Міністерство освіти і науки України
Миколаївський національній університет
імені В.О. Сухомлинського

В.М. Махровський
Р.В. Дінжос

ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

Рекомендовано Вченою радою
Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського
як навчальний посібник
для вищих навчальних закладів

Миколаїв
«Іліон»
2017

УДК 53.083+53.088+51-7
ББК 22.3.я73
М36

Рецензенти:

Т. Г. Січкар професор кафедри фізики Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова кандидат фізико-математичних наук, професор;

Ю.Ф.Забашта професор кафедри молекулярної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано вченою радою
Миколаївського національного університету імені В.О. Сухомлинського
як навчально-методичний посібник для вищих навчальних закладів
(протокол № 26 від 26 червня 2017 року)

Махровський В.М.
М 36 Обробка результатів вимірювання /
В.М. Махровський, Р.В. Дінжос;
– Миколаїв: Іліон, 2017 – 92 с.

В навчально-методичному посібнику викладені основні питання метрології, розглянуті питання графічного представлення результатів вимірювань, апроксимації, інтерполяції та екстраполяції даних. Описане програмне забезпечення для обробки експериментальних даних. Розглянуто кореляційний аналіз.

Дисципліна «Обробка результатів вимірювань» є складовою частиною підготовки студентів спеціальності 6.040204 Прикладна фізика та формуванню їх фахових компетентностей.

В посібнику викладено курс лекцій та лабораторні роботи, які передбачаються при вивченні цього матеріалу за кредитно-трансферною системою організації навчального процесу, також наведені питання для самоконтролю.

УДК 53.083+53.088+51-7
ББК 22.3.я73

З М І С Т

П е р е д м о в а

Успіхи науки і техніки значною мірою спирається на досягнення природничих наук, на дослідження широкого кола явищ та процесів матеріального світу. Необхідним елементом пізнання світу є вимірювання різноманітних величин. Нагромадження науково-технічної інформації, узагальнення її неможливі без процесу вимірювання.

У фізиці особливого значення набуло поняття про фізичну величину. Під фізичною величиною розуміють властивість, загальну в якісному відношенні для багатьох фізичних об'єктів (фізичних систем, їх станів та процесів, які в них відбуваються), але в кількісному відношенні індивідуальну для кожного об’єкта. Тіла, процеси, явища можна характеризувати різними загальними властивостями – фізичними величинами: масою, електричним опором, температурою, освітленістю тощо. За однаковими фізичними величинами, які називають однорідними, можна порівнювати різноманітні тіла, але для цього потрібно ввести кількісні критерії фізичних величин – розмір і значення фізичної величини. Розмір фізичної величини дає уявлення про кількісний зміст властивості в даному об'єкті, що відповідає даній фізичній величині.

В історичному процесі розвитку науки, техніки, промисловості в різних країнах світу були запроваджені різноманітні одиниці фізичних величин. З часом виникла потреба уніфікувати одиниці фізичних величин, створити систему, під якою тепер розуміють сукупність фізичних величин, зв’язаних між собою певними залежностями. У свою чергу система фізичних величин ґрунтується на основних та похідних величинах.

Результати будь-яких вимірювань не мають цінності, якщо не вказана похибка, з якою воно виконано. Правила підрахунку похибок розроблені достатньо давно, але іноді викладаються в деяких посібниках не зовсім правильно. Крім того обчислювальна техніка розвивається дуже швидко і тому виникає необхідність описати нові можливості обробки результатів вимірювань та оцінки похибок вимірювань.

Розділ 1. Методологічні та метрологічні основи фізичних вимірювань

1.1. Методологія науки

Методологія науки, в традиційному розумінні, – це вчення про методи і процедури наукової діяльності, а також розділ загальної теорії пізнання, особливо теорії наукового пізнання та філософії науки. В прикладному сенсі, – це система принципів і підходів дослідницької діяльності, на які спирається вчений в ході отримання та розробки знань в рамках конкретної дисципліни: фізики, хімії, біології, інформатики та інших розділах науки.

Прийнято виділяти два основних рівня наукового пізнання: емпіричний і теоретичний. Цей поділ пов'язано з тим, що суб'єкт може отримувати знання дослідним шляхом (емпіричним) і шляхом складних логічних операцій, тобто теоретично.

Емпіричний рівень – це етап збору даних (фактів) про соціальні і природні об'єкти. На емпіричному рівні досліджуваний об'єкт відбивається переважно з боку зовнішніх зв'язків і проявів. Емпіричний рівень пізнання включає в себе: спостереження явищ, накопичення та відбір фактів, встановлення зв'язків між ними.

