) ні. **8.** 1) $f(z)=z^2+z+C$; 2) $f(z)=e^{-2y}\sin 2x-y+i(-e^{-2y}\cos 2x+x)+C$.

Частина IV. **1.** 1) вся комплексна множина, крім точки $z=0$; 2) $z=0$. **2**. $y=0$, $-\infty<x<+\infty$, $f'(z)=3x^2$, ні. **3.** $a=b=c$. **4.** 1) ні; 2) так; 3) так. **6.** 1) так; 2) ні. **7.** 1) $f(z)=\dfrac{x^2-x+y^2}{x^2+y^2}+i\dfrac{y}{x^2+y^2}=\dfrac{z-1}{z}$; 2) $f(z)=-e^{-2y}\sin 2x-y+ie^{-2y}\cos 2x+C$.

Практичне заняття № 5

Відображення за допомогою функцій комплексної змінної

Частина I

а) ***Основні теоретичні відомості***
([1], с.287 – 291; [2], с.334-338).

1. При геометричному зображенні функції $w = f(z)$ користуються двома комплексними площинами. Значення аргументу z зображають точками комплексної площини (z), а значення функції – точками другої комплексної площини (w) (рис.).

Однозначну комплексну функцію $w = f(z)$ можна розглядати як таку, що здійснює відображення (перетворення) множини точок E комплексної площини (z) на множину точок G комплексної площини (w) (рис. 7).

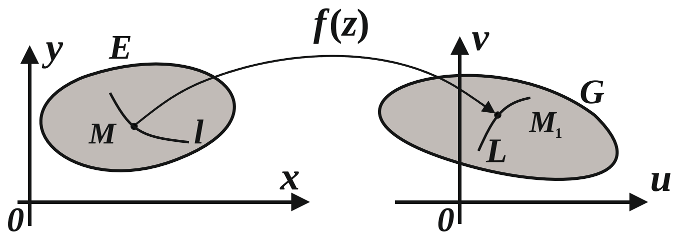


Рис. 7

При цьому кожній точці $z \in E$ в площині (z) відповідає точка $w \in G$, наприклад, точці $M \in E$ відповідає точка $M_1 \in G$, лінії l на площині (z) відповідає лінія L у площині (w).

2. Нехай функція $w = f(z)$ – визначена і неперервна в деякій області $E \subset (z)$ і у точці $z_0 \in E$ похідна функції $f'(z_0) \neq 0$, а L – деяка гладка крива, що проходить через цю точку.

Аргумент похідної $\arg f'(z_0) = \varphi$ геометрично визначає кут, на який повертається дотична в точці z_0 до кривої L при відображенні, яке здійснюється за допомогою функції $w = f(z)$. Кут φ називається *кутом повороту* для відображення $w = f(z)$ в точці z_0.

Якщо $\arg f'(z_0) > 0$, то поворот відбувається проти руху годинникової стрілки, а якщо $\arg f'(z_0) < 0$ – за рухом годинникової стрілки.

3. Відображення, що здійснюється неперервною функцією $w = f(z)$, називається *конформним* у точці z_0, якщо воно зберігає кути між кри-

вими, що виходять з цієї точки. Якщо при цьому зберігаються не тільки величини кутів, а й напрями їх відліку, то таке конформне відображення називається *конформним відображенням першого роду*. Якщо напрям відліку змінюється на протилежний, то відповідне відображення називається *конформним відображенням другого роду*.

4. Відображення, що здійснюється аналітичною в області E функцією $w = f(z)$, є конформним відображенням першого роду в усіх точках області E, в яких похідна $f'(z) \neq 0$, і не є конформним в точках, де $f'(z) = 0$. Відображення, конформне в кожній точці області D, називається конформним в цій області.

5. Модуль похідної $r = |f'(z_0)|$ визначає величину зміни лінійних розмірів у точці z_0 при відображенні, що здійснюється функцією $w = f(z)$. Число r називається *коефіцієнтом розтягу* даного відображення в точці z_0.

6. Функція виду

$$w = az + b, \tag{9}$$

де a і b – комплексні сталі, причому $a \neq 0$, називається *лінійною функцією*.

Відображення, здійснюване функцією (9), називається *лінійним відображенням*. Ця функція здійснює конформне відображення комплексної площини (z) на всю комплексну площину (w), бо $w' = a \neq 0$ при всіх z.

Запишемо комплексне число a в показниковій формі $a = r\exp(i\varphi)$, тоді лінійне відображення

$$w = r\exp(i\varphi)z + b$$

можна розглядати як послідовне виконання трьох перетворень:

1) $w_1 = z \cdot \exp(i\varphi)$ – поворот комплексної площини на кут φ навколо початку координат;

2) $w_2 = r \cdot w_1$ – гомотетія з центром у початку координат і коефіцієнтом r;

3) $w = w_2 + b$ – паралельне перенесення на вектор b.

Лінійну функцію (9) при $a \neq 1$ можна записати у вигляді

$$w - z_0 = r\exp(i\varphi)(z - z_0), \tag{10}$$

де $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$ – нерухома точка відображення, яке здійснюється лінійною функцією.

7. Функція виду

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{11}$$

де a, b, c, d – дані комплексні числа ($ad - bc \neq 0$), називається *дробово-лінійною функцією*.

Відображення, здійснюване функцією (11), називається *дробово-лінійним відображенням*. Умова $ad - bc \neq 0$ означає, що $w \neq const$. Ця функція здійснює конформне відображення розширеної комплексної площини (z) на розширену комплексну площину (w), бо $w' = \dfrac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0$ для всіх точок $z \neq \infty$.

Кожне дробово-лінійне відображення може бути одержане за допомогою послідовного застосування трьох відображень: лінійного, відображення $w = \dfrac{1}{z}$ і знову лінійного відображення.

Дробово-лінійне відображення:

1) коло перетворює на коло, якщо пряму вважати окремим випадком кола – колом нескінченного радіуса (кругова властивість);

2) пару точок, симетричних відносно кола, перетворює в пару точок, симетричних відносно образу кола (властивість симетрії).

Існує єдине дробово-лінійне відображення, яке розширену комплексну площину (z) перетворює на розширену комплексну площину (w) так, що три різні точки z_1, z_2, z_3 площини (z) перетворюються відповідно в три різні точки w_1, w_2, w_3 площини w. Це відображення визначається формулою

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \tag{12}$$

Якщо якась з точок z_k або w_k, $k = 1,2,3$, є нескінченно віддаленою, то у формулі (12) треба різниці, в які входять ці значення z_k або w_k, за

8. Функція

$$w = z^n, \ n = 2,3,\ldots, \tag{13}$$

називається *цілою степеневою*.

Відображення за допомогою функції (13) конформне в кожній точці комплексної площини, крім точки $z = 0$.

Узявши $z = r\exp(i\varphi)$ і $w = \rho\exp(i\psi)$, за формулою Муавра знайдемо

$$\rho = r^n, \ \psi = n\varphi.$$

З останньої рівності випливає, що відображення (13) кожний вектор $z \neq 0$ повертає на кут $(n-1)\arg z$ і розтягує його в $|z|^{n-1}$ разів.

Для відображення за допомогою функції (13):

1) образом променю, який виходить з початку координат, є промінь, що також виходить з початку координат;

2) образом кола $|z| = R$ є коло $|w| = R^n$.

Функція (13) відображає однозначно і конформно внутрішність будь-якого кута з вершиною в точці $z = 0$ і розхилом α, $0 < \alpha < \dfrac{2\pi}{n}$, на внутрішність кута з вершиною в точці $w = 0$ і розхилом $n\alpha$, $0 < n\alpha < 2\pi$.

При $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$ функція (13) область $D = \left\{ z, \varphi_0 < \arg z < \varphi_0 + \dfrac{2\pi}{n} \right\}$ відображає на площину з розрізом вздовж променю $\arg w = n\varphi_0$. Якщо $\varphi_0 = 0$, то область $D = \left\{ z, 0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{n} \right\}$ відображається на площину з розрізом вздовж додатної частини дійсної осі.

б) *Питання для самоперевірки*

1. Дати означення основних характеристик конформного відображення.

2. Чим відрізняються конформне відображення першого і другого роду?

3. Які з тверджень правильні:

а) відображення, яке здійснюється лінійною функцією, можна звести до одного паралельного перенесення ($a = 1$);

б) відображення, яке здійснюється лінійною функцією, можна звести до послідовного виконання двох перетворень: повороту навколо точки z_0 на кут φ і гомотетії з центром у точці z_0 і коефіцієнтом r ($a \neq 1$);

в) лінійне відображення не зберігає подібність геометричних фігур

г) якщо у дробово-лінійної функції $c = 0$, то вона стає лінійною.

4. Відображення за допомогою якої функції доцільно використовувати при відображенні секторів кола?

в) *Методичні вказівки до розв'язування задач*

1. В яких точках відображення $w = z^3 - 3z$ буде конформним?

Розв'язання. Знайдемо похідну: $w' = 3(z^2 - 1)$. Вона дорівнює нулю тільки в точках $z = 1$ і $z = -1$. В інших точках $w' \neq 0$. Отже, відображення конформне в усіх точках z, відмінних від точок 1 і -1. Наприклад, воно конформне в точках $z=2$, $z=i$. В першій з них $w'=9$; значить, аргумент похідної дорівнює нулю, а модуль 9; тому нескінченно малі дуги, що виходять із точки $z=2$, при відображенні не повертаються, а по довжині збільшуються в 9 разів. В точці $z=i$, $w'=-6$; значить, аргумент похідної дорівнює π, а модуль дорівнює 6, тому нескінченно малі дуги, що виходять із точки $z=i$, при відображенні повертаються на кут π і збільшуються в 6 разів.

2. В яких точках площини кут повороту відображення $w=\dfrac{1+iz}{1-iz}$ дорівнює нулю? В яких точках коефіцієнт розтягу цього відображення дорівнює одиниці?

<u>*Розв'язання.*</u> Умова задачі передбачає передусім пошук тих точок, де задане відображення конформне, бо тільки в таких точках можна говорити про кут повороту і коефіцієнт розтягу. Дана функція як частка двох диференційованих функцій диференційована в будь-якій точці площини, крім точки $z=-i$, де вона не визначена, причому

$$w'=\frac{(1+iz)'(1-iz)-(1-iz)'(1+iz)}{(1-iz)^2}=\frac{2i}{(1-iz)^2}=\frac{-2i}{(z+i)^2}.$$

Оскільки $w'(z)\neq 0$ для всіх z, то задане відображення конформне на всій площині з виколотою точкою $z=-i$.

Кут повороту α відображення $w=w(z)$ в точці z дорівнює $\arg w'(z)$. Оскільки, за умовою, $\alpha=0$, то це означає, що $w'(z)$ має бути дійсним додатнім числом. Знайдемо, для яких z це так. Маємо:

$$w'=\frac{-2i}{(z+i)^2}=\frac{-2i\,(x-i(y+1))^2}{(x^2+(y+1)^2)^2}=\frac{-4x(y+1)-2i\,(x^2-(y+1)^2)}{(x^2+(y+1)^2)^2}.$$

Число $w'(z)$ буде дійсним, якщо $\operatorname{Im} w'(z)=0$, і додатнім, якщо до того ж $\operatorname{Re} w'(z)>0$:

$$\begin{cases}\operatorname{Im} w'(z)=0,\\ \operatorname{Re} w'(z)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(y+1)^2=x^2,\\ x(y+1)<0\end{cases}\Leftrightarrow y=-x-1\ \ (x\neq 0).$$

Отже, кут повороту даного відображення дорівнює нулю в точках прямої $y=-x-1$ з виколотою точкою $z=-i$.

Коефіцієнт розтягу k відображення $w=f(z)$ в точці z дорівнює $|w'(z)|$. Знайдемо, при яких z коефіцієнт $k=1$:

$$|\,w'(z)\,| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{-2i}{(z+i)^2}\right| = 1 \Leftrightarrow |\,z+i\,|^2 = 2 \Leftrightarrow |\,z+i\,| = \sqrt{2}\,.$$

Отримали комплексне рівняння кола, центр якого знаходиться в точці $-i$ і радіус дорівнює $\sqrt{2}$.

3. Знайти загальний вигляд лінійної функції, яка відображає смугу $1 < y < 3$ на себе.

Розв'язання. Ми знаємо, що довільну лінійну функцію можна записати у вигляді (9) або (10). З'ясуємо спочатку, чи можуть відображати на себе дану смугу функції виду (9). Відображення за допомогою такої функції включає в себе паралельний перенос, а смуга $1 < y < 3$ відображається, очевидно, на себе при паралельному переносі тоді і тільки тоді, коли перенос здійснюється на вектор, паралельний дійсній осі. Функція (9) в цьому випадку має вигляд $w = z + t$, де t – будь-яке дійсне число.

Розглянемо тепер функції виду (10). Вони задають поворот навколо точки z_0 на кут φ з послідуючою гомотетією (центр – точка z_0, коефіцієнт r). Смуга $1 < y < 3$ може відобразитися на себе при перетворенні повороту, очевидно, тільки в тому випадку, коли поворот здійснюється навколо точки, яка розташована на осі симетрії смуги, тобто точки вигляду $z_0 = t + 2i$ (t – будь-яке дійсне число) на кут $\varphi = \pi$. Далі зрозуміло, що ніяке гомотетичне перетворення (з центром в точці $z_0 = t + 2i$), коефіцієнт розтягу якого $r \neq 1$, не може дану смугу перевести на себе. Тому серед функцій виду (10) шуканими є функції виду:

$$w - (t + 2i) = \exp(i\pi)(z - (t + 2i)) \Leftrightarrow w = -z + 2t + 4i\,,$$

і тільки вони.

Отже, шукані функції мають вигляд:

$$w = z + t \text{ або } w = -z + 2t + 4i\,,$$

де t – будь-яке дійсне число.

4. Знайти дробово-лінійне відображення, яке відображає розширену комплексну площину на себе так, що точки $z = -1,\ 1,\ \infty$ відображаються відповідно в точки $w = 0,\ 1,\ -1$.

Розв'язання.

1-й спосіб. Для визначення коефіцієнтів перетворення $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ використаємо систему (12):

$$0 = \frac{-a+b}{-c+d},\ 1 = \frac{a+b}{c+d},\ -1 = \frac{a}{c}$$

(останнє рівняння отримаємо так: $\left.\dfrac{az+b}{cz+d}\right|_{z=\infty}=\left.\dfrac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}}\right|_{z=\infty}=\dfrac{a}{c}$).

Із першого рівняння знаходимо: $b=a$, із третього $c=-a$, із другого $d=3a$. Отже, шукане відображення $w=\dfrac{az+a}{-az+3a}=\dfrac{z+1}{-z+3}$.

2-й спосіб. Застосувавши властивість (12), отримаємо:

$$\frac{-1-\infty}{1-\infty}:\frac{-1-z}{1-z}=\frac{0+1}{1+1}:\frac{0-w}{1-w},\ \text{або}\ \frac{z-1}{z+1}=\frac{w-1}{2w}.$$

Звідси $w=\dfrac{z+1}{-z+3}$.

5. Довести, що функція $w=\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2$ взаємно однозначно і конформно відображає область $D=\{z,|z|<1,\operatorname{Im}z<0\}$ на верхню півплощину $\operatorname{Im}w>0$.

<u>*Розв'язання.*</u> Розглядуване відображення зручно подати як композицію відображень $\xi=\dfrac{z-1}{z+1}$ і $w=\xi^2$.

Як відомо, дробово-лінійна функція взаємно однозначно і конформно відображає всю розширену площину на себе, при цьому, на основі кругової властивості, пряма $\operatorname{Im}z=0$ і коло $|z|=1$ переходять в прямі. Так, образом прямої $\operatorname{Im}z=0$ є пряма $\operatorname{Im}w=0$, точки $z_1=1$, $z_2=0$ і $z_3=-1$ відображаються відповідно в точки $\xi_1=0$, $\xi_2=-1$ і $\xi_3=\infty$. Коло $|z|=1$ перетворюється цією дрібно-лінійною функцією в пряму $\operatorname{Re}w=0$, а точки $z_1=1$, $z_2'=i$ і $z_3=-1$ – відповідно в точки $\xi_1=0$, $\xi_2'=-i$ і $\xi_3=\infty$. Оскільки при дробово-лінійному перетворенні зберігається порядок слідування точок на границі області, то образом множини D є область $\{\xi,\operatorname{Re}\xi<0,\operatorname{Im}\xi<0\}$ – третій квадрант комплексної площини ξ.

Функція $w=\xi^2$ взаємно однозначно і конформно відображає третій квадрант площини ξ на верхню півплощину $\operatorname{Im}w>0$. Композиція взаємно однозначних і конформних відображень є також взаємно однозначним і конформним відображенням, що й треба було довести.

Частина II
Виконати завдання

1. Чи є конформним відображення $w = f(z)$ в точці z_0, якщо:

$$1)\ w = \frac{z^2}{z+1},\ z_0 = i;\quad 2)\ w = \frac{z}{z^2-2},\ z_0 = 0\,?$$

2. В яких точках площини кут повороту наступних відображень дорівнює нулю: 1) $w = iz^2$; 2) $w = -z^3$?

3. В яких точках коефіцієнт розтягу наступних відображень дорівнює одиниці: 1) $w = z^3$; 2) $w = z^2 - 2z$?

4. Знайти загальний вигляд лінійної функції, яка відображає смугу $0 < x < 1$ на себе при умові, що точка $z = i$ відображається в точку $w = -2i$.

5. Знайти загальний вигляд лінійних функцій, за допомогою яких здійснюються відображення:

1) верхньої півплощини на себе;

2) верхньої півплощини на ліву півплощину.

6. Знайти дробово-лінійне функцію, яка відображає розширену комплексну площину на себе так, щоточки $z = 1$, i, -1 переводить відповідно в точки $w = i$, -1, $-i$.

7. Визначити, які з поданих функцій здійснюють взаємно однозначне відображення відповідних областей:

$$1)\ w = z^3,\ \{z, \operatorname{Re} z < 0\};\quad 2)\ w = z^{10},\ \left\{z, \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. Чи існують дробово-лінійні функції, що відображають область $\left\{z : |z| < 1, \left|z - \frac{i}{2}\right| > \frac{1}{2}\right\}$ у смугу $\{w : -1 < \operatorname{Re} w < 1\}$?

2. Довести, що для довільного кола γ, розміщеного всередині одиничного круга, існує дробово-лінійне перетворення цього останнього, яке відображає γ в коло, концентричне з одиничним.

3. Знайти образ області $D = \{z : |z + i| < 1, |z| > 1\}$ при відображенні $w = \left(\frac{2z + \sqrt{3} + i}{2z - \sqrt{3} + i}\right)^3$.

Частина IV
Домашнє завдання

1. Чи є конформним відображення $w = f(z)$ в точці z_0, якщо:

$$1)\ w = z + \frac{1}{z},\ z_0 = 1; \qquad 2)\ w = z^4 - 4z,\ z_0 = 1?$$

2. В яких точках площини кут повороту відображення $w = z^2 - 2z$ дорівнює нулю?

3. В яких точках коефіцієнт розтягу відображення $w = z^2$ дорівнює одиниці?

4. Знайти загальний вигляд лінійної функції, яка відображає смугу $0 < x < 1$ на себе при умові, що точка $z = i$ відображається в точку $w = 1$.

5. Знайти загальний вигляд лінійних функцій, за допомогою яких здійснюються відображення:

1) верхньої півплощини на нижню півплощину;

2) верхньої півплощини на праву півплощину.

6. Знайти дробово-лінійне функцію, яка точки $z = 1,\ 0,\ i$ переводить відповідно в точки $w = 0,\ 1,\ \infty$.