Теоретичний рівень пізнання пов'язаний з переважанням розумової діяльності, з осмисленням емпіричного матеріалів, його переробкою. На теоретичному рівні розкривається: внутрішня структура і закономірності розвитку систем і явищ; їхня взаємодія та обумовленість.

1.1.1 Методи емпіричного дослідження

Спостереження. Воно являє собою активний пізнавальний процес, що спирається, перш за все, на роботу органів чуття людини і його предметну матеріальну діяльність, навмисне та цілеспрямоване сприйняття явищ зовнішнього світу з метою вивчення і відшукання сенсу в явищах. Суть його полягає в тому, що досліджуваний об'єкт не повинен піддаватися впливу з боку спостерігача, тобто об'єкт повинен знаходиться в звичайних, природних умовах. Це найбільш простий метод, який виступає, як правило, в якості одного з елементів у складі інших емпіричних методів.

Розрізняють спостереження пряме (візуальне), коли інформацію отримують без допомоги приладів та спостереження непряме – інформацію отримують за допомогою приладів або автоматично за допомогою реєструючої апаратури.

Спостереження як засіб пізнання дає у формі сукупності емпіричних тверджень первинну інформацію про світ.

У повсякденності і в науці спостереження повинні приводити до результатів, які не залежать від волі, почуттів і бажань суб'єктів. Щоб стати основою наступних теоретичних і практичних дій, ці спостереження повинні інформувати нас про об'єктивні властивості і відносини реальних предметів і явищ.

Порівняння. Один з найбільш поширених методів пізнання. Воно дозволяє встановити подібність і відмінність між предметами і явищами. Для того щоб порівняння було плідним, воно повинно задовольняти двом основним вимогам: порівнюватися повинні лише такі явища, між якими може існувати певна об'єктивна спільність, для пізнання об'єктів їх порівняння має здійснюватися за найбільш важливими, істотними (в плані конкретної пізнавальної задачі) ознаками.

За допомогою порівняння інформація про об'єкт може бути отримана двома різними шляхами. По-перше, вона може виступати в якості безпосереднього результату порівняння. По-друге, дуже часто одержання первинної інформації не виступає в якості головної мети порівняння, метою є отримання вторинної, або похідної інформації, що є результатом обробки первинних даних. Найбільш поширеним і важливим способом такої обробки є умовивід за аналогією.

Вимірювання. На відміну від порівняння є більш точним пізнавальним засобом. Вимірювання – це процедура визначення чисельного значення деякої величини за допомогою одиниці виміру. Цінність цієї процедури в тому, що вона дає точні, кількісно визначені відомості про навколишній світ. Найважливішим показником якості вимірювання, його наукової цінності є точність, яка залежить від старанності вченого, від застосовуваних їм методів, але головним чином – від наявних вимірювальних приладів. У числі емпіричних методів наукового пізнання вимір займає приблизно таке ж місце, як спостереження і порівняння.

Експеримент. Окремим випадком спостереження є експеримент. Експеримент передбачає втручання в природні умови існування предметів і явищ або відтворення їх певних сторін в спеціально створених умовах. Експериментальне вивчення об'єктів порівняно зі спостереженням має ряд переваг: у процесі експерименту стає можливим вивчення того чи іншого явища в «чистому вигляді», експеримент дозволяє досліджувати властивості об'єктів дійсності в екстремальних умовах, найважливішою перевагою експерименту є його повторюваність.

Будь-який експеримент може здійснюватися як безпосередньо з об'єктом, так і з моделлю об'єкта. Використання моделей дозволяє застосовувати експериментальний метод дослідження до таких об'єктів, робота з якими складна або навіть неможлива. Тому моделювання є особливим методом і широко поширене в науці.

Моделювання – метод вивчення об'єктів на моделях, що дозволяє отримувати знання за допомогою замінників (моделей) реальних об'єктів. Модель – мислено або матеріально реалізована система, що заміщає іншу систему, з якою вона перебуває в стані подібності. Модель замінює об'єкт дослідження і має деякі спільні властивості з досліджуваним об'єктом. Метод моделювання дозволяє отримати інформацію про різні властивості досліджуваних явищ на основі дослідів з моделями.

Існує кілька видів матеріальних моделей: просторово або геометрично подібні (макети або муляжі), фізично подібні, математично подібні.