7. Визначити, які з поданих функцій здійснюють взаємно однозначне відображення відповідних областей:

$$1)\ w = z^2,\ \{z,\ \operatorname{Re} z > 0\}; \qquad 2)\ w = z^4 + 1,\ \left\{z, 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Відповіді

Частина II. **1.** 1) так; 2) так. **2**. 1) $\arg z = -\frac{\pi}{2}$; 2) $Re\, z = 0$. **3.** 1) $|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $|z-1| = \frac{1}{2}$. **4.** $w = z - 3i$. **5.** 1) $w = az + b$; 2) $w = i(az+b)$**,** де $a, b \in R$, $a > 0$. **6.** $w = iz$, дійсна вісь площини (z) переходить в уявну вісь площини (w), у дійсну вісь площини (w) перетворюється уявна вісь площини (z). **7.** 1) ні; 2) так.

Частина III. **3**. $\operatorname{Im} w < 0$.

Частина IV. **1.** 1) ні; 2) ні. **2**. $\operatorname{Im} w = 0$, $\operatorname{Re} z > 1$. **3.** $|z| = \frac{1}{2}$. **4.** $w = -z + 1 + i$. **5.** 1) $w = -az + b$, де $a, b \in R$, $a > 0$; 2) $w = -i(az + b)$, де $a, b \in R$, $a > 0$. **6.** $w = \frac{i(z-1)}{z-i}$, у верхню півплощину площини (w) перетворюється “зовнішність” кола, що проходить через точки $1,\ 0,\ i$. **7.** 1) так; 2) так.

Практичне заняття № 6

Степеневі ряди

Частина I

а) ***Основні теоретичні відомості***
([1], с.249 – 252; [2], с.353-356).

1. Степеневим рядом називається ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{14}$$

де a_n – задані комплексні числа, які називаються *коефіцієнтами степеневого ряду*, а z_0 – довільне фіксоване комплексне число.

2. Теорема Коші-Адамара. Нехай

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Тоді:

1) якщо $\lambda = 0$, то ряд (14) абсолютно збіжний на усій комплексній площині;

2) якщо $0 < \lambda < \infty$, то ряд (14) абсолютно збіжний в крузі $|z - z_0| < \dfrac{1}{\lambda}$ і розбіжний за межами цього круга;

3) $\lambda = \infty$, то ряд (14) збіжний лише в одній точці z_0.

3. Круг $\left\{ z, |z - z_0| < \dfrac{1}{\lambda} \right\}$ називається *кругом збіжності ряду* (14), а число $R = \dfrac{1}{\lambda}$ – *радіусом збіжності* цього ряду. При $\lambda = \infty$ вважатиме $R = 0$, при $\lambda = 0$ вважатиме $R = \infty$. З теореми Коші-Адамара маємо формулу для обчислення радіусу збіжності степеневого ряду: $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$

4. Якщо існує скінчена або нескінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, то радіус збіжності ряду можна знайти за такою формулою:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \tag{15}$$

5. Теорема 1. Степеневий ряд, який має додатній радіус збіжності, є рівномірно збіжним в будь-якому крузі, що лежить в його крузі збіжності.

6. Теорема 2. Сума степеневого ряду є аналітичною функцією всередині круга збіжності, причому її похідну можна знайти почленним диференціюванням ряду.

7. Степеневий ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

називається *рядом Тейлора* функції $f(z)$ за степенями $(z-z_0)$.

8. Теорема 3. Якщо функція $f(z)$ в крузі $\{z, |z-z_0| < R\}$ з додатнім радіусом збіжності являється сумою степеневого ряду (14), то:

1) цей ряд єдиний;
2) ряд (14) є рядом Тейлора функції $f(z)$.

б) Питання для самоперевірки.

1. Чому дорівнює коефіцієнт a_n і число z_0 для рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+ni}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2\left(z-1+0{,}5i\right)^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z+i)^{2n}}{(2i)^n}?$$

2. За якими формулами знаходиться радіус збіжності степеневого ряду?
3. Назвіть основні властивості степеневих рядів.
4. Дати означення ряду Тейлора.

в) Методичні вказівки до розв'язування задач.

1. Знайти область збіжності степеневого ряду:

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(z+i)^n}{3^n}; \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n z^{2n}}{n^2}.$$

Розв'язання. 1) Скористаємося формулою Коші-Адамара

$$R = \frac{1}{\lambda}, \text{ де } \lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Маємо:

$$|a_n| = \left|\frac{i^n}{3^n}\right| = \frac{1}{3^n}, \ \lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}, \ R = 3.$$

Отже, $|z+i| < 3$ – круг збіжності даного ряду.

2) В цьому ряді коефіцієнти при непарних степенях z рівні нулю. Тому в цьому випадку не можна застосувати формулу (15) – відповідна границя не існує. Введемо нову змінну $t = z^2$. Тоді отримаємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n t^n}{n^2},$$

а його радіус збіжності знайдемо за допомогою формули (15):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot (n+1)^2}{n^2 \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Отже, областю збіжності допоміжного ряду є круг $|t| < \frac{1}{2}$, а областю збіжності даного ряду – круг $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Якщо використати формулу $R = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, то матимемо:

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left| \frac{(-2)^n}{n^2} \right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{2^n}{n^2}} = \sqrt{2}.$$

Отже, $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Відповідь: 1) $\{z, |z+i| < 3\}$; 2) $\left\{z, |z| < \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

2. Для степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (z+i)^n}{3^{n+1} \cdot 2^{n-1}}$ знайти множини, на яких ряд збігається рівномірно.

<u>*Розв'язання.*</u> Знайдемо радіус збіжності за допомогою формули (15):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+2} \cdot 2^n \cdot (-1)^n}{3^{n+1} \cdot 2^{n-1} \cdot (-1)^{n+1}} \right| = 6.$$

Оскільки радіус збіжності $R = 6 > 0$, то за теоремою 1 маємо, що даний ряд, є рівномірно збіжним в будь-якому крузі, що лежить в його крузі збіжності $|z+i| < 6$, наприклад, у таких кругах $|z-i| < 4$, $|z-2| < 2$, $|z+1+2i| < 2$.

3. Функцію $f(z) = \frac{2z-5}{z^2 - 5z + 6}$ розкласти в ряд Тейлора в околі точки $z = 0$.

Розв'язання. Оскільки дана функція – аналітична в усій площині, крім нулів знаменника $z_1 = 2$ і $z_2 = 3$, то згідно теореми 3 в крузі $|z| < 2$ вона розкладається в степеневий ряд за степенями z. Для знаходження цього ряду використаємо розклад дробово-раціональних функцій на прості дроби.

$$f(z) = \frac{1}{z-3} + \frac{1}{z-2}.$$

Кожен із отриманих дробів представимо як суму нескінченно спадної геометричної прогресії:

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n, \ |z| < 3;$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n, \ |z| < 2.$$

Тому для $|z| < 2$ отримаємо шуканий розклад в ряд Тейлора:

$$\frac{2z-5}{z^2-5z+6} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{-n-1} + 3^{-n-1}\right)z^n.$$

Неважко переконатися, що радіус збіжності отриманого степеневого ряду дорівнює 2.

Відповідь: $\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6} = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{-n-1} + 3^{-n-1}\right)z^n$, $|z| < 2$.

Частина II
Виконати завдання

1. Знайти область збіжності степеневого ряду:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n (z+1)^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n (z-i)^n$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{(2i)^n}(z-2+i)^n$;

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^n}{i}\right)^n z^n$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n (z+i)^{2n}}{n+1}$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}z^n$.

2. Знайти множини, на яких рівномірно збігаються ряди:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{3^n}(z-i)^n$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{n}\right)^n (z-2)^n$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i\sqrt{3})^{n+1}}{i^n}(z-4)^n$.

3. Розвинути функції в ряд Тейлора в околі точки z_0:

1) $f(z) = \frac{1}{z+4}$, $z_0 = -1$; 2) $f(z) = \sin^2 z$, $z_0 = 0$; 3) $f(z) = \exp z$, $z_0 = -1$.

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$. Де цей ряд збігається рівномірно?

2. Довести, що функція $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-z}$ являється аналітичною в області $C\setminus N$. Знайти її розклад в ряд Тейлора за степенями z.

Частина IV
Домашнє завдання

1. Знайти область збіжності степеневого ряду:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(z-i)^n}{3^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n z^n$;

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^{2n+1}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n z^{n^2}$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+i3^n)(z-1+i)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot z^{2^n}}{2^n}$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty}(3^n+n)(z+1-2i)^n$.

2. Розвинути функції в ряд Тейлора в околі точки z_0:

1) $f(z)=\frac{2}{z-1}$, $z_0=i$; 2) $f(z)=\cos(3z-i)$, $z_0=0$;

3) $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$, $z_0=0$.

Відповіді

Частина II. 1. 1) $|z+1|<\frac{1}{2}$; 2) $|z-i|<e$; 3) $|z-2+i|<2$; 4) $|z|<\frac{1}{3}$; 5) $|z+i|<\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $|z|<\infty$. **2**. 1) ряд збігається лише в точці $z=i$; 2) $|z-2|<\infty$; 3) $|z-4|<\frac{1}{2}$. **3.** 1) $\frac{1}{3}\left(1-\frac{z+1}{3}+\frac{(z+1)^2}{9}-...+(-1)^n\frac{(z+1)^n}{3^n}+...\right)$, збігається при $|z+1|<3$; 2) $\frac{2^1}{2!}z^2-\frac{2^3}{4!}z^4+...+(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n}+...$ збігається на всій комплексній площині; 3) $\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n!}$ при $|z|<\infty$.

Частина III. **1**. При $|z|<1$ – збігається, а при $|z|\geq 1$ – розбігається. Рівномірно збігається на кожній компактній підмножині кола $|z|<1$.

Частина IV. **1.** 1) $|z|<1$; 2) $|z-i|<3$; 3) ряд збігається лише в точці $z=0$; 4) $|z+1|<1$; 5) $|z|<1$; 6) $|z-1+i|<\frac{1}{3}$; 7) $|z|<1$; 8) $|z+1-2i|<\frac{1}{3}$. **2.** 1) $\frac{2}{i-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$ при $|z-i|<\sqrt{2}$;

2) $\cos i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n}\cdot z^{2n}}{(2n)!}+\sin i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{2n-1}\cdot z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ при $|z|<\infty$;

3) $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^{2n}$ при $|z|<2$.

Практичне заняття № 7

Елементарні функції комплексної змінної

Частина I

а) ***Основні теоретичні відомості***
([1], с.252 – 275; [2], с.356-364).

1. Функція $f(z) = \exp x(\cos y + i\sin y)$ називається *показниковою функцією* і позначається $\exp z$. Цю функцію можна визначити через ряд

$$\exp z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Функція $f(z) = \exp z$ визначена на усій комплексній площині.

2. Тригонометричні функції $\cos z$, $\sin z$ комплексного аргументу представляють собою суми степеневих рядів, визначених на усій комплексній площині:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)\,!} + \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)\,!} + \ldots.$$

3. Тригонометричні функції $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\sec z$, $\operatorname{cosec} z$ комплексної змінної z визначаються формулами:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},\ \sec z = \frac{1}{\cos z},\ \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}.$$

4. Властивості показникової і тригонометричних функцій.

1. Для будь-яких комплексних чисел z_1 і z_2 виконується рівність

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) + \exp(z_2).$$

2. Для довільного комплексного числа z виконується рівність

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}.$$

3. Для довільного комплексного числа z

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

4. Для довільних комплексних чисел z_1 і z_2 виконується рівність

$$\exp(z_1 - z_2) = \frac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)}.$$

5. Для будь-якого комплексного числа z виконується рівність

$$\exp(z+2\pi i)=\exp z\,.$$

6. Для будь-яких комплексних чисел z_1 і z_2 виконуються рівності:

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2\,,$$
$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2\,.$$

7. Функції $\cos z$ і $\sin z$ є періодичними з періодом $2\pi i$:

$$\cos(z+2\pi)=\cos z,\ \ \sin(z+2\pi)=\sin z.$$

8. Функції $\exp z$, $\sin z$, $\cos z$ є необмеженими в комплексній площині.

5. Функції $\exp z$, $\sin z$ і $\cos z$ пов’язані рівностями:

$$\exp(iz)=\cos z+i\sin z\,,$$
$$\sin z=\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i},$$
$$\cos z=\frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}.$$

які мають назву *формул Ейлера*.

5. Суми рядів

$$\operatorname{sh} z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$
$$\operatorname{ch} z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)\,!}+\ldots$$

визначені на усій комплексній площині, їх називають відповідно *гіперболічним синусом* (позначають $\operatorname{sh} z$) і *гіперболічним косинусом* (позначають $\operatorname{ch} z$).

6. Гіперболічні функції $\operatorname{sh} z$ і $\operatorname{ch} z$ можна визначити за формулами:

$$\operatorname{sh} z=\frac{\exp z-\exp(-z)}{2},\quad \operatorname{ch} z=\frac{\exp z+\exp(-z)}{2}.$$

7. Формули

$$\sin(iz)=\frac{\exp(-z)-\exp z}{2i}=i\operatorname{sh} z\,,\quad \cos iz=\frac{\exp(-z)+\exp z}{2}=\operatorname{ch} z$$

встановлюють зв’язок між тригонометричними та гіперболічними функціями.

8. *Логарифмічною функцією* називають функцію, обернену до показникової функції $w=\exp z$ і позначають $w=\operatorname{Ln} z$.

Областю існування (визначення) логарифмічної функції є множина значень, яких набуває показникова функція.

9. Усі значення логарифма комплексного числа $z\neq 0$ містяться у рівності

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)\,,\ \ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots\,,$$

де $\ln|z|$ є звичайний натуральний логарифм додатного числа $|z|$.

Логарифмічна функція $\mathrm{Ln}\, z$ є нескінченнозначна. Різні значення її відрізняються коефіцієнтом при i на $2\pi k$.

10. Для будь-яких двох комплексних чисел $z_1 \neq 0$ і $z_2 \neq 0$ виконуються рівності:

$$1)\ \mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2;$$

$$2)\ \mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2.$$

11. Функції, обернені до функцій $z = \cos w$, $z = \sin w$, $z = \mathrm{tg}\, w$, $z = \mathrm{ctg}\, w$, називаються *арккосинусом, арксинусом, арктангенсом* і *арккотангенсом* відповідно (або їх загальна назва – *обернені тригонометричні функції*).

12. Обернені тригонометричні функції визначаються за формулами:

$$\mathrm{Arccos}\, z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(iz + i\sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\mathrm{Arcsin}\, z = \frac{1}{i}\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},$$

$$\mathrm{Arcctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z+i}{z-i}.$$

13. Функції, обернені до функцій $z = \mathrm{sh}\, w$, $z = \mathrm{ch}\, w$, $z = \mathrm{th}\, w$, $z = \mathrm{cth} w$, називаються *оберненими гіперболічними функціями*.

14. Обернені гіперболічні функції визначаються за формулами:

$$\mathrm{Arcchz} = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\mathrm{Arcshz} = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}),$$

$$\mathrm{Arctgz} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z},$$

$$\mathrm{Arcctgz} = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{z+1}{z-1}.$$

15. Загальна степенева функція z^α, де a – довільне дійсне або комплексне число, а $z \neq 0$, визначається за допомогою рівності

$$z^\alpha = \exp(\alpha \cdot \mathrm{Lnz}).$$

Таким чином, загальна степенева функція є нескінченно значною, всі її значення знаходять за формулою

$$z^\alpha = \exp\left(\alpha \cdot (\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi))\right),\ \ k = 0, \pm 1, \ldots .$$

16. Загальна показникова функція комплексної змінної a^z, $a \neq 0$, визначається за формулою

$$a^z = \exp(z \cdot \operatorname{Ln} a).$$

Ця функція визначена у всій комплексній площині.

б) ***Питання для самоперевірки.***

1. Як визначаються через ряди показникова і тригонометричні функції?
2. Які функції пов’язують між собою формули Ейлера?
3. Що можна сказати про обмеженість і періодичність показникової і тригонометричних функцій?
4. Які формули встановлюють зв'язок між тригонометричними та гіперболічними функціями?
5. Як знайти усі значення логарифма комплексного числа?
6. Як визначаються обернені гіперболічні функції комплексного аргументу?
7. За яким формулами можна знайти всі значення загальної степеневої і загальної показникової функцій?

в) ***Методичні вказівки до розв’язування задач.***

1. Обчислити: 1) $\exp(-2+i)$; 2) $\sin(1-2i)$; 3) $\operatorname{Ln}(1+i)$; 4) i^i; 5) $\operatorname{Arcsin} 2$.

Розв'язання.

1) $\exp(-2+i) = \exp(-2)\cdot\exp(i) = \exp(-2)\cdot(\cos 1 + i\sin 1)$;

2) $\sin(1-2i) = \sin 1\cdot\cos 2i - \cos 1\cdot\sin 2i = \sin 1\cdot\operatorname{ch} 2 - i\cos 1\cdot\operatorname{sh} 2$.

3) $\operatorname{Ln}(1+i) = \ln|1+i| + i(\arg(1+i) + 2k\pi) = \ln\sqrt{2} + i\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$,

$k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Наприклад, при $k = 1$ маємо: $\operatorname{Ln}(1+i) = \dfrac{1}{2}\ln 2 + \dfrac{9\pi}{4}i$.

4) $i^i = \exp(i\cdot\operatorname{Ln} i) = \exp\left(-\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

5) $\operatorname{Arcsin} 2 = \dfrac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(2i \pm \sqrt{-3}\right) = \dfrac{1}{i}\operatorname{Ln}(2i \pm \sqrt{3})i$. Обидва значення $2 \pm \sqrt{3}$ додатні, значить, $\left|\left(2 \pm \sqrt{3}\right)i\right| = 2 \pm \sqrt{3}$, $\arg\left(2 \pm \sqrt{3}\right)i = \dfrac{\pi}{2}$. Тому

$$\operatorname{Arcsin} 2 = \frac{1}{i}\left[\ln(2 \pm \sqrt{3}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]$$

або $$\operatorname{Arcsin} 2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3}),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Наприклад, при $k = 0$ знайдемо два значення $\operatorname{Arcsin} 2$, які дорівнюють $\frac{\pi}{2} \pm i\ln(2 + \sqrt{3})$.

2. Розв’язати рівняння $\sin z = 2$.

<u>*Розв'язання.*</u> Нехай $z = x + iy$. Знаходимо, що

$$\sin(x + iy) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i\cos x \cdot \operatorname{sh} y.$$

Це рівняння можна переписати у вигляді

$$\sin x \cdot \operatorname{ch} y + i\cos x \cdot \operatorname{sh} y = 2.$$

Виходячи із умови рівності двох комплексних чисел, отримаємо систему

$$\begin{cases} \sin x \cdot \operatorname{ch} y = 2, \\ \cos x \cdot \operatorname{sh} y = 0. \end{cases}$$

Припущення, що $\operatorname{sh} y = 0$ (або $y = 0$), приводить до того, що $\operatorname{ch} y = \operatorname{ch} 0 = 1$, і тоді із першого рівняння системи випливало б, що $\sin x = 2$, чого для дійсних x бути не може. Тому $\operatorname{sh} y \neq 0$, і, значить (в силу другого рівняння системи), $\cos x = 0$, а з першого рівняння системи випливає, що $\sin x = 1$. Тому $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (k - ціле). При цьому виявиться, що $\operatorname{ch} y = 2$. Замінивши ch$y$ на $\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$ і розв’язавши отримане рівняння, знайдемо: $y = \ln\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ і $y = \ln\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$.

Отже, рівняння має наступні комплексні розв’язки:

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i\ln\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \text{ і } z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i\ln\frac{2 - \sqrt{3}}{2}, \text{ де } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

3. Визначити, як перетворюється смуга $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ при відображенні $w = \sin z$.