1.1.2 Методи теоретичних досліджень

Абстрагування. Це відволікання від деяких властивостей досліджуваних об'єктів і виділення тих властивостей, які вивчаються в даному дослідженні. Має універсальний характер, бо кожен крок думки пов'язаний з цим процесом або з використанням його результату. Сутність цього методу полягає в уявному відволіканні від неістотних властивостей, зв'язків, відносин, предметів і в одночасному виділенні, фіксуванні однієї або декількох сторін цих предметів, які цікавлять дослідника.

Аксіоматичний метод. Суть методу полягає в тому, що на початку міркувань задається набір вихідних положень, які не потребують доказів, оскільки вони є абсолютно очевидними. Це положення називають аксіомами або постулатами. З аксіом за певними правилами будується система вивідних суджень. Сукупність вихідних аксіом і виведених на їх основі пропозицій (суджень) утворює аксіоматично побудовану теорію.

Аналіз і синтез. Аналіз – це метод, в основі якого лежить процес розкладання предмета на складові частини. Коли вчений користується методом аналізу, він подумки розділяє досліджуваний об'єкт, тобто, з'ясовує, з яких частин він складається, які його властивості і ознаки. Синтез являє собою з'єднання отриманих при аналізі частин в щось ціле. В результаті застосування синтезу відбувається з'єднання знань, отриманих в результаті використання аналізу в єдину систему.

Методи аналізу і синтезу в науковій творчості органічно пов'язані між собою і можуть приймати різні форми залежно від властивостей досліджуваного об'єкта і мети дослідження.

Ідеалізація. Це уявне створення понять про об'єкти, що не існують в природі, але для яких є прообрази в реальному світі. Прикладами понять, які виникли в процесі використання методу ідеалізації, є «ідеальний газ», «ідеальний розчин», «точка». Метод ідеалізації широко використовується не тільки в природничих науках, але і в суспільних дисциплінах.

Індукція і дедукція. Індукція – висновок, міркування від «окремого» до «загального». Умовивід від фактів до деякої загальній гіпотезі.

Дедуктивний метод ґрунтується на отриманні висновку при міркуванні від загального до окремого. Тобто, нове знання про предмет отримують шляхом вивчення властивостей предметів даного класу.

Сходження від абстрактного до конкретного являє собою загальну форму руху наукового пізнання. Процес пізнання розбивається на два відносно самостійних етапи. На першому етапі відбувається перехід від чуттєво-конкретного до абстрактних означень.

Другий етап процесу пізнання і є сходження від абстрактного до конкретного. Суть його полягає в русі думки від абстрактних визначень об'єкта до конкретного в пізнанні. На цьому етапі як би відновлюється вихідна цілісність об'єкта, він відтворюється у всій своїй багатогранності – але вже в мисленні.

1.2. Основи метрології

1.2.1 Вимірювання

Вимірювання – пізнавальний процес визначення числового значення вимірюваної величини, а також дія, спрямована на знаходження значення фізичної величини дослідним шляхом, порівнюючи її з одиницею вимірювання за допомогою засобів вимірювальної техніки.

Числове значення вимірюваної величини – число, яке виражає відношення між двома величинами однакової природи – вимірюваною й умовною одиницею вимірювання. Головні ознаки поняття «вимірювання»:

- вимірювати можна властивості реально існуючих об’єктів пізнання – фізичні величини;
- вимірювання вимагає проведення дослідів, тобто теоретичні міркування чи розрахунки не замінять експеримент;
- результатом вимірювання є фізична величина, яка відображає значення вимірюваної величини.

1.2.2 Технічні засоби вимірювання

Засіб вимірювальної техніки – технічний засіб, який застосовується під час вимірювань фізичних величин і має нормовані метрологічні характеристики.

До засобів вимірювальної техніки відносяться засоби вимірювань (міри фізичних величин, вимірювальні прилади, вимірювальні перетворювачі, вимірювальне устаткування, вимірювальні інформаційні системи та ін.) та вимірювальні пристрої.

1.2.3 Сутність

В науці вимірювання є одним з основних засобів пізнання навколишнього світу, в результаті якого ми отримуємо вимірювальну інформацію. Вимірювання може відбуватись з використанням як безшкального засобу вимірювання (калібр), так і шкальними приладами вимірювання (лінійка, ваги, вольтметр, акселерометр, спідометр).

Сутність найпростішого вимірювання полягає в порівнянні розміру фізичної величини Q з розмірами вихідної величини регульованої багатозначної міри nM. У результаті порівняння встановлюють, що: $nM < Q < (n+1)M$.

Основне рівняння вимірювання має такий вигляд:

$$Q = nM, \tag{1}$$

де: Q – значення фізичної величини, оцінка розміру величини у вигляді деякого числа прийнятих для неї величин. Числа Q – це результати вимірювань, вони можуть використані для будь-яких математичних операцій,

n – числове значення фізичної величини, абстрактне число, що відображає відношення значення величини до відповідної одиниці даної фізичної величини,

M – одиниця фізичної величини, тобто це фізична величина фіксованого розміру, якому умовно присвоєно числове значення, рівне одиниці. Права частина рівняння називається числовим значенням вимірюваної величини.

1.2.4 Елементи

Вимірювання передбачає такі основні складові елементи:
- об'єкт вимірювання, тобто вимірювану величину, спостерігача або технічний пристрій, що сприймає результати вимірювання;
- прилади для вимірювання;
- умови навколишнього середовища, в яких проводяться вимірювання;
- одиницю вимірювання;
- метод вимірювання;
- остаточний результат вимірювання.

1.2.5 Метрологічне забезпечення вимірювань

Успішне вирішення наукових і технічних задач, у тому числі забезпечення якості продукції у значній мірі залежить від ступеня досягнення єдності і достовірності (точності) вимірювань.

Єдність вимірювань – стан вимірювань, коли результати виражені в узаконених одиницях, а похибки результатів вимірювань відомі із заданою ймовірністю та не виходять поза задані межі. Єдність вимірювань необхідна для забезпечення порівняльності результатів вимірювань, проведених у різних місцях, в різний час з використанням різних методів і засобів вимірювання.

Точність вимірювань – характеристика ступеня наближення результату вимірювання до істинного значення вимірюваної величини. Для конкретних умов і цілей вимірювання існує свій раціональний рівень точності, котрий недоцільно перевищувати через зростання складності відповідних вимірювань. Питання єдності і точності вимірювань вивчаються метрологією – наукою про вимірювання, методи і засоби забезпечення їхньої єдності і способи досягнення необхідної точності.

Завдання забезпечення єдності і точності вимірювань у державі покладено на Державну систему забезпечення єдності вимірювань (ДСВ) – комплекс нормативних, нормативно-технічних і методичних документів міжгалузевого рівня, які встановлюють правила, норми, вимоги, спрямовані на досягнення і підтримку єдності вимірювань в країні при необхідній точності.

Ця система відіграє особливу роль. У сучасній промисловості затрати праці на виконання вимірювань складають близько 10% загальних затрат праці на всіх стадіях створення і експлуатації продукції, а в окремих галузях промисловості досягають 50-60% (електронна, радіотехнічна та інші). Ефективність цих затрат визначається достовірністю і відтворюваністю вимірювань, які можуть бути досягнуті лише в умовах добре організованого метрологічного забезпечення господарства країни.

ДСВ ґрунтується на трьох основах: технічній, організаційній і нормативній. Технічну основу ДСВ складають державні еталони, еталони фізичних одиниць та стандартні зразки, на кожний з яких розроблено відповідний нормативний документ. Порядок створення цих нормативних документів, їх структура регламентуються вимогами Державної системи стандартизації України.

Організаційною основою ДСВ є метрологічні служби, які забезпечують метрологічний нагляд і контроль у рамках своїх повноважень. Нормативними документами ДСВ є державні стандарти, правила, положення, інструкції та рекомендації. Стандарти ДСВ позначаються перед номером стандарту цифрою 8. Основними нормативно-технічними документами ДСВ та інших систем є: ГОСТ 8.002-86; ГОСТ 8.009-84; ГОСТ 8.010-90; ПР 50.2.009-94; ПР 50.2.006-94.

1.2.6 Класифікація вимірювань

Вимірювання класифікують:

► за характеристиками точності числових значень вимірюваної величини. За характеристиками точності вимірювання поділяються на два види:

Метрологічні вимірювання

- вимірювання з максимально можливою точністю відповідно до наявного технічного рівня. Це вимірювання за допомогою еталонів і спрямовані насамперед на відтворення встановлених одиниць фізичних величин або ж фізичних констант;

- контрольно-повірочні вимірювання, похибки вимірювання яких не перевищують деяких наперед заданих значень. До них відносяться лабораторні вимірювання фізичних величин за допомогою зразкових засобів вимірювання високої точності.

Технічні вимірювання – вимірювання, що проводяться у промислових умовах і визначаються зазвичай нижчим класом точності засобів вимірювання, ніж у попередніх двох випадках.