<u>*Розв'язання.*</u> Розглянемо спочатку, у що перетворюється при даному відображенні довільна пряма $x = c$ $\left(\frac{\pi}{2} < c < \pi\right)$. Для точки $w = u + iv$, яка є образом довільної точки $z = c + iy$ цієї прямої, маємо:

$$w=\sin z \Leftrightarrow u+iv=\sin c\cdot \operatorname{ch} y + i\cos c\cdot \operatorname{sh} y \Leftrightarrow \begin{cases} u=\sin c\cdot \operatorname{ch} y \\ v=\cos c\cdot \operatorname{sh} y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u}{\sin c}=\operatorname{ch} y \\ \dfrac{v}{\cos c}=\operatorname{sh} y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{\sin^2 c}-\frac{v^2}{\cos^2 c}=\operatorname{ch}^2 y-\operatorname{sh}^2 y \Leftrightarrow \frac{u^2}{\sin^2 c}-\frac{v^2}{\cos^2 c}=1. \qquad (16)$$

Ми отримали, що точка $w=u+iv$ – образ точки $z=c+iy$ – задовольняє рівняння (16), яке визначає гіперболу (рис. 8). Але, коли точка z пробігає пряму $x=c$, її образ w може і не описати усієї гіперболи, так як при виведенні рівняння (16) застосовувались такі перетворення, які можуть привести до отримання сторонніх розв’язків. З’ясуємо, чи вся гіпербола (16) являється образом прямої $x=c$. Для цього розглянемо отримані в процесі розв’язання параметричні рівняння

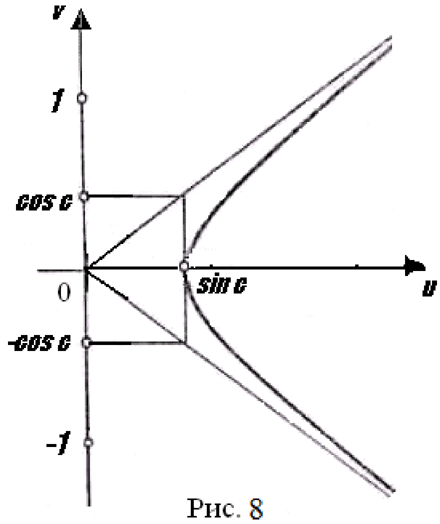


Рис. 8

$$u=\sin c\cdot chy,$$
$$v=\cos c\cdot shy,$$

які при $-\infty<y<+\infty$ в точності визначає шуканий образ. Так як $chy>0$ при будь-якому y, а $\sin c>0$ при розглядуваних c, то $u>0$. Це означає, що образ прямої лежить лише на правій гілці гіперболи (16). Із того ж, що при зміні y від $-\infty$ до $+\infty$ функція $\operatorname{sh} y$ також змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, випливає, що v змінюється (так як $\cos c<0$) від $+\infty$ до $-\infty$. Це означає, що шуканий образ співпадає з правою гілкою гіперболи (16).

Частина II
Виконати завдання

1. Обчислити:

1) $\exp(5-i)$; 2) $\exp(3\pi i)$; 3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+i\right)$; 4) $\operatorname{Ln}\left(-3-i\sqrt{3}\right)$;

5) $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$; 6) $(-1)^{-i}$; 7) $(1-i)^{1+i}$;) $\operatorname{Arctg}1$; 9) $\operatorname{Arccos}(-3)$.

2. Довести формули:

1) $\cos^2 z + \sin^2 = 1$; 2) $\sin(-z) = -\sin z$;

3) $\text{ch}(z_1 \pm z_2) = \text{chz}_1 \text{chz}_2 \pm \text{shz}_1 \text{shz}_2$; 4) $\cos(z+\pi) = -\cos z$;

5) $\sin z = -i \,\text{sh} iz$.

3. Розв'язати рівняння: sh 4) $\ln(i - z) = 0$.

4. Знайти образи областей при відображенні $w = \exp z$:

1) $\{z \mid 0 < \text{Im}\, z < 2\pi\}$; 2) $\{z \mid -\infty < \text{Re}\, z < 0,\ 0 < \text{Im}\, z < \pi\}$;

3) $\left\{z \mid 0 < \text{Re}\, z < +\infty,\ 0 < \text{Im}\, z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. Чи можна піднести 1 в якусь степінь, щоб отримати число 100?

2. Обчислити $\text{Log}_{-2}(-8)$. Скільки серед знайдених значень є дійсних чисел?

3. Чи можливо при піднесенні уявного числа в ірраціональну степінь отримати дійсне число?

4. Чи правильна рівність $\text{Lnz} + \text{Lnz} = 2\text{Lnz}$?

Частина IV
Домашнє завдання

1. Обчислити:

1) $\exp(2-3i)$; 2) $\exp\left(\dfrac{\pi}{4} + i\dfrac{\pi}{4}\right)$; 3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - i\right)$; 4) $\text{Ln}5$;

5) $\text{Ln}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$; 6) 2^i; 7) $(1+i)^i$; 8) $\text{Arcsin}10$; 9) $\text{Arcctg}(2i)$.

2. Довести формули:

1) $\text{ch}^2 z - \text{sh}^2 z = 1$, 2) $\cos(-z) = \cos z$;

3) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1$; 4) $\sin\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos z$;

5) $chz = \cos iz$.

3. Розв'язати рівняння:

1) $\exp z = i$; 2) $\text{shz} = i$; 3) $\sin z = \pi i$; 4) $\ln(z+i) = 1$.

4. Знайти образи областей при відображенні $w = \exp z$:

1) $\{z \mid 1 < \text{Re}\, z < 3,\ 0 < \text{Im}\, z < \pi\}$;

2) $\left\{z \mid 0 < \text{Re}\, z < 1,\ \dfrac{\pi}{3} < \text{Im}\, z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Відповіді

Частина ІІ. 1. 1) $e^5(\cos 1 - i\sin 1)$; 2) -1; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}(ch1 - ish1)$;

4) $\ln 2\sqrt{3} + i\left(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 5) $i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

6) $e^{\pi + 2\pi k}$, $k \in Z$; 7) $(1-i)e^{i\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - 2\pi k}$, $k \in Z$; 8) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$;

9) $-i\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + \pi(1 + 2k),\ k \in Z$. **3.** 1) $z = i\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$;

2) $z = (-1)^k \frac{\pi i}{6} + k\pi i$, $k \in Z$; 3) $z = 2k\pi$, $k \in Z$; 4) $z = i - 1$. **4.** 1) $0 < |w| < \infty$ без додатної дійсної осі; 2) $0 < |w| < 1$; 3) сектор кола з центром в початку координат і радіусом $\frac{\pi}{2}$ у першій чверті.

Частина ІІІ. 1. Так, наприклад, до степеня $b = \frac{\ln 10}{\pi i}$. **2**. Одне дійсне число 3. **3**. Так. **4**. Ні.

Частина IV. 1. 1) $e^2(\cos 3 - i\sin 3)$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}(1+i)}$; 3) $ch1$; 4) $\ln 5 + 2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 5) $\ln 2 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 6) $e^{i \cdot \ln 2}$;

7) $e^{-\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)}\left[\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2}\right],\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

8) $\frac{4k+1}{2}\pi - i\ln\left(10 \pm \sqrt{99}\right),\ k \in Z$; 9) $k\pi - \frac{i}{2}\ln 3,\ k \in Z$. **3.** 1) $z = i\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$; 2) $z = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$; 3) $z = (2k+1)\pi - i\ln\left(\sqrt{\pi^2 + 1} + \pi\right)$, $z = 2k\pi - i\ln\left(\sqrt{\pi^2 + 1} - \pi\right)$, $k \in Z$; 4) $z = e - i$. **4.** 1) $e < |w| < e^3$; 2) $1 < |w| < e$.

Практичне заняття № 8

Інтеграл функції комплексної змінної

Частина I

а) ***Основні теоретичні відомості***
([1], с.291 – 297; [2], с.338-343).

1. Нехай функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ задано на кусково-гладкої кривої L. Тоді, то обчислення комплексного інтеграла від функції $f(z)$ вздовж кривої L зводиться до обчислення звичайних криволінійних інтегралів, а саме:

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_L v(x,y)dx + u(x,y)dy. \qquad (17)$$

2. Якщо крива L задається рівнянням $z=z(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, то обчислення комплексного інтеграла від функції $f(z)$ по кривій L (в напрямку зростання параметра t) зводиться до обчислення визначеного інтеграла за формулою:

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt. \qquad (18)$$

3. Властивості інтегралів від функції комплексного аргументу:

1) $\int_{L^-} f(z)dz = -\int_{L^+} f(z)dz$, де криві L^- і L^+ відрізняються лише напрямом їх обходу;

2) $\int_L \big(af(z)+bg(z)\big)dz = a\int_L f(z)\,dz + b\int_L f(z)\,dz$, де a і b – довільні комплексні числа;

3) $\int_L f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{L_k} f(z)\,dz$, де L_k, $k=1,2,...n$, – криві, які одержуються при якому-небудь розбитті кривої L на частини так, що початок кривої L_1 збігається з початком кривої L, початок кривої L_{k+1} $(k=1,\,2,...,n-1)$ – з кінцем кривої L_k і кінець кривої L_n – з кінцем кривої L.

4. Формули (17) і (18) застосовні і до інтегралів, що обчислюються по замкнених контурах. Якщо шлях інтегрування L є проста замкнена крива, то під символом $\int_L f(z)dz$ при відсутності вказівок на напрям об-

ходу контуру розуміють інтеграл, що обчислюється по кривій в додатному напрямі.

б) ***Питання для самоперевірки.***

1. Записати формулу, яка зводить обчислення інтеграла від функції комплексної змінної до обчислення звичайних криволінійних інтегралів.
2. Записати формулу для обчислення комплексного інтеграла від функції $f(z)$, коли L задано параметрично.
3. Чи вірно, що:

$$\int_L f(z)dz = \int_{L_1^+} f(z)dz + \int_{L_2^+} f(z)dz = -\int_{L_2^-} f(z)dz - \int_{L_2^-} f(z)dz \ ?$$

в) ***Методичні вказівки до розв'язування задач.***

1. Обчислити інтеграл $I = \int_L \overline{z}\, dz$ по кривим, що з'єднують точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 + i$:

а) по відрізку прямій;

б) вздовж дугі параболі $y = x^2$;

в) вздовж дугі параболі $y = \sqrt{x}$;

г) вздовж ламаній, яка з'єднує точки z_1, z_2, z_3, де $z_1 = 0$, $z_1 = 1 + i$, $z_3 = i$.

<u>*Розв'язання.*</u> Відмітимо, що рівняння контуру інтегрування в кожному з випадків а), б), в) можна записати таким чином:

а) $z = (1+i)t$, $0 \le t \le 1$, $dz = (1+i)dt$;

б) $z = t + i t^2$, $0 \le t \le 1$, $dz = (1 + 2i t)dt$;

в) $z = t^2 + i t$, $0 \le t \le 1$, $dz = (2t + i)dt$;

Тому отримуємо:

а) $I = \int_0^1 (1-i)t\left(1+i\right) dt = 1$;

б) $I = \int_0^1 (t - i t^2)(1 + 2i t)dt = 1 + \dfrac{i}{3}$;

в) $I = \int_0^1 (t^2 - it)(2t + i)dt = 1 - \dfrac{i}{3}$.

г) Крива інтегрування є об'єднанням двох відрізків $z_1 z_2$ і $z_2 z_3$, при цьому:

$z_1 z_2$: $z=(1+i)t$, $0\le t\le 1$, $dz=(1+i)\,dt$;

$z_2 z_3$: $z=t+i$, $t\in[1;0]$, $dz=dt$ (рис. 9).

Тому маємо

$$I=\int_0^1 (1-i)t(1+i)\,dt+\int_1^0 (t-i)\,dt=1+\left(-\frac{1}{2}+i\right)=\frac{1}{2}+i\,.$$

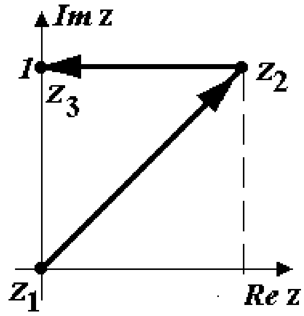


Рис. 9

2. Обчислити інтеграл $\int\limits_{|z|=2} z\cdot \operatorname{Im} z^2 dz$.

Розв'язання. Виділимо дійсну і уявну частини підінтегральної функції $f(z)=z\cdot \operatorname{Im} z^2$:

$$u(x,y)=2x^2y\,,\quad v(x,y)=2xy^2\,.$$

На основі формули (17) отримуємо:

$$\int\limits_{|z|=2} z\cdot \operatorname{Im} z^2 dz=\int\limits_{x^2+y^2=4} 2x^2y\,dx-2xy^2dy+i\int\limits_{x^2+y^2=4} 2xy^2dx+2x^2ydy\,.$$

Рівняння контуру інтегрування (коло $|z|=2$) визначимо параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=2\sin t, \end{cases}\quad (0\le t\le 2\pi).$$

Обчислюючи криволінійні інтеграли відомим (з курсу математичного аналізу) способом, отримаємо:

$$\int\limits_{|z|=2} z\cdot \operatorname{Im} z^2 dz=32\left(-2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\cdot\sin^2 t\,dt+i\int_0^{2\pi}\cos^3 t\cdot\sin t-\cos t\cdot\sin^3 t\,dt\right)=-16\pi\,.$$

3. Обчислити $\int\limits_L |z|\,dz$, якщо крива інтегрування:

а) відрізок прямої, що з’єднує точки -1 і 1;

б) нижня половина одиничного кола $|z|=1$, початкова точка кривої інтегрування $z=-1$.

Розв'язання.

а) Рівняння відрізка, що з’єднує точки -1 і 1, параметрично можна записати так:

$$z=t\,,\ -1\le t\le 1;\ \ dz=dt\,.$$

Тоді за формулою (18)

$$\int\limits_L |z|\,dz=\int_{-1}^{1}|t|\,dt=\int_{-1}^{0}(-t)\,dt+\int_0^1 t\,dt=-\left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{0}+\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1=1.$$

б) Рівняння нижньої половини одиничного кола запишемо у вигляді

$$z=\exp(it)\,,\quad \pi\le t\le 2\pi$$

(якщо $t=\pi$, то $z=-1$, а якщо $t=2\pi$, то $z=1$). За формулою (18) отримаємо:

$$\int_L |z|dz = \int_0^{2\pi} |\exp(it)|\cdot i\exp(it)\,dt = \exp(it)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 2\,.$$

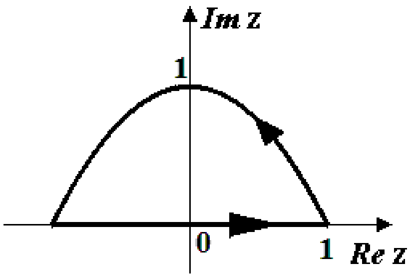


Рис.10

4. Обчислити інтеграл $\int_L z\,dz$, якщо L – замкнений контур, утворений дугою параболи $y=1-x^2$ і відрізком на осі абсцис. Контур L обходиться в додатному напрямі (рис. 10).

<u>*Розв'язання.*</u> Контур L розіб'ємо на дві частини L_1 і L_2, де L_1– прямолінійний відрізок $[-1;1]$, а L_2 – дуга параболи від точки $z_1=1$ до $z_2=-1$.

Рівняння контуру L_1: $y=0$, $-1\le x\le 1$. Враховуючи, що для підінтегральної функції $f(z)=z$, $u(x,y)=x$ і $v(x,y)=y$, за формулою (17) отримуємо:

$$\int_{L_1} zdz = \int_{-1}^{1} xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0\,.$$

Рівняння контуру $L_2: y=1-x^2$, $x\in[1;-1]$ (бо контур L обходиться в додатному напрямі). Тому

$$\int_{L_2} zdz = \int_{L_2} xdx - ydy + i\int_{L_2} ydx + xdy =$$

$$= \int_1^{-1}\big(x+(x^2-1)(-2x)\big)dx + i\int_1^{-1}\big(1-x^2+x(-2x)\big)dx =$$

$$= \int_1^{-1}\big(3x-2x^3\big)dx + i\int_1^{-1}\big(1-3x^2\big)dx = \left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^4}{2}\right)\Big|_1^{-1} + i\big(x-x^3\big)\Big|_1^{-1} = 0\,\cdot$$

Отже, $\int_L zdz = \int_{L_1} zdz + \int_{L_2} zdz = 0+0=0.$

Частина II
Виконати завдання

1. Обчислити $\int_L \operatorname{Re} z\,dz$, якщо:

1) L – відрізок $[0;\,1]$ осі Ox;

2) L – радіус-вектор точки $1+3i$;

3) L – півколо $|z|=2$, $\operatorname{Im} z \le 0$, початок кривої в точці $z=-2$.

2. Обчислити $\int\limits_L \frac{\bar{z}}{|z|}dz$, де контур L складається з ліній:

1) $\begin{cases} |z|=1, \\ 0 \le \arg z \le \pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=0, \\ 1 \le \operatorname{Re} z \le 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} |z|=2, \\ 0 \le \arg z \le \pi; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y=0, \\ -2 \le \operatorname{Re} z \le -1. \end{cases}$

3. Обчислити $\int\limits_L (z^2+1)\,dz$, якщо L – дуга параболи $y=x^2$ від точки $z_1=0$ до $z_2=-1+i$.

4. Обчислити $\int\limits_L |z|\bar{z}\,dz$, де L – частина кола $\begin{cases} |z|=1, \\ 0 \le \arg z \le \pi; \end{cases}$, вибравши за початок кривої L точку $z=1$.

5. Обчислити $\int\limits_L (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z^2)\,dz$, де L – квадрат з вершинами в точках $z=\pm 1$ та $z=\pm i$.

6. Обчислити $\int\limits_{AB} (\operatorname{Re} z - 3z)dz$, де AB – частина синусоїди $y=\sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. Обчислити інтеграли вздовж відрізка L прямої з початком в точці $z_1=0$ і кінцем $z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ від функцій:

1) $\exp\left(|z|^2\right)\operatorname{Re} z$; 2) $\exp(z^2)\operatorname{Re} z$; 3) $\frac{|z|}{|z|+1}$.

2. Обчислити $\int\limits_L tgz\,dz$, де L – дуга параболи $y=x^2$, що з’єднує точки $z_1=0$ і $z_2=1+i$.

Частина IV
Домашнє завдання

1. Обчислити $\int\limits_L \frac{dz}{z}$, якщо: 1) L – коло $|z|=1$; 2) L – гладка крива, що з’єднує точки 1 і z і не проходить через початок координат.

2. Обчислити $\int\limits_L \frac{dz}{|z|}$, якщо:

1) L – відрізок прямої з початком в точці $1+i$ і кінцем в точці $3+3i$;
2) L – півколо $|z|=2$, $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$;
3) L – коло $|z|=r$.

3. Обчислити $\int\limits_L z\,dz$, якщо:

1) L – дуга кривої $y=\sin x$, $0 \le x \le \pi$, початок кривої в точці $z=\pi$;
2) L – квадрат $[0,1;\ 0,1]$.

4. Обчислити $\int\limits_L z\,\bar{z}\,dz$, де L – контур, що складається з півкола $|z|=1$, $0 \le \arg z \le \pi$ і відрізка $-1 \le x \le 1$, $y=0$.

Відповіді

Частина II. 1. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}(1+3i)$; 3) $2\pi i$. **2.** πi. **3.** $-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}i$. **4.** πi. **5.** $2i$. **6.** $-2\pi^2+i\cdot 4\pi$.

Частина III. 1. 1) $\frac{e-1}{8}(1+i\sqrt{3})$; 2) $\frac{1}{8}(1-i\sqrt{3})\left(\exp\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{3}\right)-1\right)$; 3) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(1-\ln 2)$. **2.** $-\ln\sqrt{\mathrm{sh}^2 1+\mathrm{ch}^2 1}+i\,\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}1\cdot\mathrm{th}1)$.