► <u>за числом вимірювань</u> у ряді вимірювань (разові та багаторазові);

► <u>за характером зміни вимірюваної величини</u> в часі (статичні та динамічні).

Статичні вимірювання – це вимірювання, при яких протягом певного проміжку часу вимірювана величина майже не змінюється або ж її значення змінюється поступово у відповідності з технологічним процесом.

Динамічні вимірювання – вимірювання, які показують зміну вимірюваної величини в часі при різних збуреннях, що впливають на об'єкт дослідження або ж на спосіб вимірювання. Динамічні вимірювання дають можливість вивчати динамічні властивості об'єкта і засобів вимірювальної техніки, особливо датчиків (первинних вимірювальних перетворювачів).

► <u>за відображенням результатів</u> вимірювання (абсолютні та відносні):

Абсолютними називаються вимірювання, значення яких подані у абсолютних одиницях фізичних величин (тиск у паскалях, довжина у метрах, час у секундах).

Відносними називаються вимірювання, значення яких подані як відношення вимірюваної величини до однойменної, умовно прийнятої за одиницю, або ж у відсотках (наприклад, швидкість руху виражена числом Маха, вологість повітря у процентах від повного насичення).

► <u>за способом одержання числового значення</u> вимірюваної величини – прямі, непрямі, сумісні, сукупні.

При прямому вимірюванні результат одержують безпосередньо за експериментальними даними (вимірювання довжини лінійкою, вимірювання температури термометром, вимірювання тиску манометром). Вони є найпоширенішими.

При непрямому вимірюванні числове значення величини відшукують не безпосередньо, а на основі вимірювання інших величин, пов'язаних з вимірюваною величиною відомою математичною залежністю (визначення об'єму рідини у циліндричній посудині за висотою рідини в ній та площею дна $V = Sh$; густини рідини за масою і її об'ємом $\rho = m/V$).

При сумісних вимірюваннях одночасно вимірюють дві або більше різнойменних величин для виявлення залежностей між ними. Переважно, результати таких вимірювань використовують у наукових дослідженнях.

При сукупних вимірюваннях числове значення вимірюваної величини визначається розв'язком системи рівнянь, одержаних шляхом сукупних прямих вимірювань однієї або декількох однойменних величин.

1.2.7 Основні характеристики вимірювань

Похибка вимірювання

Важлива ознака вимірювання – точність. Ступінь точності змінюється залежно від вимог, які ставлять до результату вимірювання. На практиці не тільки неминучі, а й допустимі різні похибки вимірювання. Розроблено спеціальні методи оцінки й компенсації цих похибок.

Якість результатів вимірювання характеризується надійністю, правильністю і точністю. Існують три складові частини загальної похибки вимірювання і відповідні їм показники якості результатів вимірювання: грубі, систематичні і випадкові похибки. Відсутність грубих похибок (промахів) характеризує надійність результатів і досягається організацією вимірювання. Вилучення систематичних похибок характеризує правильність результатів і досягається за допомогою введення спеціальних коефіцієнтів або поправок. Випадкові похибки є неминучими, а їхні величини і закон розподілу характеризують точність результатів вимірювання.

Принципи та методи вимірювання

З метою забезпечення точності вимірювань фізичних величин у метрології розроблені способи використання принципів і засобів вимірювальної техніки, дотримання яких дозволяє уникнути при отриманні результатів вимірювань низки систематичних і випадкових похибок.

Принцип вимірювання – фізичне явище або сукупність фізичних явищ, які покладені в основу вимірювання певної фізичної величини. Наприклад, вимірювання температури за допомогою використання термоелектричного явища, зміни електричного опору терморезистора чи зміни тиску термометричної речовини манометричного термометра та ін.

Метод вимірювання – сукупність способів використання засобів вимірювальної техніки та принципів вимірювань для створення вимірювальної інформації.

У виробництві та повсякденному житті у процесі вимірювань переважно застосовують прямі методи, що забезпечують визначення шуканої величини безпосередньо за експериментальними даними. До прямих методів вимірювання відносяться (перелік не є вичерпним):

► Метод безпосередньої оцінки – вимірювана величина зчитується безпосередньо з шкали, табло чи екрану показувального пристрою вимірювального приладу (наприклад, вимірювання зусилля пружинним динамометром, визначення маси зважуванням на циферблатній вазі, вимірювання електричного струму амперметром). Вимірювання цим методом не є складним, проте точність невисока, але простота методу, швидкість процесу вимірювання визначив його широке застосування на практиці.