Частина IV. 1. 1) $2\pi i$; 2) $Ln\, z$. **2.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\ln 3$; 2) $2i$; 3) 0. **3.** 1) $-\frac{\pi^2}{2}$; 2) 0. **4.** $-\frac{4}{3}$.

Практичне заняття № 9

Інтегральна теорема Коші. Первісна функції. Інтегрування степеневих рядів.

Частина I

а) *Основні теоретичні відомості*
([1], с.297 – 304, 309 –313; [2], с.343-345).

1. Інтегральна теорема Коші. Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в однозв'язній області D, то інтеграл від неї по довільному замкненому кусково-гладкому контуру L, який лежить в області D, дорівнює нулю:

$$\int_L f(z)\,dz = 0$$

2. Функція $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$, аналітична в однозв'язній області D, називається первісною функції $f(z)$, якщо $\Phi'(z) = f(z)$ для всіх точок $z \in D$.

3. Обчислення інтеграла від аналітичної функції до відшукання її первісної зводить формула

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \Phi(z) - \Phi(z_0), \tag{19}$$

яка є аналогом формули Ньютона-Лейбніца. Тут $\Phi(z)$ – первісна $f(z)$.

4. Нехай функції $f(z)$ і $g(z)$ разом зі своїми похідними першого порядку аналітичні в однозв'язній області D. Тоді справедлива рівність

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)g'(\zeta)\,d\zeta = f(\zeta)\cdot g(\zeta)\Big|_{z_0}^{z} - \int_{z_0}^{z} f'(\zeta)\cdot g(\zeta)\,d\zeta \tag{20}$$

5. Якщо степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ має додатний радіус збіжності ($R > 0$), то його сума $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ диференційована в крузі збіжності, причому $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,a_n (z-z_0)^{n-1}$. Радіус збіжності одержаного ряду також дорівнює R.

6. Сума степеневого ряду $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ нескінченно диференційована в крузі збіжності: похідну довільного порядку p одержуємо за допомогою p-кратного почленного диференціювання ряду:

$$f^{(p)}(z)=\sum_{n=p}^{\infty}n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-p+1)a_n(z-z_0)^{n-p},\ p\in N.$$

Степеневий ряд можна почленно інтегрувати по будь-якому кусково-гладкому контуру, що лежить в крузі збіжності.

б) *Питання для самоперевірки.*

1. Нехай L – коло $|z-1|=1$. Пояснити, чому до інтегралів $\int_L (z^2-1)\,dz$, $\int_L \frac{dz}{z^2+1}$ можна застосувати інтегральну теорему Коші і стверджувати, що вони дорівнюють нулю, а до інтеграла $\int_L \frac{dz}{z^2-1}$ теорему Коші застосувати не можна.

2. Пояснити, чому можна стверджувати, що інтеграл $\int_L \frac{dz}{z^2+2}$ дорівнює нулю, коли L– коло $|z|=1$, але не можна цього стверджувати, коли L – коло $|z|=2$.

3. Пояснити, чому можна стверджувати, що інтеграл $\int_0^z \frac{dz}{z^2+4}$ не залежить від шляху інтегрування, який розташовано в правій півплощині $\operatorname{Re} z>0$, але цього не можна стверджувати для верхньої півплощини $\operatorname{Im} z>0$.

4. Пояснити, чому можна стверджувати, що інтеграли $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z(z^2-9)}$ і $\int_{|z|=2}\frac{dz}{z(z^2-9)}$ рівні, але не можна стверджувати, що вони рівні інтегралу $\int_{|z|=4}\frac{dz}{z(z^2-9)}$.

5.Дати означення первісної функції.

6. Сформулювати теореми про почленне диференціювання і інтегрування степеневих рядів.

в) *Методичні вказівки до розв'язування задач.*

1. Знайти первісні функції $z\exp(z^2)$.

<u>*Розв'язання.*</u> Оскільки функція $f(z)=z\exp(z^2)$ є аналітичної в комплексній площині (однією з первісних для неї є $F(z)=\frac{1}{2}\exp(z^2)$), то знайти первісні даної функції можна за допомогою формули (19) Ньютона-Лейбніца:

$$\int_{z_0}^{z} z\exp z^2 dz=\frac{1}{2}\exp z^2\Big|_{z_0}^{z}=\frac{1}{2}\exp z^2-\underbrace{\frac{1}{2}\exp z_0{}^2}_{C}=\frac{1}{2}\exp z^2+C.$$

2. Обчислити інтеграл $\int_0^i (z-i)\exp(-z)\,dz$.

<u>*Розв'язання.*</u> Оскільки підінтегральна функція $(z-i)\exp(-z)$ є аналітичною на всій комплексній площині, то скористаємося формулою (20) інтегрування по частинам:

$$\int_0^i (z-i)\exp(-z)\,dz=-(z-i)\exp(-z)\Big|_0^i+\int_0^i \exp(-z)\,dz=i-\exp(-z)\Big|_0^i=$$
$$=1-\cos 1+i(\sin 1-1).$$

3. Знайти суму ряду $\frac{z}{1\cdot 2}+\frac{z^2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{z^n}{n(n+1)}+\ldots$, використовуючи теореми про почленне диференціювання і інтегрування степеневих рядів.

<u>*Розв'язання.*</u> Легко бачити, що даний ряд є збіжним в крузі $|z|<1$. Позначимо його суму через $f(z)$. Тоді

$$\frac{z^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{z^{n+1}}{n(n+1)}+\ldots=z\,f(z).$$

Після двократного почленного диференціювання матимемо:

$$1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots=\frac{d^2}{dz^2}\big(zf(z)\big).$$

Одержаний степеневий ряд є геометричним, і його сума в крузі збіжності $|z|<1$ дорівнює $\frac{1}{1-z}$. Тому $\big(zf(z)\big)''=\frac{1}{1-z}$, звідки

$$f(z)=1+(1-z)\frac{\ln(1-z)}{z}\quad(|z|<1).$$

Частина II
Виконати завдання

1. В яких випадках до інтеграла $\int\limits_L \frac{dz}{z^2-4}$ можна застосовувати інтегральну теорему Коші, якщо контур L – коло:

1) $|z| = \frac{1}{2}$; 2) $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$; 3) $|z-1| = 2$; 4) $|z-2| = 2$; 5) $|z| = 3$?

2. Користуючись формулою (20), знайти первісні функцій:

1) $z\cos z$; 2) $z\exp(az)$; 3) $z\,\text{sh}z$.

3. Обчислити інтеграли від аналітичних функцій:

1) $\int\limits_0^{1+i} (z^2 - 2iz)\,dz$; 2) $\int\limits_0^{1+i} \exp(z)\cdot\text{ch}z\,dz$; 3) $\int\limits_0^{2i} z\cdot\text{sh}z\,dz$.

4. Знайти суми рядів, використовуючи теореми про почленне диференціювання і інтегрування степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} z^n$.

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в крузі $0 < |z-a| < R$ з виколотою точкою $z = a$. Довести, що інтеграл

$$\int\limits_{|z-a|=\rho} f(z)dz, \quad 0 < \rho < R$$

не залежить від числа ρ.

2. Нехай $g(z)$ – аналітична в крузі $|z| < R$ функція. Довести, що для існування аналітичного в тому ж крузі розв'язку $f(z)$ рівняння

$$\int\limits_0^z (z-\zeta)^{m-1} f(\zeta)\,d\zeta = g(z) \quad (m \in N)$$

необхідно і достатньо виконання умови

$$g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(m-1)}(0) = 0.$$

Знайти цей розв'язок.

3. Нехай функції $f(z)$ і $g(z)$ є аналітичними в крузі $|z| < R$ і

$$\int\limits_0^z f(\zeta)g(z-\zeta)\,d\zeta \equiv 0 \quad (|z| < R).$$

Довести, що або $f(z) \equiv 0$, або $g(z) \equiv 0$ в цьому ж крузі.

Частина IV
Домашнє завдання

1. Знайти первісні функцій:

$$1)\ z\sin^2 z;\quad 2)\ \exp(az)\cdot\sin(bz);\quad 3)\ \exp(2z)\cdot\sin^2 z.$$

2. Обчислити інтеграли від аналітичних функцій:

$$1)\ \int_0^{1+i} z\cdot\cos 2z\,dz;\quad 2)\ \int_0^{\ln 2} z^2\cdot\exp(z)\,dz;\quad 3)\ \int_0^{i}\cos^2 z\,dz.$$

3. Знайти суми рядів, використовуючи теореми про по членне диференціювання і інтегрування степеневих рядів:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n;\quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\,(z-i)^n.$$

Відповіді

Частина II. 1. 1) можна; 2) можна ; 3) не можна; 4) не можна; 5) не можна. **2**. 1) $z\sin z+\cos z+C$; 2) $\frac{z}{a}\exp(az)-\frac{1}{a}\exp(az)+C$;

3) $z\operatorname{ch} z-\operatorname{sh} z+C$. **3.** 1) $\frac{4}{3}+\frac{2}{3}i$; 2) $\frac{e^2}{4}\cos 2+\frac{1}{4}+i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^2\sin 2\right)$;

3) $i(2\cos 2-\sin 2)$. **4.** 1) $\frac{z}{(1-z)^2}$; 2) $\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$; 3) $-\frac{2z}{(z+2)^2}$.

Частина III. **2.** $f(z)=\frac{1}{(m-1)!}g^{(m)}(z)$.

Частина IV. **1.** 1) $\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{4}z\sin 2z-\frac{1}{8}\cos 2z+C$;

2) $\frac{\exp(az)}{a+b}\big(\sin(bz)-\cos(bz)\big)+C$; 3) $\frac{\exp(2z)}{8}\big(2-\sin(2z)-\cos(2z)\big)+C$.

2. 1) $\frac{1+i}{2}\left(\sin(2+2i)+\frac{1}{4}\cos(2+2i)-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}$; 2) $2(\ln^2 2-2\ln 2+2)$;

3) $\frac{i}{2}\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{sh}2\right)$. **3.** 1) $\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$; 2) $\frac{i-z}{(1-i+z)^2}$.

Практичне заняття № 10

Інтегральна формула Коші. Формула Коші для похідних

Частина І

а) ***Основні теоретичні відомості***
([1], с.304 – 307, 321 – 322; [2], с.346 – 349).

1. Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в замкненій однозв'язній області D і L – замкнений кусково-гладкий контур, що обмежує цю область. Тоді для всякої точки $z_0 \in D$ має місце формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz \qquad (21)$$

Ця формула називається <u>інтегральною формулою Коші</u>.

2. Нехай функція $f(z)$ – аналітична в замкненій однозв'язній області D, обмеженій кусково-гладким контуром L. Тоді для всякої точки $z_0 \in D$ функція $f(z)$ нескінченне число раз диференційована і має місце формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\cdot\int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz, \quad n = 1, 2, \ldots . \qquad (2)$$

б) ***Питання для самоперевірки.***

1. Записати інтегральну формулу Коші. Що потрібно визначити, щоб обчислити інтеграл функції комплексної змінної?
2. Записати формулу Коші для похідних. Що потрібно визначити, щоб обчислити інтеграл виду $\int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$?

в) ***Методичні вказівки до розв'язування задач.***

1. Обчислити інтеграл $\int_L \frac{dz}{z^2 + 1}$, де L – коло:

а) $|z - i| = 1$; б) $|z + i| = 1$; в) $|z| = 3$.

<u>*Розв'язання.*</u>

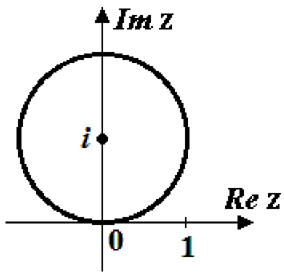


Рис.10

а) Підінтегральна функція $\dfrac{1}{z^2+1}$ в крузі $|z-i|\le 1$ не являється аналітичною, оскільки в точці $z=i$ вона невизначена (рис. 10). Теорему Коші застосувати не можна. Запишемо інтеграл у такому вигляді

$$\int_L \frac{dz}{z^2+1}=\int_L \frac{dz}{(z-i)(z+i)}$$

і порівняємо його з інтегралом у формулі Коші (21). Оскільки функція $\dfrac{1}{z+i}$ в розглядуваній області аналітична, то можна вважати $f(z)=\dfrac{1}{z+i}$, $z_0=i$. Тоді даний інтеграл дорівнює:

$$2\pi i\cdot f(z_0)=2\pi i\frac{1}{i+i}=\pi .$$

б) Тут в якості $f(z)$ функцію $\dfrac{1}{z+i}$ брати не можна: в крузі $|z+i|\le 1$ вона не є аналітичною. Але тут можна покласти $f(z)=\dfrac{1}{z-i}$, $z_0=-i$. Тому шуканий інтеграл дорівнює:

$$2\pi i\frac{1}{-i-i}=-\pi .$$

в) Ні функція $f(z)=\dfrac{1}{z+i}$, ні функція $f(z)=\dfrac{1}{z-i}$ не є аналітичними в крузі $|z|\le 3$. Тому безпосередньо формулу (21) застосувати не можна.

Перетворимо підінтегральну функцію таким чином:

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right).$$

Тоді

$$\int_L \frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\int_L \frac{dz}{z-i}-\frac{1}{2i}\int_L \frac{dz}{z+i}.$$

Кожний з отриманих інтегралів обчислюється за допомогою формули Коші, якщо покласти $f(z)=1$, $z_0=i$ в одному випадку і $z_0=-i$ в іншому:

$$\int_L \frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\cdot 2\pi i\cdot f(i)-\frac{1}{2i}\cdot 2\pi i\cdot f(-i).$$

Оскільки $f(z)=1$, то $f(i)=f(-i)=1$ і інтеграл дорівнює нулю.

2. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^4}dz$, де L – коло $|z-i|=4$.

<u>*Розв'язання.*</u> Для обчислення даного інтегралу скористаємось формулою (22) для похідних аналітичної функції. Оскільки $\sin z$ – аналітична в крузі $|z-i|\le 4$ і точка $\frac{\pi}{3}$ лежить всередині цього круга, то можна покласти $f(z)=\sin z$, $z_0=\frac{\pi}{3}$, $n=3$.

Тоді

$$\int\limits_L \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^4}dz=\frac{2\pi i}{3!}\sin''' z\Big|_{z=\frac{\pi}{3}}=\frac{-2\pi i\cos\frac{\pi}{3}}{6}=-\frac{\pi i}{6}.$$

Частина II
Виконати завдання

1. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \frac{dz}{z(2-z)}$ за допомогою інтегральної формули Коші, якщо:

1) $L=\{z,\ |z|=1\}$; 2) $L=\{z, |z-2|=1\}$; 3) $L=\{z, |z-1|=3\}$.

2. Обчислити інтеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\cos z}{z^2+4}dz$ за допомогою інтегральної формули Коші, якщо:

1) $L:\begin{cases} x=3\cos^3 t, \\ y=3\sin^3 t; \end{cases}$

2) L – об’єднання півкола $\begin{cases} |z|=3, \\ 0\le \arg z\le \pi \end{cases}$ і відрізка $\begin{cases} \operatorname{Im} z=0, \\ -3\le \operatorname{Re} z\le 3. \end{cases}$

3. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \frac{(z+i)\sin^2 z}{z^2+9}dz$ за допомогою інтегральної формули Коші, якщо $L=\{z, |z+3|+|z-3|=10\}$.

4. Обчислити інтеграл $\int\limits_{|z|=2} \frac{\exp z-1}{z(z-i)}dz$.

5. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\exp z}{(z-i)^{50}}dz$; 2) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\exp(z\pi)}{(z^2+1)^2}dz$;

3) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\text{chz}}{(z-i)^{10}}dz$; 4) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{\left(1-\frac{2}{z}\right)^2 \text{expz}}{(z-2i)}dz$.

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. Обчислити $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{4z^2+4z+3}}$ (тут $\sqrt{4z^2+4z+3}\big|_{z=1} > 0$).

2. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_C \frac{\text{sh}(z+1)}{z^2+1}dz$, де C – крива $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$;

2) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z \cdot \sin(z-1)}{z^2-z}dz$;

3) $\displaystyle\int\limits_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz$, де C – коло $x^2+y^2-2x=0$.

Частина IV
Домашнє завдання

1. Обчислити інтеграли за допомогою інтегральної формули Коші:

1) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{z\exp\pi z}{z-\pi i}dz$; 2) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{\text{chz}}{(z-1)(z+i)}dz$;

3) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{z}{z^4-1}dz$; 4) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z+\pi i)}{z\cdot\exp z}dz$.

2. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z^3\text{shz}}{(1-z)^4}dz$; 2) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=1{,}5} \frac{\exp z}{z^2(z-i)^3}dz$; 3) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^3}dz$.

Відповіді

Частина II. 1. 1) πi; 2) $-\pi i$; 3) 0. **2.** 1) 0; 2) $-\dfrac{\text{ch}\,2}{4i}$.

3. $-2\pi i\,\mathrm{sh}^2 3$. **4.** $2\pi(\exp i-1)$. **5.** 1) $\dfrac{2\pi i}{49!}(\cos 1+i\sin 1)$; 2) $\pi^2 i$; 3) $-2\pi\sin 1$; 4) $-4\pi\exp(2i)$.

Частина III. **1.** πi. **2.** 1) $2\pi i\sin 1 ch 1$; 2) 0; 3) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}i$.

Частина IV. **1.** 1) $-2\pi^2(\cos\pi^2+i\sin\pi^2)$; 2) 0; 3) $-\dfrac{\pi i}{2}$; 4) $2\pi i\cos(\pi i)$. **2.** 1) 0; 2) $-4\pi i$; 3) 0.

Практичне заняття № 11

Ряд Лорана

Частина I

а) *Основні теоретичні відомості* ([1], с.330 – 332; [2], с.366 – 367).

1. Ряд виду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \tag{23}$$

де z_0 – фіксована точка комплексної площини, a_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ – задані комплексні числа, називається **рядом Лорана**.

2. Ряд (23) можна розглядати як суму двох рядів:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{24}$$

і

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} . \tag{25}$$

3. Ряд (24) є степеневим рядом і називається <u>правильною частиною</u> ряду Лорана, він збігається всередині деякого круга $|z - z_0| < R$.

4. Ряд (25) є узагальненим степеневим рядом і називається <u>головною частиною</u> ряду Лорана, він збігається зовні деякого круга $|z - z_0| \le r$, тобто на множині $|z - z_0| > r$.

5. Якщо $r < R$, то ряд (23) збігається всередині кільця

$$r < |z - z_0| < R \tag{26}$$

і його сума $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ в цій області є аналітичною функцією; при цьому ряд (23) можна почленно диференціювати і інтегрувати всередині кільця (26).

б) *Питання для самоперевірки*.

1. Що називається рядом Лорана?
2. З яких частин складається ряд Лорана?
2. Що є областю збіжності ряду Лорана?

в) *Методичні вказівки до розв'язування задач.*

1. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{z^n}{3^n+1}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Знайдемо круг збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{3^n+1}$, який є правильною частиною даного ряду. Оскільки

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3^{n+1}}{1+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n}+3}{\frac{1}{3^n}+1}=3,$$

то це круг $|z|<3$.

Ряд $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty} \dfrac{z^n}{3^n+1}$ заміною $w=\dfrac{1}{z}$ приводиться до степеневого ряду $\sum\limits_{k=-1}^{\infty} \dfrac{w^k}{\left(\dfrac{1+3^k}{3^k}\right)}$. Круг збіжності отриманого ряду визначається нерівністю $|w|<1$. Тоді $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$, або $|z|>1$.

Отже, даний ряд збігається в кільці $1<|z|<3$.

2. Знайти область збіжності ряду $\ldots+\dfrac{1}{z^n}+\ldots+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{z}{2^2}+\ldots+\dfrac{z^n}{2^{n+1}}+\ldots$ і обчислити його суму.

<u>*Розв'язання.*</u> Правильна частина $\dfrac{1}{2}+\dfrac{z}{2^2}+\ldots+\dfrac{z^n}{2^{n+1}}+\ldots$ є геометричним рядом із знаменником $\dfrac{z}{2}$ і збігається, як відомо, при $\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$, тобто в крузі $|z|<2$. Суму цього ряду знайдемо як суму нескінченої спадаючої геометричної прогресії

$$\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}=\frac{1}{2-z}.$$

Головна частина $\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots+\frac{1}{z^n}+\ldots$ є геометричним рядом із знаменником $\frac{1}{z}$, збігається при $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ або $|z|>1$, тобто за межами одиничного круга, і представляє собою функцію

$$\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z-1}.$$

Отже, область збіжності даного ряду – кільце $1<|z|<2$, і його сума дорівнює:

$$\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z^2-3z+2}.$$

Частина II
Виконати завдання

1. Знайти області збіжності рядів Лорана:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3\cdot 2^{n+1}}$;   2) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(z+i)^{-n}$;   4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$;

5) $-\frac{i}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^n}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n(z-2+i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+in)(z-2+i)^n$.

2. Знайти області збіжності рядів і обчислити їх суми:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!z^n}$;   2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n-1}}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{z^n}$;   3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-i^{n-1}}{z^n}$.

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{\operatorname{ch}\alpha n}$ $(\alpha>0)$.

2. Показати, що область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n+z^{-n}}$ складається з внутрішності і зовнішності одиничного кола і що в кожній з цих частин ряд представляє одну функцію.

3. Знайти область збіжності ряду

$$\frac{1}{z-2}+i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}}{5^{n+1}}(z-2)^n .$$

Частина IV
Домашнє завдання

1. Знайти області збіжності рядів Лорана:

1) $\sum_{n=-1}^{-\infty}(z-i)^n$; 2) $\sum_{-\infty}^{\infty}2^{-n^2}(z+1)^n$; 3) $\sum_{-\infty}^{\infty}2^{-|n|}z^n$;

4) $\sum_{-\infty}^{\infty}2^n z^n$; 5) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{n^2}{z^n}\right)$.

2. Знайти області збіжності рядів і обчислити їх суми:

1) $\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{5^{n+2}}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}$.

Відповіді

Частина II. 1. 1) $1<|z|<2$; 2) $1<|z|<2$; 3) $1<|z+i|<\infty$; 4) $1<|z|<3$; 5) $0<|z-i|<2$; 6) $0<|z-2+i|<1$. **2**. 1) $0<|z|<\infty$, $e^{\frac{2}{z}}$; 2) $1<|z|<2$, $\frac{5z-4i-2}{(2-z)(z-i)}$; 3) $|z|>2$, $\frac{2-i}{(z-2)(z-i)}$.

Частина III. 1. $e^{-\alpha}<|z-1|<e^{\alpha}$. **3.** $0<|z-2|<\sqrt{5}$.

Частина IV. 1. 1) $|z-i|>1$; 2) $0<|z+1|<\infty$; 3) $\frac{1}{2}<|z|<2$; 4) ряд розбігається; 5) $|z|>1$. **2**. 1) $0<|z+2|<5$, $-\frac{1}{z^2-z-6}$; 2) $2<|z|<3$, $\frac{5}{6+z-z^2}$.

Практичне заняття № 12

Розвинення функцій в ряд Лорана

Частина I

а) ***Основні теоретичні відомості***
([1], с.332 – 338; [2], с.367 – 369).

1. <u>Теорема Лорана</u>. Якщо функція $f(z)$ – однозначна і аналітична в кільці $r < |z - z_0| < R$, то вона в цьому кільці розвивається в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

де

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz , \; n \in Z , \qquad (27)$$

Γ – коло $|z - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$.

При $r = 0$ і $R < \infty$ кільце вироджується в круг з виколотим центром, при $r > 0$ і $R = \infty$ кільце вироджується в зовнішність круга.

Зовнішність круга $|z| \le R$ називається **околом нескінченно віддаленої точки**.

2. Якщо функція $f(z)$ – однозначна і аналітична в околі нескінченно віддаленої точки, то вона в цьому околі розвивається в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n .$$

3. Ряди

$$f_1(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \quad \text{і} \quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

називаються відповідно **правильною** і **головною** частинами ряду Лорана в околі нескінченно віддаленої точки.

4. Розвинення функція $f(z)$ в ряд Лорана є єдиним в даному кільці. Тому коефіцієнти ряду Лорана не залежать від того, яким способом одержаний цей ряд. У випадку, коли формула (27) приводить до складних обчислень, застосовують різні штучні прийоми розвинення $f(z)$ в ряд Лорана.

5. Якщо функція $f(z)$ – аналітична в кільці $r < |z - z_0| < R$, то її намагаються подати у вигляді суми або добутку двох функцій, одна з яких аналітична в крузі $|z - z_0| < R$, а друга – зовні круга $|z - z_0| \le r$. Тоді пе-

ршу функцію розвивають за додатними степенями різниці $z - z_0$, а другу – за від'ємними. Одержані ряди додають.

6. Область збіжності ряду Лорана функції $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

визначається двома концентричними колами з центром у точці z_0, що проходять через точки, в яких функція $f(z)$ не є аналітичною, і між якими вона аналітична.

б) *Питання для самоперевірки*

1. Сформулювати теорему Лорана.
2. Дати означення правильної і головною частин ряду Лорана в околі нескінченно віддаленої точки.
3. В яких областях збігаються правильна і головна частини ряду Лорана?
4. Записати формулу для обчислення коефіцієнтів ряду Лорана.

в) *Методичні вказівки до розв'язування задач*

1. Розвинути функцію $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$ в ряд Лорана в кільці $D = \{z,\ 2 < |z+1| < 3\}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Записавши функцію у вигляді $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$. Помітимо, що її особливі точки $z_1 = 1$ і $z_2 = 2$ лежать на границі даного кільця $D = \{z,\ 2 < |z+1| < 3\}$. Це означає, що в самому кільці функція аналітична; за теоремою Лорана її можна розвинути в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z+1)^n .$$

Для отримання цього розвинення подамо функцію у вигляді

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Перша функція аналітична у крузі $|z+1| < 3$. Тут її можна розкласти в ряд Тейлора по степеням $z+1$. Перетворимо $\dfrac{1}{z-2}$ наступним чином:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z+1)-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z+1}{3}}.$$

Поклавши у формулі

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+\ldots+t^n+\ldots\,,\quad |t|<1 \tag{28}$$

$t=\dfrac{z+1}{3}$, отримаємо:

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}.$$

Область збіжності ряду – коло $|z+1|<3$.

Функція $\dfrac{1}{z-1}$ також розкладається в ряд за додатними степенями $z+1$, але цей ряд збігається лише в крузі $|z+1|<2$,а ми хочемо розвинути цю функцію за межами цього кола. Спробуємо отримати розклад даної функції по від'ємним степеням $z+1$. Матимемо:

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z+1)-2}=\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{z+1}}.$$

Покладемо $t=\dfrac{2}{z+1}$ і знову скористаємося розкладом (28):

$$\frac{1}{1-\dfrac{2}{z+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z+1}\right)^n.$$

Звідки

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z+1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(z+1)^n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z+1)^n}{2^{n-1}}.$$

Ряд збігається при $|t|<1$, тобто при $|z+1|>2$.

Остаточно маємо:

$$\frac{1}{z^2-3z+2}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z+1)^n}{2^{n-1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}},\quad 2<|z+1|<3.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{z^2-3z+2}=-\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\dfrac{(z+1)^n}{2^{n-1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+1)^n}{3^{n+1}},\quad 2<|z+1|<3.$

2. Знайти усі можливі розвинення в ряд Лорана за степенями z функції $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z-2}$.

Розв'язання. Функція $f(z)$ має дві особливі точки: $z_1=-2$ і $z_2=1$. Це означає, що є три кільця з центром в точці $z_0=0$, в кожному з яких функція $f(z)$ являється аналітичною: а) круг $|z|<1$; б) кільце $1<|z|<2$; 3) кільце $2<|z|<\infty$.

Знайдемо розвинення функції $f(z)$ в ряди Лорана в кожній з цих областей, попередньо представивши її у вигляді

$$\frac{1}{z^2+z-2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2}\right).$$

а) При $|z|<1$ маємо

$$f(z)=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

б) У кільці $1<|z|<2$

$$f(z)=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{3z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}+\frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}.$$

в) Аналогічно попередньому при $|z|>2$ отримаємо

$$f(z)=\frac{1}{3z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{3z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^n}=$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cdot 2^n}{z^{n+1}}.$$

Відповідь:

а) $\displaystyle\frac{1}{z^2-3z+2}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)z^n,\quad |z|<1:$

б) $\displaystyle\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}},\quad 1<|z|<2;$

в) $\displaystyle\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cdot 2^n}{z^{n+1}},\quad |z|>2.$

Частина ІІ
Виконати завдання

1. Функції розвинути в ряд Лорана у відповідних кільцях D:

1) $\dfrac{z^3}{z^2-z-2}$, $D=\{z:0<|z+1|<3\}$;

2) $\dfrac{1}{z+3}$, $D=\{z:|z|>3\}$;

3) $\dfrac{1}{z^2-3iz-2}$, $D=\{z:0<|z-2i|<1\}$;

4) $\dfrac{z}{(z-i)(z+3)}$, $D=\{z:1<|z|<3\}$.

2. Функцію розвинути в ряд Лорана в околі точки z_0 і вказати область збіжності одержаного розвинення:

1) $z^2\sin\pi\dfrac{z+1}{z}$, $z_0=0$; 2) $z\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $z_0=\infty$;

3) $\dfrac{1}{z^2-4z+3}$, $z_0=1$; 4) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2-4)}$, $z_0=0$.

Частина ІІІ
Задачі підвищеної складності

1. Показати, що при всіх $z:0<|z|<\infty$

а) $\operatorname{ch}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)=a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(z^n+\dfrac{1}{z^n}\right)$, де $a_n=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}ch(2\cos\theta)\cos n\theta\,d\theta$;

б) $\exp\left(z+\dfrac{c^3}{2z^2}\right)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n$, де

$$a_n=\frac{e^{-\frac{c}{2}}}{2\pi c^n}\int\limits_0^{2\pi}\cos(c\sin\theta(1-\cos\theta)-n\theta)e^{c(\cos\theta+\cos^2\theta)}d\theta.$$

Частина IV
Домашнє завдання

1. Функції розвинути в ряд Лорана у відповідних кільцях D:

1) $\dfrac{1}{z^2-3z+2}$, $D=\{z:\ |z|>2\}$; 2) $\dfrac{1}{(z^2-4)^2}$, $D=\{z:|z+2|>4\}$;

3) $z^3 \exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $D = \{z:\ 0 < |\,z\,| < \infty\}$.

2. Функцію розвинути в ряд Лорана в околі точки z_0 і вказати області збіжності одержаного розвинення:

1) $z^3 \cos\dfrac{1}{z-2}$, $z_0 = 2$; 2) $\dfrac{1+\cos^2 z}{z^4}$, $z_0 = \infty$;

3) $\dfrac{1-\exp(-z)}{z^3}$, $z_0 = 0$; 4) $\dfrac{1}{z^2 - z}$, $z_0 = 0$.

Відповіді

Частина ІІ. 1. 1) $\dfrac{1}{3(z+1)} - \dfrac{8}{9} + \dfrac{19}{27}(z+1) - \sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{8}{3^{n+2}}(z+1)^n$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{3^n}{z^{n+1}}$; 3) $\sum\limits_{n=-1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(z-2i)^n}{i^n}$; 4) $\dfrac{1+3i}{10}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^n}{z^{n+1}} + \dfrac{9-3i}{10}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$.

2. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!\, z^{2n-1}}$, $0 < |\,z\,| < \infty$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!\ z^{n-1}}$, $0 < |\,z\,| < \infty$;

3) $-\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=-1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{2^n}$ при $0 < |\,z-1\,| < 2$, $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(z-1)^{n+1}}$ при $|\,z-1\,| > 2$;

4) $-\dfrac{1}{20}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{2^{2n}} - \dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$ при $|\,z\,| < 1$, $-\dfrac{1}{20}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{2^{2n}} + \dfrac{i}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^{2n+1}}{z^{2n+2}}$ при $1 < |\,z\,| < 2$, $\dfrac{1}{10}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{2n+1}}{z^{2n+2}} + \dfrac{i}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^{2n+1}}{z^{2n+2}}$ при $|\,z\,| > 2$.

Частина IV. 1. 1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}-1}{z^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot 4^{n-1}}{(z+2)^{n+3}}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!\,z^{n-3}}$.

2. 1) $(z-2)^3 + 6(z-2)^2 + \dfrac{23}{6}(z-2) + 5 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{48n^2+72n+23}{(2n+2)!}(z-2)^{-2n+1} +$
$+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2(16n^2+24n+5)}{(2n+2)!}(z-2)^{-2n}$ при $0 < |\,z-2\,| < \infty$;

2) $\dfrac{2}{z^4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^{2n-1}z^{2n-4}}{(2n)!}$ при $0 < |\,z\,| < \infty$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^{n-3}}{n!}$ при $0 < |\,z\,| < \infty$; 4) $-\sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n$ при $0 < |z| < 1$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{-2} z^n$ при $|z| > 1$.

Практичне заняття № 13

Особливі точки аналітичної функції та їх класифікація

Частина I

а) ***Основні теоретичні відомості***
([1, с. 338–347; [2], с.370-376).

1. Точка $z_0 \neq \infty$ називається ізольованою особливою точкою однозначної функції $f(z)$, якщо функція $f(z)$ аналітична в області $D = \{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ і не є аналітичною в області $D_1 = \{z : |z - z_0| < R\}$.

2. Нескінченно віддалена точка однозначної аналітичної функції $f(z)$ називається ізольованою особливою точкою однозначного характеру, якщо існує окіл нескінченно віддаленої точки: $\{z : |z| > R\}$, в якому функція $f(z)$ є аналітичною.

3. Якщо z_0 – ізольована особлива точка функції $f(z)$, то в області $D = \{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ функція $f(z)$ розкладається в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n . \tag{1}$$

Ізольовану особливу точку z_0 однозначної аналітичної функції $f(z)$ називатимемо

а) усувною, якщо у розкладі (1) відсутні члени з від'ємними степенями $z - z_0$, тобто $a_n = 0$ для $n = -1, -2, -3, \ldots$;

б) полюсом порядку $m \geq 1$, якщо у розкладі (1) $a_{-m} \neq 0$ і $a_n = 0$ для $n = -(m+1), -(m+2), -(m+3), \ldots$, причому полюс називається простим при $m = 1$, і кратним при $m > 1$ (в розкладі (1) є скінчена кількість членів з від'ємними степенями $z - z_0$);

в) істотно особливою точкою, якщо у формулі (1) серед коефіцієнтів a_n, $n < 0$, є нескінченна кількість коефіцієнтів, відмінних від нуля.

4. Характеристична властивість усувної особливої точки. Для того, щоб ізольована особлива точка z_0 однозначної аналітичної функції $f(z)$ була усувною, необхідно і достатньо, щоб функція $f(z)$ у точці z_0 мала скінчену границю.

5. Характеристична властивість полюса. Для того, щоб ізольована особлива точка z_0 однозначної аналітичної функції $f(z)$ була полюсом, необхідно і достатньо, щоб функція $f(z)$ у точці z_0 мала нескінченну границю.

6. Точка z_0 є полюсом порядку m функції $f(z)$ тоді і тільки тоді, коли z_0 є нулем кратності m функції $\psi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$, якщо під $\psi(z_0)$ розуміти $\lim\limits_{z\to z_0}\psi(z)$.

7. Характеристична властивість істотно особливої точки. Для того, щоб ізольована особлива точка z_0 однозначної аналітичної функції $f(z)$ була істотно особливою, необхідно і достатньо, щоб у цій точці не існувало ні скінченої ні нескінченної границі функції $f(z)$.

8. Нескінченно віддалена точка $z=\infty$ називається усувною, полюсом або істотно особливою точкою функції $f(z)$, якщо точка $\xi=0$ є відповідно усувною, полюсом або істотно особливою точкою функції $\varphi(\xi)=f\left(\dfrac{1}{\xi}\right)$.

9. Якщо є розклад функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n z^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\,,\ |z|>R\,, \tag{2}$$

то головною частиною цього ряду є доданок $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ і точка $z=\infty$ буде

а) усувною, якщо у розкладі (2) відсутні члени з додатними степенями z, тобто $a_n=0$ для $n=1,2,3,\ldots$;

б) полюсом порядку $m\geq 1$, якщо у розкладі (2) $a_m\neq 0$ і $a_n=0$ для $n=m+1,\ m+2,\ m+3,\ldots$;

в) істотно особливою точкою, якщо у формулі (2) серед коефіцієнтів a_n, $n>0$, є нескінченна кількість коефіцієнтів, відмінних від нуля.

10. Теорема Сохоцького. Якщо точка $z_0\in\boldsymbol{C}$ є істотно особливою точкою функції $f(z)$, то для будь-якого числа $A\in\overline{\boldsymbol{C}}$ знайдеться така послідовність точок $\{z_n\}$, яка збігається до $z_0\in C$, що $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=A$.

б) *Питання для самоперевірки*

1. Яка точка називається ізольованою особливою точкою?
2. Які види особливих точок відомі?
3. Дати означення усувної особливої точки, полюсу, істотно особливої точки.
4. В чому полягає характеристична властивість усувної особливої точки?
5. Який існує зв'язок між нулем і полюсом аналітичної функції?
6. В чому полягає характеристична властивість полюса?
7. Яким чином проводиться дослідження особливостей аналітичної функції в нескінченно віддаленій точці?
8. Сформулювати теорему Сохоцького.

в) *Методичні вказівки до розв'язування задач*

1. Встановити, чи є точки $z=1$ ізольованою особливою для функції $\cos\dfrac{1}{z-1}$?

<u>*Розв'язання.*</u> Оскільки функція $t=\dfrac{1}{z-1}$ – аналітична в довільній області, яка не містить точку $z=1$, а $w=\cos t$ – аналітична у всій комплексній площині, то складена функція $w=\cos\dfrac{1}{z-1}$ є аналітичною в довільній області, яка не містить точки $z=1$ і, значить, в будь-якому проколеному околі точки $z=1$. Це ізольована особлива точка.

2. Знайти ізольовані особливі точки функції $f(z)=\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Так як функція $t=\dfrac{1}{z}$ – аналітична в довільній області, яка не містить точки $z=0$, а $w=\cos t$ – аналітична у всій комплексній площині, то функція $w=\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}$ є аналітичною в довільній області, яка не містить точки $z=0$ і нулів знаменника, тобто точок, які визначаються рівністю:

$$\cos\frac{1}{z}=0,\ \ \frac{1}{z}=\frac{\pi}{2}+\pi k \ \text{ або } \ z_k=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi k}=\frac{2}{\pi(1+2k)},\ k \text{ – ціле.}$$

Отже, особливими точками функції є $z = 0$ і $z_k = \dfrac{2}{\pi(1+2k)}$ (рис. 1).