► Метод порівняння з мірою полягає в тому, що вимірювана величина порівнюється з величиною, що відтворена мірою.

Міра – це засіб вимірювань, призначений для відтворення та зберігання однієї або декількох відомих значень фізичної величини.

Він відрізняється постійною участю міри в процесі вимірювань (причому за показниками вимірювального приладу оцінюється лише частина вимірюваної величини). Результат вимірювання визначається як сума значень порівняльної міри (наприклад, зважування на аналітичній вазі) і показу вимірювального приладу.

Точність методу порівняння значно вища за точність методу безпосередньої оцінки, але складність застосовування приладів і самого процесу вимірювання інколи обмежує його застосування. Цей метод за технічними особливостями може бути реалізований як:

► Метод протиставлення – це метод порівняння з мірою, коли вимірювана і відтворена мірою величини одночасно діють на пристрій порівняння. Значення шуканої величини визначається після досягнення рівноваги (наприклад, визначення маси на вазі важільного типу, як суми мас гир, що її зрівноважують).

► Нульовий (компенсаційний) метод полягає у порівнянні величини з мірою, а результат впливу величин на прилад зводиться до нуля. Цей метод використовується в автоматичних вимірювальних приладах: вимірювальних мостах, потенціометрах, аналізаторах рідин та газів та ін.

► <u>Диференціальний</u> (різницевий) метод полягає у визначенні вимірювальним приладом різниці між вимірювальною величиною та відомої (відтвореної) величини (наприклад, вимірювання надлишкового тиску диференційним манометром). Точність диференціального методу зростає зі зменшенням різниці між порівнюваними величинами.

► <u>Метод збігів</u> (ноніусний) полягає у тому, що збігання між вимірюваною величиною і величиною відтвореною мірою визначається за збігом міток шкал або періодичних сигналів. Цей метод використовують при вимірюванні точних сигналів часу, частоти обертання з використанням стробоскопа, розмірів штангенциркулем.

► <u>Метод заміщення</u> полягає у вимірах шуканої величини приладом і вимірах цим же приладом міри. Внаслідок того, що обидва виміри робляться одним і тим же приладом в однакових зовнішніх умовах, а шукана величина визначається по відношенню показань приладу, зменшується похибка результату вимірювання. Так як похибка приладу зазвичай неоднакова в різних точках шкали, найбільша точність вимірювання виходить при однакових показаннях приладу.

Збіжність вимірювань

У більшості випадків вимірювання – це багаторазове спостереження величини, що вимірюється. При цьому одержують сукупність вимірів, які необхідно сумісно обробити для одержання результату. Уточнений результат вимірювання одержують шляхом вилучення систематичних і випадкових похибок.

Збіжність вимірювань – характеристика якості вимірювань, що відображає близькість повторних результатів вимірювань однієї і тієї ж величини в однакових умовах.

Відтворюваність вимірювань

Відтворюваність вимірювань – характеристика якості вимірювань, що відображає близькість результатів вимірювань однієї й тієї самої величини, виконаних у різних умовах (у різний час, у різних місцях, різними методами і засобами) але приведені до однакових умов вимірювання (температура, тиск, вологість та ін.).

1.2.8 Філософське бачення

Навколо філософського змісту проблеми вимірювання в науці точиться постійна боротьба між матеріалізмом та ідеалізмом. На розв'язання проблеми вимірювання претендують інструменталізм, операціоналізм, логічний позитивізм. Зразком діалектико-матеріалістичного розуміння й аналізу проблеми вимірювання у науковому пізнанні є «Капітал» Карла Маркса. Інтерес для філософії становить теоретико-пізнавальна природа вимірювання, методологічний аналіз конкретних методів вимірювання, які співвідносять за певними правилами математичний формалізм теорії й фізичні об'єкти, відповідність числових значень теоретичним величинам і реальних показів вимірювальних приладів тощо.

Розділ 2. Графічне представлення результатів вимірювань

У фізичних та інших експериментальних дослідженнях графіки використовують з різною метою. Якщо табличні значення можуть вказувати на зміну досліджуваної величини, то графічне зображення досліджуваної залежності наочно вказує на характер залежності і в багатьох випадках може служити для теоретичного аналізу даної залежності.

Графіки часто використовують для порівняння експериментальних даних з даними, одержаними на основі теоретичних уявлень. Графіками також користуються для встановлення вигляду емпіричної формули, яка виражає співвідношення між двома величинами.

У переважній більшості для побудови графіків використовують прямокутну систему координат. Інші системи координат, наприклад полярну систему, також застосовують для графічного зображення результатів вимірювань, але значно рідше. У прямокутній системі координат прийнято на горизонтальній осі відкладати незалежну змінну, тобто величину, яку експериментатор задає сам, а на вертикальній осі – ту величину, яку він визначає.

На кожній осі вибраної системи координат будують шкалу. Шкали, які наносяться на звичайних вимірювальних лінійках із сталою ціною поділки, називають рівномірними. Для графічних зображень експериментальних даних, крім рівномірних шкал, використовують особливі, які називаються шкалами функції або функціональними шкалами.

2.1 Правила побудови графіків

Розглянемо правила побудови графіків з рівномірною шкалою. Переважно графіки будують на міліметровому папері. Варто слідувати такому порядку побудови графіків:

1. Спочатку креслять осі графіка. Кожна вісь закінчується стрілкою, навколо якої вказується відповідна фізична величина та після коми її розмірність (рис. 1).

Рис. 1

2. Вибирають масштаб графіка. Масштаб повинен бути простим і виражатися по можливості цілим числом. Звичайно, найкраще, коли одиниця вимірюваної величини або 10^n одиниць відповідає 1см (n – ціле додатне або від'ємне число);

3. Нанести на осі поділки шкали. Зручно щоб відстань між поділками складала 1, 2, 5 одиниць (або 0,1; 0,2; 0,5 одиниць, або 10, 20, 50 одиниць і т.д.). Порядок масштабу може бути винесений на кінець осі (рис 2).

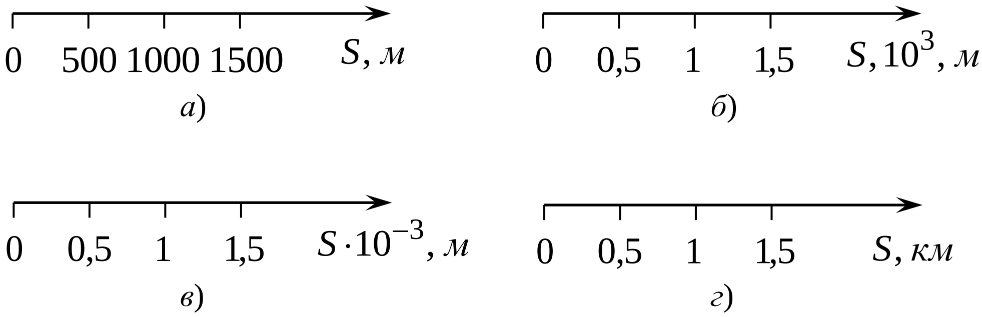


Рис. 2

3. Ціна мінімальної поділки шкали повинна приблизно дорівнювати величині похибки вимірюваної величини (рис. 3, *б*). Коли ж похибка відповідає десяткам малих поділок шкали, то розсіювання експе-

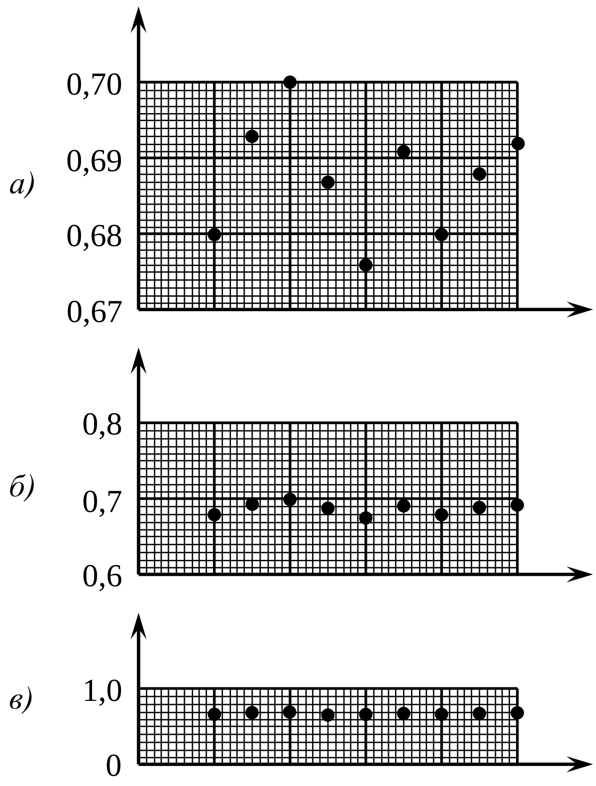


Рис. 3

риментальних даних може бути таким, що неможливо буде встановити характер залежності (рис. 3, *а*). Якщо ж похибка відповідатиме порядку десятої частки найменшої поділки, то всі випадкові відхилення настільки згладяться на кривій, що неможливо буде робити висновки про точність вимірювань (рис. 3, *в*);