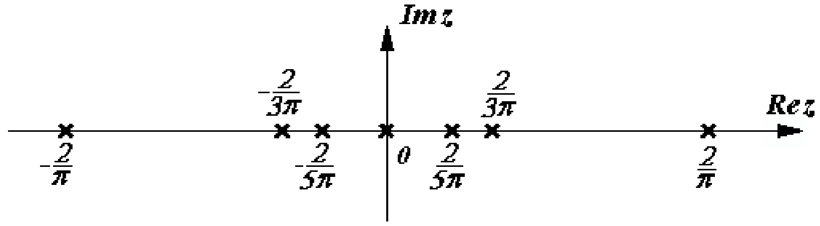


Рис. 1

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$, то в довільному околі точки $z = 0$ є нескінченна кількість особливих точок функції $f(z)$. Отже $z = 0$ – особлива, але не ізольована точка функції $f(z)$. Інші особливі точки $z_k = \dfrac{2}{\pi(1+2k)}$ є ізольованими, оскільки в проколеному околі точки $z_k = \dfrac{2}{\pi(1+2k)}$ радіусу $|z_k - z_{k+1}|$ не має особливих точок і є аналітичною.

3. Знайти ізольовані особливі точки функції і визначити їх тип за означенням:

$$\text{а) } \frac{\cos z}{z - z^3}; \quad \text{б) } \frac{\sin z}{z}; \quad \text{в) } z \cdot \exp\frac{1}{z}.$$

<u>*Розв'язання.*</u>

а) Чисельник і знаменник функції є функціями аналітичними у всій комплексній площині, тому особливими точками функції будуть нулі знаменника. Це точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ і $z_3 = -1$, причому вони являються простими нулями знаменника.

Оскільки чисельник в жодній з цих точок не перетворюється в нуль, то ці точки являються простими полюсами даної функції за властивістю 5. Ніякі інші точки комплексної площини особливими бути не можуть (за теоремою про частку аналітичних функцій).

б) Оскільки дана функція є відношенням двох аналітичних у всій комплексній площині функцій, то особливою точкою є лише нуль знаменника $z = 0$. Але тут ми не можемо відразу визначити вид особливості – в особливій точці перетворюється в нуль чисельник.

Розвинемо функцію в ряд Лорана за степенями z:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots\,.$$

Ряд не містить від’ємних степенів z, тому $z=0$ – усувна особлива точка.

Тип точки $z=0$ можна визначити і на основі характеристичної властивості 4: $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$, отже $z=0$ – усувна особлива точка.

в) Дана функція, очевидно, визначена і аналітична у всій комплексній площині, крім точки $z=0$. Це ізольована особлива точка. Для визначення її типу знайдемо розвинення даної функції в ряд Лорана в проколеному околі точки $z=0$. За допомогою ряду для $\exp t$ при $t=\dfrac{1}{z}$ отримаємо:

$$z\cdot\exp\frac{1}{z}=z\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right)=z+1+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!z^2}+\ldots\ .$$

Ряд містить нескінченно багато членів з від’ємними степенями z. Тому точка $z=0$ – істотно особлива.

4. Знайти ізольовані особливі точки функцій і визначити їх тип за допомогою характеристичних властивостей:

$$\text{а) } \frac{\cos z}{z-z^3};\quad \text{б) } z\cdot\exp\frac{1}{z};\quad \text{в) } \frac{z^2-1}{z^2+2z-3}.$$

<u>*Розв'язання.*</u>

а) Для функції $f(z)=\dfrac{\cos z}{z-z^3}$ помітимо, що $f(z)\to\infty$ і при $z\to 0$, і при $z\to 1$, і при $z\to -1$. Значить, усі ці точки – полюси. Оскільки ці точки є простими нулями знаменника, то це – прості полюси.

б) Розглянемо функцію $w=z\cdot\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$. Її особливою точкою буде точка $z=0$. Будемо наближатися до $z=0$ по дійсній осі справа. Тоді $w=x\cdot\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x>0$. За допомогою правила Лопіталя знайдемо:

$$\lim_{x\to 0+0} x\exp\left(\frac{1}{x}\right)=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to 0+0}\frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0+0}\exp\left(\frac{1}{x}\right)=\infty\cdot$$

Будемо наближатися до $z=0$ по дійсній осі зліва. Тоді $w=x\cdot\exp\left(\frac{1}{x}\right)$, $x<0$, і $\lim\limits_{x\to 0-0} x\exp\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

Отже, наближаючись до точки $z=0$ за різними напрямками, ми отримали різні граничні значення. Це означає, що дана функція в точці $z=0$ границі не має, і тому точка $z=0$ для неї істотно особлива (властивість 7).

в) Функція є часткою функцій, аналітичних на всій комплексній площині, тому її особливими точками будуть нулі знаменника: $z=1$ і $z=3$.

Оскільки $f(z)\to\infty$ при $z\to 3$, то $z=3$ – полюс (властивість 6).

Оскільки $\lim\limits_{z\to 1}\frac{z^2-1}{z^2+2z-3}=\lim\limits_{z\to 1}\frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)(z-3)}=\lim\limits_{z\to 1}\frac{z+1}{z-3}=-1$, то в точці $z=1$ функція має скінчену границю і точка $z=1$ – усувна особлива точка (властивість 4).

5. Визначити характер особливої точки $z_0=1$ наступних функцій:

$$\text{а) } \frac{z^2-3z+2}{z^2-5z+4};\quad \text{б) } \frac{z^2-3z+2}{z^2-2z+1};\quad \text{в) } (z-1)\cdot\exp\frac{1}{z-1}.$$

<u>*Розв'язання.*</u>

а) Оскільки $\lim\limits_{z\to 1}\frac{z^2-3z+2}{z^2-5z+4}=\lim\limits_{z\to 1}\frac{(z-1)(z-2)}{(z-1)(z-4)}=\frac{1}{3}$, то $z_0=1$ – усувна точка для даної функції.

б) В будь-якому (достатньо малому) проколеному околі точки $z_0=1$

$$\frac{z^2-3z+2}{z^2-2z+1}=\frac{z-2}{z-1}.$$

Значить точка $z_0=1$ – простий полюс даної функції, бо вона являється простим нулем функції $\frac{z^2-2z+1}{z^2-3z+2}$ (властивість 5).

в) Використовуючи розклад $\exp t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$ $(\forall t\in \boldsymbol{C})$ і поклавши $t=\frac{1}{z-1}$, отримаємо таке лоранівське розвинення функції $(z-1)\cdot\exp\frac{1}{z-1}$ в проколеному околі точки $z_0=1$:

$$(z-1)\cdot\exp\frac{1}{z-1}=1+(z-1)+\frac{1}{2!(z-1)}+...+\frac{1}{n!(z-1)^{n-1}}+...\ .$$

Це розвинення містить нескінченно багато членів з від'ємними степенями $(z-1)$. Значить, точка $z_0 = 1$ – істотно особлива точка даної функції.

6. Дослідити тип особливої точки $z = \infty$ функції:

а) $f(z) = \dfrac{z^2+2z+2}{z^3-z+4}$; б) $f(z) = \dfrac{z^4-3z^3+2z}{z^2-2z+4}$; в) $f(z) = \exp z$.

Розв'язання.

а) Виконаємо заміну $z = \dfrac{1}{\xi}$, маємо

$$f(z) = \frac{\left(\frac{1}{\xi}\right)^2 + 2\frac{1}{\xi} + 2}{\left(\frac{1}{\xi}\right)^3 - \frac{1}{\xi} + 4} = \frac{2\xi^3 + 2\xi^2 + \xi}{4\xi^2 - \xi^2 + 1} = \varphi(\xi).$$

Функція $\varphi(\xi)$ в точці $\xi = 0$ має скінчену границю, тому $\xi = 0$ – усувна особлива точка $\varphi(\xi)$, а точка $z = \infty$ – усувна точка $f(z)$.

б) Виконаємо заміну $z = \dfrac{1}{\xi}$, маємо

$$f(z) = \frac{\left(\frac{1}{\xi}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{\xi}\right)^3 + 2\frac{1}{\xi}}{\left(\frac{1}{\xi}\right)^2 - 2\frac{1}{\xi} + 4} = \frac{2\xi^3 - 3\xi + 1}{4\xi^4 - 2\xi^3 + \xi^2} = \varphi(\xi)$$

Точка $\xi = 0$ для функції $\varphi(\xi)$ є полюсом другого порядку, тому точка $z = \infty$ – полюс другого порядку $f(z)$.

в) Розклад функції $f(z) = \exp z$ в околі точки $z = \infty$ має вид $\exp z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$. Цей розклад містить нескінчену кількість членів з додатними степенями z, тому $z = \infty$ – істотно особлива точка $f(z)$.

7. Перевірити справедливість теореми Сохоцького для функції $\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

Розв'язання. Єдиною ізольованою особливою точкою функції є точка $z = 0$. Оскільки

$$\exp\frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \ldots + \frac{1}{n!z^n} + \ldots ,$$

то це істотно особлива точка.

Нехай A– будь-яке довільне комплексне число, причому $A \neq 0$, $A \neq \infty$. Знайдемо точки, в яких дана функція приймає значення A:

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = A \Leftrightarrow \frac{1}{z} = LnA.$$

Таких точок є нескінченно багато:

$$z_n = \frac{1}{\ln|A| + i(\arg A + 2n\pi)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

Причому послідовність $\{z_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ має точку $z = 0$ своєю границею. Оскільки $w(z_n) = A$, то і $\lim\limits_{n \to \infty} w(z_n) = A$.

Якщо $A = 0$, то розглянемо послідовність $z_n = -\dfrac{1}{n}$, яка збігається до 0. Тоді $w(z_n) = e^{-n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Якщо $A = \infty$, то візьмемо $z_n = \dfrac{1}{n} \to 0$. Маємо: $w(z_n) = e^n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Отже, дійсно для довільного A вдається підібрати таку послідовність $z_n \to 0$, що $w(z_n) \to A$, про що і стверджує теорема Сохоцького.

Частина II
Виконати завдання

1. Встановити, чи є точка z_0 ізольованою особливою точкою однозначного характеру для даної функції:

$$1)\ \cos\frac{1}{z},\ z_0 = 0;\ 2)\ \frac{1}{z^3 - 1},\ z_0 = 1;\ 3)\ \frac{z - 1}{\sin\frac{1}{z}},\ z_0 = 0,\ z_0 = \infty.$$

2. Знайти ізольовані особливі точки функції і визначити їх тип:

$$1)\ \frac{1 - \cos z}{z^2};\quad 2)\ \frac{\cos z}{z^2};\quad 3)\ \frac{z}{1 - \cos z};\quad 4)\ z^2 \cos\frac{\pi}{z};$$

$$5)\ \frac{z^4}{1 + z^4};\quad 6)\ \frac{2z^2 + 1}{z + z^3};\quad 7)\ \frac{z + 1}{\exp z}.$$

3. Знайти особливі точки функції і визначити їх тип за допомогою характеристичних властивостей:

$$1)\ \frac{tgz}{z};\quad 2)\ \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right);\quad 3)\ \sin\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

4. Довести, що точка z_0 є усувною особливою точкою функції:

$$1)\ z\left(\exp\left(\frac{1}{z}\right)-1\right),\ z_0=\infty;\quad 2)\ \frac{\exp(z-2)^2-1}{1-\cos(z-2)},\ z_0=2;$$

$$3)\ \frac{\text{chz}-\cos z}{z^2},\ z_0=0.$$

5. Знайти нулі поданих функцій і визначити порядок цих нулів:

$$1)\ z^3-z^2-8z+12;\quad 2)\ \sin(z-1)\cos^3\frac{\pi z}{2};\quad 3)\ \frac{(z^2-9)^2(z-1)^3}{z^2-4z+3}.$$

6. Знайти полюси функції і визначити порядок цих полюсів:

$$1)\ \frac{\cos z}{(z^2-z-2)^3};\quad 2)\ \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{\sin^2(z-1)};\quad 3)\ \frac{1}{2-\cos z}.$$

7. Довести, що точка z_0 є істотно особливою точкою функції:

$$1)\ \sin z+\exp\left(\frac{1}{z}\right),\ z_0=\infty;\ 2)\ \frac{1}{z}\exp\left(\frac{1}{z-1}\right),\ z_0=1;\ 3)\ z\cos\frac{\pi z}{z+1},\ z_0=-1.$$

8. Визначити характер точки $z_0=\infty$ для даної функції:

$$1)\ \frac{z^2+1}{\exp f(z)};\quad 2)\ \frac{z^6+1}{z^2+z}.$$

9. Перевірити справедливість теореми Сохоцького для функції $\sin\frac{1}{z}$.

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. Показати, що функція, яка визначається рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}\left((1+n^{-1})^n-1\right)}{(z^n-1)(z^n-(1+n^{-1})^n)},$$

має прості полюси в точках $z=(1+n^{-1})\,e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ $(k=\overline{0,n-1};\ n\in N)$.

Частина IV
Домашнє завдання

1. Встановити, чи є точка z_0 ізольованою особливою точкою однозначного характеру для функції:

$$1)\ \frac{\sin z}{z^2-1},\ z_0=\infty;\ 2)\ \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{z}\right)-1},\ z_0=0,\ z_0=\infty.$$

2. Знайти ізольовані особливі точки функції і визначити їх тип:

$$1)\ \frac{z+1}{z^2};\quad 2)\ \frac{1-\cos z}{\sin^2 z};\quad 3)\ \frac{z^4+z}{z^3};\quad 4)\ \frac{z^3}{(1-z)^2};$$

$$5)\ z^3\exp\left(\frac{1}{z}\right);\quad 6)\ z\,\mathrm{ctg}z;\quad 7)\ \cos\frac{z}{2-z}.$$

3. Знайти особливі точки функції і визначити їх тип за допомогою характеристичних властивостей:

$$1)\ \sin\frac{\pi}{z};\quad 2)\ \exp(-z)\cos\frac{1}{z};\quad 3)\ \exp\left(\frac{z}{1-z}\right).$$

4. Довести, що точка z_0 є усувною особливою точкою функції:

$$1)\ \frac{\mathrm{sh}\sqrt{z}}{\sqrt{z}},\ z_0=0;\quad 2)\ \frac{1}{z-1}-\frac{1}{\exp(z-1)-1},\ z_0=1;\quad 3)\ \frac{z}{z^2+1},\ z_0=\infty.$$

5. Знайти нулі функції і визначити кратність цих нулів:

$$1)\ \exp(z-1)-1;\quad 2)\ \frac{1}{z}\sin\frac{1}{z};\quad 3)\ \frac{(z^2-z-2)^3}{1+\cos\pi z}.$$

6. Знайти полюси функції і визначити порядок цих полюсів:

$$1)\ \frac{z}{(z^3+1)^2};\quad 2)\ \frac{z}{1+\exp z};\quad 3)\ z^2+1.$$

7. Довести, що точка z_0 є істотно особливою точкою функції:

$$1)\ z^4\exp\left(\frac{1}{z}\right),\ z_0=0;\quad 2)\ \cos\frac{1}{z-1},\ z_0=1;\quad 3)\ \cos z,\ z_0=\infty.$$

8. Визначити характер точки $z_0=\infty$ для функції $f(z)=\cos z-\sin z$.

9. Перевірити справедливість теореми Сохоцького для особливої точки $z_0=0$ функції $f(z)=\cos\frac{1}{z}$.

Відповіді

Частина II. 1. 1) так; 2) так; 3) ні, так. **2**. 1) $z=0$ – усувна особлива точка; 2) $z=0$ – полюс другого порядку; 3) $z=2k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ – полюси другого порядку, $z=0$ – полюс першого порядку; 4) $z=0$ – істотно особлива точка; 5) $z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{i\sqrt{2}}{2}$ – чотири полюси першого порядку; 6) $z=0$ і $z=\pm i$ – прості полюси, $z=\infty$ – усувна особлива точка; 7) немає скінченої особливої точки, $z=\infty$ – істотно особлива точка. **3.** $z=0$ – усувна особлива точка, $z=\frac{\pi}{2}(2k+1)$ $(k\in Z)$ – прості полюси; 2) $z=0$ – істотно особлива точка; 3) $z=0$ – істотно особлива точка. **5.**

1) $z=2$ – нуль другого порядку, $z=-3$ – простий нуль; 2) $z=1$ – нуль четвертого порядку; 3) $z=3$ – простий нуль, $z=-3$, $z=1$ – нулі другого порядку. **6.** 1) $z=-1$, $z=2$ – полюси третього порядку; 2) $z=1+\pi n\ (n\in Z)$ – полюси другого порядку, $z=\infty$ – гранична точка для полюсів; 3) $z=2\pi n-i\ln(2\pm\sqrt{3})$ $(n\in Z)$ – прості полюси, $z=\infty$ – гранична точка для полюсів. **8.** 1) істотно особлива точка; 2) полюс четвертого порядку.

Частина IV. **1.** 1) так; 2) так; 3) ні, так. **2**. 1) $z=0$ – полюс другого порядку; 2) $z=k\pi$ (k – парне) – усувна особлива точка, $z=k\pi$ (k – непарне) – полюс другого порядку; 3) $z=0$ – полюс другого порядку; 4) $z=1$ – полюс другого порядку, $z=\infty$ – простий полюс; 5) $z=0$ – істотно особлива точка, $z=\infty$ – полюс третього порядку; 6) $z=0$ – усувна особлива точка, $z=n\pi$ $(n=\pm1,\pm2,...)$ – прості полюси; 7) $z=2$ – істотно особлива точка, $z=\infty$ – усувна особлива точка. **3.** 1) $z=0$ – істотно особлива точка; 2) $z=0$ – істотно особлива точка; 3) $z=1$ – істотно особлива точка. **5.** 1) $z=1+2\pi ki$ $(k\in Z)$ – прості нулі; 2) $z=\dfrac{1}{k\pi}$ $(k\in Z,\, k\neq 0)$ – прості нулі, $z=\infty$ – нуль другого порядку; 3) $z=-1$ – нуль другого порядку, $z=2$ – нуль третього порядку. **6.** 1) $z=-1$, $z=\dfrac{1}{2}\left(1\pm i\sqrt{3}\right)$ – полюси другого порядку; 2) $z=(2n+1)\pi i$ $(n\in Z)$ – прості полюси, $z=\infty$ – гранична точка для полюсів; 3) $z=\infty$ – полюс другого порядку. **8.** Істотно особлива точка.

Практичне заняття № 14

Залишки аналітичної функції відносно особливих точок та їх обчислення

Частина I

а) ***Основні теоретичні відомості***
([1], с.352 – 354; [2], с.376-378).

1. Нехай точка z_0 – ізольована особлива точка однозначної аналітичної функції $f(z)$, L – замкнений кусково-гладкий контур, що охоплює точку z_0 і міститься в такому проколеному околі точки z_0, де функція $f(z)$ аналітична. Залишком функції $f(z)$ відносно точці z_0 називається інтеграл від цієї функції по контуру L, поділений на $2\pi i$. Отже, за означенням

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)dz \tag{31}$$

2. Залишок функції $f(z)$ відносно точці z_0 дорівнює коефіцієнту a_{-1} при $(z-z_0)^{-1}$ в розвиненні функції $f(z)$ у проколеному околі точці z_0 в ряд Лорана:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}. \tag{32}$$

3. Якщо нескінченно віддалена точка $z=\infty$ є ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^-} f(z)dz,$$

де L^- – замкнений кусково-гладкий контур, що охоплює початок координат і міститься в такому околі точки $z=\infty$, де функція $f(z)$ є аналітичною. Обхід L^- відбувається у від'ємному напрямі відносно області, що містить початок координат.

4. Залишок функції $f(z)$ в точці $z=\infty$ дорівнює взятому з протилежним знаком коефіцієнту a_{-1} при z^{-1} ряду Лорана функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки, тобто

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}. \tag{33}$$

5. Якщо z_0 – усувна особлива точка $f(z)$, то $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

6. Якщо z_0 – простий полюс $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\,f(z). \qquad (34)$$

7. Якщо z_0 – простий полюс функції $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де функції $\varphi(z)$, $\psi(z)$ аналітичні в околі точки z_0, $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (35)$$

8. Якщо z_0 – полюс порядку m функції $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big) \qquad (36)$$

б) *Питання для самоперевірки*

1. Дати означення залишку функції $f(z)$ в точці z_0.
2. Чому дорівнює залишок в усувній особливій точці?
3. Як визначається залишок функції в особливій ізольованій точці за допомогою її розвинення у ряд Лорана?
4. За якими формулами обчислюється залишок відносно простого полюсу?
5. Як обчислюється залишок відносно полюсу m-го порядку?
6. Як обчислюються залишок відносно нескінченно віддаленої точці?

в) *Методичні вказівки до розв'язування задач*

1. Обчислити $\operatorname*{res}\limits_{z=1}\dfrac{1}{z^2-1}$ за означенням.

<u>*Розв'язання.*</u> Залишок функції $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ в точці $z_0=1$ за означенням (31) дорівнює інтегралу від цієї функції по контуру L, поділеному на $2\pi i$. До отриманого інтегралу застосуємо інтегральну формулу Коші, матимемо:

$$\operatorname*{res}_{z=1}\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-1|=1}\frac{1}{z^2-1}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-1|=1}\frac{\frac{1}{z+1}}{z-1}dz=\frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i\cdot\left.\left(\frac{1}{z+1}\right)\right|_{z=1}=\frac{1}{2}.$$

2. Обчислити $\operatorname*{res}\limits_{z=0} z\cdot\exp\dfrac{1}{z}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Для даної функції $z\cdot\exp\dfrac{1}{z}$ запишемо розвинення в ряд Лорана в проколеному околі точки $z_0=0$:

$$z\cdot \exp\frac{1}{z}=z\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right)=z+1+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!z^2}+\ldots\ .$$

Звідси слідує, що $z_0=0$ – істотно особлива точка функції, а тоді за формулою (32) шуканий залишок дорівнює $\frac{1}{2}$.

3. Обчислити $\operatorname*{res}\limits_{z=0}\frac{1}{z^3-z^5}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Перетворивши функцію

$$\frac{1}{z^3-z^5}=\frac{1}{z^3(1-z^2)},$$

помітимо, що точка $z_0=0$ для неї є полюсом третього порядку. Залишок знайдемо за формулою (36):

$$\operatorname*{res}\limits_{z=0}\frac{1}{z^3-z^5}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\frac{d^2\left(\frac{z^3}{z^3(1-z^2)}\right)}{dz^2}=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1-z^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{d}{dz}\left(\frac{2z}{(1-z^2)^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{2(1+3z^2)}{(1-z^2)^3}=1.$$

4. Обчислити $\operatorname*{res}\limits_{z=1}\frac{1}{z^3-z^5}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Записавши функцію у вигляді

$$\frac{1}{z^3-z^5}=\frac{1}{z^3(1-z)(1+z)},$$

помітимо, що точка $z_0=1$ для неї є простим полюсом. За формулою (34) маємо:

$$\operatorname*{res}\limits_{z=1}\frac{1}{z^3-z^5}=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z^3-z^5}=-\lim_{z\to1}\frac{1}{z^3(z+1)}=-\frac{1}{2}.$$

Можна було застосувати формулу (35) при $\varphi(z)=1$, $\varphi(1)=1$, $\psi(z)=z^3-z^5$, $\psi'(z)=3z^2-5z^4$, $\psi'(1)=-2$, тоді

$$\operatorname*{res}\limits_{z=1}f(z)=\frac{\varphi(1)}{\psi'(1)}=-\frac{1}{2}.$$

5. Обчислити $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty}\frac{z^4+1}{z^6-1}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Згідно з формулою (33) $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty}\frac{z^4+1}{z^6-1}=-a_{-1}$, тому розвинемо дану функцію в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки. Для цього перетворимо функцію:

$$\frac{z^4+1}{z^6-1}=\frac{z^4}{z^6-1}+\frac{1}{z^6-1}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^6}}+\frac{1}{z^6}\frac{1}{1-\frac{1}{z^6}}.$$

Тепер скористаємося відомою формулою

$$\frac{1}{1-\alpha}=1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n+\ldots,\quad |\alpha|<1,$$

Замінивши в ній α на $\frac{1}{z^6}$, отримаємо:

$$\frac{z^4+1}{z^6-1}=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^{12}}+\ldots\right)+\frac{1}{z^6}\left(1+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^{12}}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^6}+\frac{1}{z^8}+\frac{1}{z^{12}}+\ldots$$

Ряд збігається при $|z|>1$. Це розвинення в околі точки $z=\infty$. Коефіцієнт при z^{-1} дорівнює нулю. Отже, шуканий залишок дорівнює нулю.

Частина II
Виконати завдання

1. Обчислити $\operatorname*{res}_{z=-2}\frac{1}{4+z^2}$ за означенням.

2.Обчислити залишки функції відносно кожної з її скінченних особливих точок:

1) $\frac{z^2+z-1}{z^3-z}$; 2) $\frac{\sin\pi z}{(z-1)^3}$; 3) $z^3\cos\frac{1}{z-2}$; 4) $\operatorname{tg}z$; 5) $\frac{z}{\exp z-1}$;

6) $\frac{\sin z}{1+z^2}$; 7) $\frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$; 8) $\frac{\exp z}{z^2(1-z)}$; 9) $\frac{\exp\pi z}{(z+i)^5}$.

3. Обчислити залишки вказаних функцій відносно точці $z=\infty$:

1) $\cos\frac{z^2+4z-1}{z+3}$; 2) $\frac{z-1}{z^{13}(z+2)}$; 3) $\frac{\cos z}{(z-1)^5z^3}$;

4) $\frac{1}{z-\sin z}$; 5) $\frac{\operatorname{ch}\frac{1}{z}}{z^2-9}$; 6) $\frac{\sin z}{(z^2+1)^2}$.

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. Нехай функція $f(z)$ – аналітична в усій комплексній площині, за винятком скінченого числа ізольованих особливих точок $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (точка $z=\infty$ не включається).

Довести, що для кожної парної функції $f(z)$:

$$\text{а) } \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0; \qquad \text{б) } \operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=-z_0} f(z),$$

а для непарної функції $f(z)$ має місце рівність $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=-z_0} f(z)$ (з припущенням, що записані залишки мають зміст).

2. Обчислити:

$$\text{а) } \operatorname*{res}_{z=0} \frac{z^{n-1}}{\sin^n z},\ n=1,2,\ldots; \ \text{б) } \operatorname*{res}_{z=0} \frac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)}; \ \text{в) } \operatorname*{res}_{z=0} \frac{\operatorname{tg} z - z}{(1-\cos z)^2}.$$

3. Нехай функція $f(z)$ має вигляд $f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$, де функція $\varphi(\zeta)$ аналітична в точці $\zeta = 0$. Довести, що $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\varphi'(0)$.

Частина IV
Домашнє завдання

1.Обчислити залишки функції відносно кожної з її скінчених особливих точок:

$$1)\ \frac{\cos z}{(z-1)^2}; \quad 2)\ \frac{\sin 2z}{(z-1)^{10}}; \quad 3)\ \frac{z^2}{\exp z - 1}; \quad 4)\ \frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)+1}{z^3+z^2-z-1}.$$

2. Обчислити залишки вказаних функцій відносно точки $z=\infty$:

$$1)\ \frac{z^2+z-1}{z^3-z}; \ 2)\ \frac{z^2\sin\frac{1}{z}}{z-1}; \ 3)\ \frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}; \ 4)\ z\cos^2\frac{\pi}{z};$$

$$5)\ \frac{z^2\sin\frac{\pi}{z}}{z-1}; \ 6)\ \frac{2z^7+1}{z^6(z^2+1)}.$$

Відповіді

Частина II. 1. $\frac{1}{4}$. **2.** 1) $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1$, $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{2}$, $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = -\frac{1}{2}$;

2) $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = 0$; 3) $\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = -5\frac{23}{24}$; 4) $\operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} f(z) = -1$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;

5) $\operatorname*{res}_{z=2k\pi i} f(z) = 2k\pi i$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; 6) $\operatorname*{res}_{z=\pm i} f(z) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}1$, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -sh1$;

7) $\operatorname*{res}\limits_{z=1} f(z)=1$, $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=0$, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-1$; 8) $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=2$, $\operatorname*{res}\limits_{z=1} f(z)=-e$,

$\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=e-2$; 9) $\operatorname*{res}\limits_{z=-i} f(z)=-\dfrac{\pi^4}{4!}$, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=\dfrac{\pi^4}{4!}$.

3. 1) $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^{n+1}}{n!(n+1)!}$; 2) $\operatorname*{res}\limits_{z=-2} f(z)=-\dfrac{3}{2^{13}}$, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=0$,

$\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=-\dfrac{3}{2^{13}}$; 3) $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=-\dfrac{29}{2}$, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=\dfrac{1}{4!}\sum\limits_{n=4}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(2n-3)!}{(2n)!(2n-7)!}$,

$\operatorname*{res}\limits_{z=1} f(z)=\dfrac{29}{2}-\dfrac{1}{4!}\sum\limits_{n=4}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(2n-3)!}{(2n)!(2n-7)!}=\dfrac{1}{24}(281\cos 1+228\sin 1)$;

4) $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z))=\dfrac{3}{10}$, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-\dfrac{3}{10}$; 5) $\operatorname*{res}\limits_{z=\pm 3} f(z)=\pm\dfrac{1}{6}ch\dfrac{1}{3}$, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=0$,

$\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=0$; 6) $\operatorname*{res}\limits_{z=\pm i} f(z)=-\dfrac{1}{4e}$, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=\dfrac{1}{2e}$.

Частина III. **2**. а) 1; б) 24; в) $\dfrac{4}{3}$.

Частина IV. **1.** 1) $\operatorname*{res}\limits_{z=1} f(z)=-\sin 1$; 2) $\operatorname*{res}\limits_{z=1} f(z)=\dfrac{2}{9!}\cos 2$,

$\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-\dfrac{2}{9!}\cos 2$; 3) $\operatorname*{res}\limits_{z=2k\pi i} f(z)=-4k^2\pi^2\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$;

4) $\operatorname*{res}\limits_{z=1} f(z)=\dfrac{e^2}{2}$, $\operatorname*{res}\limits_{z=-1} f(z)=-\dfrac{1}{2}$, $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=-e\cdot\operatorname{sh}1$, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=0$. **2.**

1) -1; 2) -1; 3) $\operatorname*{res}\limits_{z=-1} f(z)=1$, $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z)=0$, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)=-1$; 4) π^2; 5) $-\pi$; 6) -2.

Практичне заняття № 15

Основна теорема про залишки та її застосування до обчислення інтегралів

Частина I

а) *Основні теоретичні відомості* [1, с. 352–354].

1. Основна теорема по залишки. Нехай L –кусково-гладкий контур, що цілком лежить в області D, функція $f(z)$ є однозначною і аналітичною в області D крім скінченого числа ізольованих особливих точок z_k ($k=\overline{1,n}$) розташованих всередині L. Тоді має місце формула

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{37}$$

де контур L обходиться у додатному напрямі.

б) *Питання для самоперевірки*

1. Сформулювати основну теорему про залишки.

2. Чому дорівнює інтеграл $\int_L f(z)dz$, якщо всі особливі точки $f(z)$ розташовані поза контуром L?

в) *Методичні вказівки до розв'язування задач*

1. Обчислити $\int_L \frac{z^2+1}{z(z+2)^2}dz$, де $L=\{z,\ |z|=5\}$.

Розв'язання. Особливими точками підінтегральної функції $f(z)=\frac{z^2+1}{z(z+2)^2}$ є нулі її знаменника: $z=0$ – простий полюс, $z=-1$ – полюс другого порядку. Обидві ці точки лежать всередині кола інтегрування $|z|=5$. Тому, за формулою (37) маємо.

$$\int_L \frac{z^2+1}{z(z+2)^2}dz = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-1} f(z)\right).$$

Обчислимо вказані залишки:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{z(z+2)^2}z = \lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{(z+2)^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -1}\frac{d\left(\dfrac{z^2+1}{z(z+2)^2}(z+2)^2\right)}{dz} = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2+1}{z}\right) =$$

$$= \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to -1}\left(1-\frac{1}{z^2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Отже,

$$\int_L \frac{z^2+1}{z(z+2)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) = 2\pi i.$$

2. Обчислити $\int_L z\cdot\exp\frac{1}{z}dz$, де $L=\{z,\ |z-1|+|z+1|=4\}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Підінтегральна функція $f(z)=z\cdot\exp\frac{1}{z}$ має одну скінчену особливу точку $z=0$, яка лежить всередині контуру інтегрування $|z-1|+|z+1|=4$. Тому, за формулою (37) маємо

$$\int_L z\cdot\exp\frac{1}{z}dz = 2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=0}\left(z\cdot\exp\frac{1}{z}\right).$$

Оскільки $\operatorname*{res}_{z=0}\left(z\cdot\exp\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}$ (дивиться приклад 2 практичного заняття 15), то

$$\int_L z\cdot\exp\frac{1}{z}dz = 2\pi i\cdot\frac{1}{2} = \pi i.$$

3. Обчислити інтеграл $\int_L \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^4}dz$, де L – коло $|z-i|=4$.

<u>*Розв'язання.*</u> Підінтегральна функція $f(z)=\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^4}$ має одну скінчену особливу точку $z=\frac{\pi}{3}$, яка лежить всередині контуру інтегрування $|z-i|=4$ і є полюсом 4-го порядку $f(z)$. Тому, за формулою (37) маємо

$$\int_L \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^4}dz = 2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^4}\right) = 2\pi i\cdot\frac{1}{3!}\lim_{z\to\frac{\pi}{3}}\frac{d^3\left(\frac{\sin z}{\left(z-\pi/3\right)^4}\left(z-\pi/3\right)^4\right)}{dz^3} =$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{1}{6}\lim_{z\to\frac{\pi}{3}}\frac{d^3(\sin z)}{dz^3} = \frac{\pi i}{3}\cdot\lim_{z\to\frac{\pi}{3}}(-\cos z) = -\frac{\pi i}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi i}{3}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\pi i}{6}.$$

4. Обчислити інтеграл $I = \int_L \frac{z+1}{(z-1)\sin z}dz$, де L – коло $|z| = 2$.

<u>*Розв'язання.*</u> Особливими точками підінтегральної функції $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)\sin z}$ є точки $z=1$ і $z=\pi k$. Серед них всередині контуру L лежать тільки дві: $z_1 = 1$ і $z_2 = 0$. Тому

$$I = 2\pi i(\operatorname*{res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=0} f(z)) .$$

Обидві точки є для даної функції простими полюсами, причому можна застосувати формулу для знаходження залишку функції, що є часткою двох аналітичних функцій. Матимемо:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{\varphi(0)}{\psi'(0)} = \left.\left(\frac{z+1}{(z-1)\cos z + \sin z}\right)\right|_{z=0} = -1, \quad \operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \frac{2}{\sin 1}.$$

Тоді, для даного інтеграла I, маємо

$$I = 2\pi i\left(\frac{2}{\sin 1} - 1\right) \approx 8{,}65i .$$

5. Обчислити інтеграл $I = \int_L \frac{dz}{\left(z^8 + \frac{1}{2}\right)^2 (z-i)}$, де L – коло $|z| = \frac{3}{4}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Всередині контуру L лежать вісім полюсів другого порядку, а поза L – простий полюс $z=i$ і $z=\infty$. Знайдемо залишок в точці i:

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} f(z)(z-i) = \lim_{z\to i}\frac{1}{\left(z^8+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{9}.$$

Для обчислення залишку в точці ∞ знайдемо декілька членів розкладу даної функції в ряд Лорана в околі цієї точки. З цією метою введемо нову змінну $t=\frac{1}{z}$. Тоді

$$f(z)=f\left(\frac{1}{t}\right)=t^{17}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}t^{8}\right)^{2}(1-it)}=t^{17}\varphi(t).$$

Але функція $\varphi(t)$ аналітична в крузі $|t|<1$. Тому її в даному крузі можна розкласти в степеневий ряд: $\varphi(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\dots$, $|t|<1$. Тоді

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=t^{17},\quad |t|<1,$$

або

$$f(z)=\frac{1}{z^{17}}\left(a_0+\frac{a_1}{z}+\dots\right),\quad |z|>1.$$

В отриманому розкладі коефіцієнт при $\frac{1}{z}$ рівний нулю, тобто $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0$.

Отже, для даного інтеграла маємо

$$I=2\pi i\sum_{k=1}^{8}\operatorname*{res}_{z=z_k,\,|z_k|<\frac{3}{4}} f(z)=-2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=i} f(z)+\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right)=-\frac{8}{9}\pi i.$$

Частина II
Виконати завдання

1. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_L \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$, де $L-$ коло $|z|=3$;

2) $\int\limits_L \frac{dz}{z^4-1}$, де $L-$ прямокутник з вершинами в точках $2+2i$, $-2+2i$, $2-\frac{i}{2}$, $-2-\frac{i}{2}$;

3) $\int\limits_L \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$, де $L-$ коло $|z|=2$;

4) $\int\limits_L \frac{dz}{exp\,z-1}$, де $L-$ коло $|z-3i|=4$;

5) $\int\limits_L \operatorname{tg}(\pi z)\,dz$, де $L-$ коло $|z|=100$;

6) $\int\limits_L \frac{z^3}{z+1} exp\left(\frac{1}{z}\right) dz$, де $L-$ коло $|z|=2$;

7) $\int\limits_L \frac{dz}{z\,(2z^{10}-1)(2z^{10}-1)(z^{20}-2)^2}$, де L – коло $|z|=1$.

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_C \frac{\mathrm{sh}(z+1)}{z^2+1} dz$, де C – крива $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$;

2) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin z \cdot \sin(z-1)}{z^2 - z} dz$;

3) $\int\limits_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1} dz$, де C – коло $x^2 + y^2 - 2x = 0$;

4) $\int\limits_L \frac{\mathrm{sh} z}{1-\sin \pi z} dz$, де $L = \{z, |z-1| = 1\}$.

Частина IV
Домашнє завдання

1. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_L \frac{z \sin z}{(z-1)^5} dz$, де $L-$ коло $|z|=2$;

2) $\int\limits_L \frac{z \exp z}{z^3 - 3z + 2} dz$, де $L-$ коло $|z|=3$;

3) $\int\limits_L \frac{z\,\mathrm{sh} z}{z^2 + z - 6} dz$, де $L-$ трикутник з вершинами в точках $3i$, 3, $-3i$;

4) $\int\limits_L z^3 \mathrm{tg} \pi z dz$, де $L-$ коло $|z|=1$;

5) $\int\limits_L \frac{z}{z+3} \exp\left(\frac{1}{3z}\right) dz$, де $L-$ коло $|z|=4$;

6) $\int\limits_L \frac{z^2}{\sin^3 z \cos z} dz$, де $L-$ коло $|z|=1$.

Відповіді

Частина II. 11. 1) 0; 2) $-\dfrac{\pi}{2}$; 3) $\dfrac{3}{64}\pi i$; 4) $4\pi i$; 5) $-400i$; 6) $-\dfrac{2}{3}\pi i$; 7) $-\dfrac{\pi i}{7}$.

Частина III. 1. 1) $2\pi i \sin 1 ch 1$; 2) 0; 3) $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{2} i$; 4) $\dfrac{4i}{\pi}\mathrm{ch}\dfrac{1}{2}$.

Частина IV. 1. 1) $-i$; 2) $\dfrac{2\pi i}{9e^2}(5e^3-2)$; 3) $\dfrac{4}{5}\pi i \cdot sh2$; 4) $-i$; 5) $-\dfrac{16}{3}\pi i$; 6) $2\pi i$.

Практичне заняття № 16

Обчислення визначених інтегралів за допомогою основної теореми про залишки

Частина І

а) *Основні теоретичні відомості* ([2], с.380-381).

1. Основна теорема по залишки. Нехай L –кусково-гладкий контур, що цілком лежить в області D, функція $f(z)$ є однозначною і аналітичною в області D крім скінченого числа ізольованих особливих точок z_k ($k=\overline{1,n}$) розташованих всередині L. Тоді має місце формула

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

де контур L обходиться у додатному напрямі.

2. Для обчислення інтеграла по замкненому контуру можна застосовувати теорему про залишки до області, що лежить зовні контуру інтегрування.

3. Основну теорему теорії залишків можна застосувати і до обчислення інтеграла виду

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx, \qquad (38)$$

де $R(u,v)$ – раціональна функція від аргументів u і v, яка не має полюсів на колі $|z| = u^2 + v^2 = 1$. Якщо в інтегралі (38) виконати заміну $z = \exp(ix)$, то

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \ \sin x = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \ dx = \frac{dz}{iz}. \qquad (39)$$

При зміні x від 0 до 2π точка z пробігає коло $|z| = 1$ в додатному напрямі і інтеграл (38) зводиться до інтеграла по замкненому контуру $|z| = 1$ від функції комплексного аргументу:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\; dx = \int_{|z|=1} F(z)\, dz,$$

де $F(z) = \dfrac{1}{iz} R\left(\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right), \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)\right)$ – раціональна функція від z. За основною теоремою про залишки

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} F(z),$$

де z_k $(k = 1,2,...,n)$ – полюси функції $F(z)$, що лежать у крузі $|z| < 1$.

б) ***Питання для самоперевірки***

1. Сформулювати основну теорему теорії залишків.

2. Яким чином відбувається перехід від підінтегральної функції інтегралу (38) до раціональної функції $F(z)$?

3. Як знайти особливі точки раціональної функції?

в) ***Методичні вказівки до розв'язування задач***

1. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dx}{13 + 12\sin x}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Зауважимо, що підінтегральна функція $\dfrac{1}{13 + 12\sin x}$ визначена на відрізку $[0;\, 2\pi]$ бо $13 + 12\sin x > 0$, $x \in [0;\, 2\pi]$.

Виконаємо заміну (39): $z = \exp(ix)$, тоді

$$dx = \frac{dz}{iz},\ \sin x = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2 - 1}{2iz}.$$

Отже,

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{13 + 12\sin x} = \int\limits_{|z|=1} \frac{\dfrac{dz}{iz}}{13 + \dfrac{12}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)} = 2\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{12z^2 + 26iz - 12}.$$

Інтеграл $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{dz}{12z^2 + 26iz - 12}$ обчислимо за основною теоремою про залишки. Особливими точками функції $f(z) = \dfrac{1}{12z^2 + 26iz - 12}$ є нулі її знаменника:

$$12z^2 + 26iz - 12 = 0,\ \ D = -26^2 + 4 \cdot 12^2 = -100 < 0$$

$$z_1 = \frac{-26i - \sqrt{-100}}{24} = \frac{-36i}{24} = -\frac{3}{2}i, \qquad z_2 = \frac{-16i}{24} = -\frac{2}{3}i.$$

z_1, z_2 – це полюси першого порядку функції $f(z)$, причому $|z_1| > 1$, $|z_2| < 1$. Тому, за основною теоремою про залишки, маємо

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{12z^2+26iz-12} = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=-\frac{2}{3}i} f(z) =$$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{z\to -\frac{2}{3}i} \left(z+\frac{2}{3}i\right) \frac{1}{12\left(z+\frac{2}{3}i\right)\left(z+\frac{3}{2}i\right)} = 2\pi i \cdot \lim_{z\to -\frac{2}{3}i} \frac{1}{12\left(z+\frac{3}{2}i\right)} =$$

$$= \frac{2\pi i}{12\left(-\frac{2}{3}i+\frac{3}{2}i\right)} = \frac{\pi i}{5i} = \frac{\pi}{5}.$$

Отже, $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{12z^2+26iz-12} = \frac{\pi}{5}$.

2. Обчислити інтеграл $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{13+12\cos x} dx$.

<u>*Розв'язання.*</u> Перейдемо до комплексної змінної z за формулою $z = \exp(ix)$. Тоді $dx = \dfrac{dz}{iz}$, $\cos x = \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{z^2+1}{2z}$.

Інтегрування по відрізку $0 \le x \le 2\pi$ приводиться до інтегрування по колу $L: |z| = 1$:

$$I = \frac{1}{4i} \int\limits_L \frac{(z^2+1)^2 dz}{z^2(6z^2+13z+6)}.$$

Підінтегральна функція має особливі точки: $z_1 = 0$ – полюс другого порядку; $z_2 = -\dfrac{2}{3}$ і $z_3 = -\dfrac{3}{2}$ – прості полюси. Всередині контуру інтегрування лежать лише дві із них: z_1 і z_2. Знайдемо залишки у цих точках:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \left(\frac{(z^2+1)^2}{6z^2+13z+6}\right)' = -\frac{13}{36};$$

$$\operatorname*{res}_{z=-\frac{2}{3}} f(z) = \left.\left(\frac{\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^2}{12z+13}\right)\right|_{z=-\frac{2}{3}} = \frac{169}{180}.$$

Остаточно маємо:

$$I = \frac{2\pi i}{4i}\left(\frac{169}{180} - \frac{13}{36}\right) = \frac{13\pi}{45}.$$

3. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{\left(1+\sqrt{\dfrac{10}{11}}\cos t\right)^2}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Виконаємо заміну: $z = \exp(it)$, тоді $\cos t = \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $dt = \dfrac{dz}{iz}$. Після заміни маємо

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(1+\sqrt{\dfrac{10}{11}}\cos t\right)^2} = \int\limits_{|z|=1} \frac{\dfrac{dz}{iz}}{\left(1+\dfrac{\sqrt{10}}{2\sqrt{11}}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\right)^2} = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(1+\dfrac{\sqrt{10}}{2\sqrt{11}}z+\dfrac{\sqrt{10}}{2\sqrt{11}\,z}\right)^2} =$$

$$= \int\limits_{|z|=1} \frac{4\cdot 11\cdot z^2\,dz}{iz(\sqrt{10}z^2+2\sqrt{11}z+\sqrt{10}\,)^2} = \frac{44}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(\sqrt{10}z^2+2\sqrt{11}z+\sqrt{10}\,)^2}.$$

Інтеграл $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{z\,dz}{(\sqrt{10}z^2+2\sqrt{11}z+\sqrt{10}\,)^2}$ обчислимо за основною теоремою про залишки.

Особливими точками функції $f(z) = \dfrac{z}{(\sqrt{10}z^2+2\sqrt{11}z+\sqrt{10}\,)^2}$ є нулі її знаменника:

$$\sqrt{10}z^2+2\sqrt{11}z+\sqrt{10}=0, \quad D = 4\cdot\sqrt{11}^{\,2}-4\cdot\sqrt{10}^{\,2} = 4\cdot 21>0,$$

$$z_1 = \frac{-2\sqrt{11}-\sqrt{4\cdot 21}}{2\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{11}+\sqrt{21}}{\sqrt{10}}, \quad z_2 == -\frac{\sqrt{11}-\sqrt{21}}{\sqrt{10}},$$

z_1, z_2 – це полюси другого порядку функції $f(z)$, причому $|z_1|>1$, $|z_2|<1$. Обчислимо $\operatorname*{res}\limits_{z=z_2} f(z)$:

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to z_2}\left((z-z_2)^2\frac{z}{10(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\lim_{z\to z_2}\left(\frac{z}{(z-z_1)^2}\right)' = \frac{1}{10}\cdot\lim_{z\to z_2}\left(\frac{(z-z_1)^2-2z(z-z_1)}{(z-z_1)^4}\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\lim_{z\to z_2}\frac{(z-z_1)-2z}{(z-z_1)^3} = \frac{1}{10}\cdot\lim_{z\to z_2}\frac{-z-z_1}{(z-z_1)^3} = \frac{1}{10}\cdot\frac{-z_2-z_1}{(z_2-z_1)^3} =$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{-\left(-\frac{\sqrt{11}-\sqrt{21}}{\sqrt{10}}\right)-\left(-\frac{\sqrt{11}+\sqrt{21}}{\sqrt{10}}\right)}{\left(\left(-\frac{\sqrt{11}-\sqrt{21}}{\sqrt{10}}\right)-\left(-\frac{\sqrt{11}+\sqrt{21}}{\sqrt{10}}\right)\right)^3}=\frac{1}{10}\cdot\frac{\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{10}}}{\left(2\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{10}}\right)^3}=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{10}}}{\left(2\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{10}}\right)^3}=\frac{1}{10}\cdot\frac{\frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{10}}}{8\frac{11\sqrt{11}}{10\sqrt{10}}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{4\frac{11}{10}}=\frac{1}{44}.$$

Тому, за основною теоремою про залишки, маємо

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{z\,dz}{(\sqrt{10}z^2+2\sqrt{11}z+\sqrt{10})^2}=2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=z_2}f(z)=2\pi i\cdot\frac{44}{i}\frac{1}{44}=2\pi.$$

Частина II
Виконати завдання

2. Обчислити визначені інтеграли:

$$1)\ \int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\frac{1}{3}\cos x};\quad 2)\ \int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\sin x};\quad 3)\ \int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)^2};$$

$$4)\ \int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^4 x}{1+\sin^2 x}dx;\quad 5)\ \int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin x+\cos x+2}.$$

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. Обчислити $\int\limits_L\frac{dz}{1+z^4}$, де $L: x^2-xy+y^2+x+y=0$.

2. Обчислити визначені інтеграли:

$$1)\ \int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{a+bx}dx,\ a>b>0;\quad 2)\ \int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{(13+12x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Частина IV
Домашнє завдання

2. Обчислити визначені інтеграли:

$$1)\ \int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{3+2\sin x};\quad 2)\ \int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}dx;\quad 3)\ \int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{4+\cos x};$$

4) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$; 5) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$; 6) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2+\cos x}{2-\sin x} dx$.

Відповіді

Частина II. 2. 1) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$; 4) $2\pi\left(\sqrt{2}-\frac{5}{4}\right)$ (скористатися підстановкою $z = \exp(2ix)$); 5) $\pi\sqrt{2}$.

Частина III. 1. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(-1+i)$. **2.** 1) $\frac{\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)$; 2) $\frac{13}{90}\pi$.

Частина IV. 2. 1) $\frac{2\pi\sqrt{5}}{5}$; 2) $\pi(2-\sqrt{2})$; 3) $\frac{2\pi\sqrt{15}}{15}$; 4) 2π; 5) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$; 6) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

Практичне заняття № 17

Обчислення невласних інтегралів

Частина I

а) Основні теоретичні відомості

1. Нехай функція $f(z)$ задовольняє умови:

1) $f(z)$ – аналітична у верхній півплощині, включаючи дійсну вісь, за винятком скінченого числа точок z_k ($k=\overline{1,n}$), які лежать вище дійсної осі;

2) нескінченно віддалена точка $z=\infty$ є для функції $f(z)$ є нулем кратності, не нижче другої.

Тоді має місце формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{40}$$

2. Нехай $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – дробово-раціональна функція, де $P_m(x)$ – многочлен степені m, $Q_n(x)$ – многочлен степені n, причому $n \ge m+2$ і $Q_n(x)$ не має нулів на дійсній осі. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname*{res}_{z=z_k} R(z) \tag{41}$$

(сума обчислюється відносно всіх особливих точках $R(z)$, які розташовані у верхній півплощині).

3. Якщо функція $R(x)$ – парна, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} R(x)\,dx$. Тоді формула (41) приймає вигляд

$$\int_{0}^{\infty} R(x)\,dx = \pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname*{res}_{z=z_k} R(z). \tag{42}$$

б) Питання для самоперевірки

1. Яким умовам має задовольняти підінтегральна функція, щоб до неї можна було застосувати формулу (40)?

2. Чи можна формулу (41) застосувати для обчислення таких інтегралів: $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{xdx}{x^3+1}$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{xdx}{x^2+1}$?

3. Чи можна в формулі (41) сума залишків відносно всіх особливих точках $R(z)$, які розташовані у верхній півплощині взяти суму залишків відносно всіх особливих точках $R(z)$, які розташовані у ніжній півплощині?

в) Методичні вказівки до розв'язування задач.

1. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Під знаком інтеграла знаходиться дробово-раціональна функція, яка задовольняє усім умовам, при яких можна користуватися формулою (41). Знайдемо полюси підінтегральної функції. Це точки

$$z_k = \sqrt[6]{-1} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6} = \exp\left(i\frac{\pi+2k\pi}{6}\right),\ k = 0,1,2,...,5.$$

Серед них у верхній півплощині лежать тільки три: $z_0 = \exp\left(i\frac{\pi}{6}\right)$, $z_1 = e\left(i\frac{\pi}{2}\right)$, $z_2 = e\left(i\frac{5\pi}{6}\right)$. Це прості полюси. Скористаємось формулою для обчислення залишку відносно простого полюса і врахувавши, що підінтегральна функція є часткою двох аналітичних функцій:

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{6z_k^5} \quad (k = 0,1,2).$$

За формулою (41) маємо:

$$I = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{6z_0^5} + \frac{1}{6z_1^5} + \frac{1}{6z_2^5}\right) = \frac{2\pi i}{6} \cdot \left(\frac{z_0}{z_0^6} + \frac{z_1}{z_1^6} + \frac{z_2}{z_2^6}\right).$$

Оскільки $z_0^6 = z_1^6 = z_2^6 = -1$, то

$$I = -\frac{\pi i}{3} \cdot (z_0 + z_1 + z_2) = \frac{2}{3}\pi.$$

2. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-10x+29)^2}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Під знаком інтеграла знаходиться дробово-раціональна функція, яка задовольняє усі умови, при яких можна користуватися формулою (41). Знайдемо полюси функції $f(z) = \frac{1}{(z^2-10z+29)^2}$. Це точки $z_1 = 5+2i$ і $z_2 = 5-2i$, які є для неї полюсами другої кратності.

Серед них у верхній півплощині лежить тільки точка $z_1 = 5 + 2i$. Скористаємось формулою для обчислення залишку в полюсі другої кратності:

$$\operatorname*{res}_{z=5+2i} \frac{1}{(z^2 - 10z + 29)^2} = \lim_{z \to 5+2i} \left((z - 5 - 2i)^2 \frac{1}{(z - 5 - 2i)^2 (z - 5 + 2i)^2} \right)' =$$

$$= \lim_{z \to 5+2i} \left(\frac{1}{(z - 5 + 2i)^2} \right)' = \lim_{z \to 5+2i} \left(\frac{-2}{(z - 5 + 2i)^3} \right) = \frac{-2}{(4i)^3} = \frac{-2}{-64i} = \frac{1}{32i}.$$

За формулою (41) маємо:

$$I = 2\pi i \cdot \frac{1}{32i} = \frac{\pi}{16}.$$

3. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$.

<u>*Розв'язання.*</u> Під знаком інтеграла знаходиться дробово-раціональна функція, яка задовольняє усі умови, при яких можна користуватися формулою (42). Особливими точками функції $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1}$ є нулі знаменника: $z^4 + 1 = 0 \quad z_k = \left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin\frac{\pi + 2\pi k}{4} \right), k = \overline{0; 3}$. Це прості полюси $f(z)$. З цих точок тільки дві розташовані в верхній півплощині:

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Обчислимо залишки $f(z)$ в цих точках за формулою (35):

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \left. \frac{z^2 + 1}{4z^3} \right|_{z=z_0} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 1}{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 (1+i)^2 + 1}{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 (1+i)^3} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} 2i + 1}{2\sqrt{2}(-1+i)} = \frac{1+i}{2\sqrt{2}(-1+i)} = \frac{(1+i)(-1-i)}{4\sqrt{2}} = -\frac{2i}{4\sqrt{2}} = -\frac{i}{2\sqrt{2}},$$

$$\underset{z=z_1}{\operatorname{res}} f(z) = \left.\frac{z^2+1}{4z^3}\right|_{z=z_1} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1}{4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(-1+i)^2+1}{4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3(-1+i)^3} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(-2i)+1}{2\sqrt{2}(-i)(-1+i)} = \frac{1-i}{2\sqrt{2}\,i(1-i)} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}.$$

Остаточно маємо

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \pi i\left(\underset{z=z_0}{\operatorname{res}} f(z) + \underset{z=z_1}{\operatorname{res}} f(z)\right) = \pi i\left(-\frac{i}{2\sqrt{2}}-\frac{i}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Частина II
Виконати завдання

1. Обчислити невласні інтеграли, використовуючи відомості із теорії залишків:

$$1)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1};\quad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)};\quad 3)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx;$$

$$4)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx;\quad 5)\ \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2};\quad 6)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-2ix-2};$$

$$7)\ \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)^2}.$$

Частина III
Задачі підвищеної складності

1. Обчислити інтеграли:

$$1)\ \int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x dx}{x^2+a^2}\ \ (a\in R,\ a\neq 0);\ 2)\ \int_{0}^{+\infty}\frac{\ln x dx}{(1+x^2)^2};\ 3)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}\ \ (n\geq 1).$$

2. Довести, що $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}\sec\frac{a\pi}{2}$ $(-1<a<1)$.

Частина IV
Домашнє завдання

1. Обчислити інтеграли:

$$1)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3};\quad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x+1}{1+x^4}dx;\quad 3)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3x+1}{(1+x^2)^2}dx;$$

$$4)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^3+i};\quad 5)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+25)(9x^2+1)};\quad 6)\ \int_{0}^{+\infty}\frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$$

Відповіді

Частина II. 1) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{5\pi}{12}$; 4) $\pi\sqrt{2}$; 5) $\frac{\pi}{4}$; 6) 0; 7) $\frac{\pi}{18}$.

Частина III. **1**. 1) $\frac{\pi e^{-a}}{2a}$; 2) $-\frac{\pi}{4}$; 3) Функція $\frac{1}{(1+z^2)^{n+1}}$ у верхній півплощині має єдиний полюс $(n+1)$-ї кратності в точці $z=i$. Залишок цієї функції відносно полюса $z=i$ дорівнює

$$\lim_{z\to i}\frac{1}{n!}\frac{d^{(n)}}{dz^n}\left[\frac{(z-i)^{n+1}}{(z^2+1)^{n+1}}\right]=\lim_{z\to i}\frac{1}{n!}\frac{d^{(n)}}{dz^n}(z+i)^{-n-1}=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{(-n-1)(-n-2)...(-n-n)(z+i)^{-n-n-1}}{n!}=$$

$$=\frac{(-1)^n(n+1)(n+2)...2n}{n!(2i)^{2n+1}}=\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}2i},$$

а значить, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}=\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}2i}\pi$.

Частина IV. 1) $\frac{3\pi}{8}$; 2) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{2\pi i}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)}$, де

$z_k=\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}$ $(k=0;1;2)$; 5) $\frac{\pi}{80}$; 6) $\frac{2\pi}{3}$.

Література

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Частина 3. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1979. – 384 с.
2. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Частина 2. – К.: Вища школа, 2005. – 510 с.
3. Гольдберг А.А., Шеремета М.М., Заблоцький М.В., Скасків О.Б. Комплексний аналіз. – Львів: Афіша, 2002. – 204 с.
4. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. – М.: Наука, 1978. – 416 с.
5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977. – 444 с.
6. Павлова Л.В., Редькіна О.І. Теорія аналітичних функцій. Збірник вправ. – К.: Вища школа, 19809. – 216 с.
7. Сборник задач по теории аналитических функций. Под редакцией М.А. Евграфова. – М.: Наука, 1972. – 416 с.

Навчальне видання

ЧАДАЄВ
Олександр Михайлович
кандидат фізико-математичних наук, доцент

ТЕСЛЕНКО
Леонід Степанович
кандидат фізико-математичних наук, доцент

МЕНЬКО
Яків Петрович
кандидат фізико-математичних наук, доцент

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник
для студентів механіко-математичних факультетів
вищих навчальних закладів