4. Масштаби для кожної координатної осі вибирають незалежно один від одного. Однак вони повинні бути такими, щоб криві не були дуже розтягнутими вздовж однієї осі. Відносна похибка підрахунків з таких графіків може бути порівняно великою і сам графік буде мало наочним. Якщо ж крива досить розтягнута вздовж осі ординат і круто нахилена до осі абсцис, то незначна похибка при визначенні величини x приведе до помітної похибки при визначенні з графіка величини y.
5. У тих випадках, коли інтервал, в якому лежать значення аргументу або функції, далеко від нуля, доцільно на відповідній осі відлік починати не з нуля, а з деякого значення, яке трохи менше від числа, що визначає початок інтервалу (рис. 4). Крива (пряма) повинна зайняти все поле графіка.

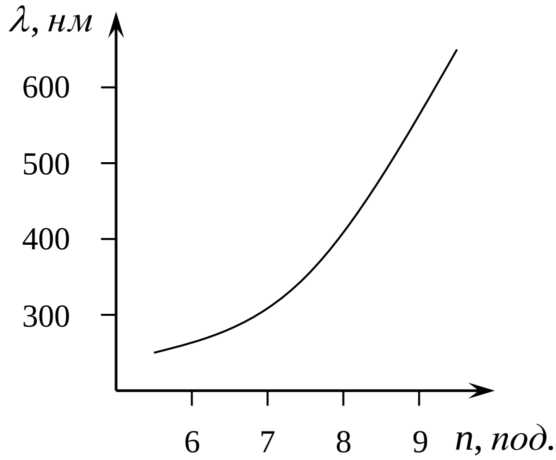


Рис. 4

6. Після вибору і нанесення на осі масштабів на папір наносять значення фізичних величин. Їх позначають маленькими кружечками, трикутниками, квадратами, причому числові значення, що відповідають нанесеним точкам, на осі не зносяться. Потім від кожної точки вгору, вниз, вправо і вліво відкладаються у вигляді відрізків відповідні похибки в масштабі графіка.
7. Після нанесення точок будують графік, тобто проводять плавну криву або пряму так, щоб вона перетинала всі області похибок або так, щоб лінія графіка проходила як можна ближче до всіх експериментальних точок. Суми відхилень експериментальних точок знизу і зверху кривою повинні бути близькі. У правому або в лівому верхньому куті (іноді посередині) пишеться назва тієї залежності, яка зображена на графіку.
8. При проведенні графіка від руки рекомендується користуватися зоровим відчуттям рівності нулю суми додатних і від'ємних відхилень точок від проведеної кривої. Існують математичні методи, що дозволяють провести теоретичну криву через експериментальні точки найкращим чином (наприклад: метод найменших квадратів).
9. При побудові графіків з'єднувати експериментальні точки ламаної не можна, оскільки в результаті виходить не графік, а діаграма. Ламана лінія нічого спільного не матиме з шуканою залежністю. Форма ламаної лінії не відтворюватиметься при повторних вимірю-

ваннях, бо кожний результат вимірювання супроводжується похибками.

10. Похибку експериментальних даних на графіках можна вказувати такими знаками:

Довжина лінії від точки в кожну сторону по горизонталі і по вертикалі вказує на графіку величину похибки. Такі знаки бажано наносити на графіки, коли різні експериментальні точки дістали з неоднаковою точністю, а також при порівнюванні експериментальних даних з теоретичними. Так, на рис. 5 *а* відхилення результатів екс-

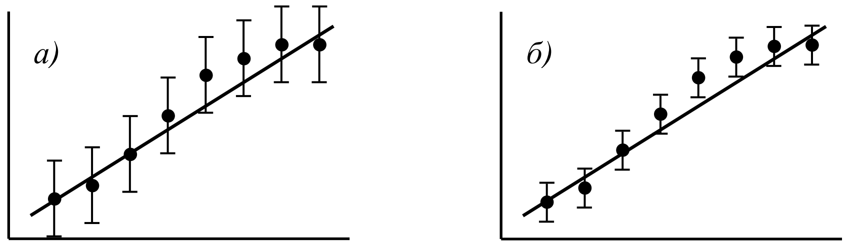


Рис. 5

перименту від теорії не слід вважати значним, а на рис. 5 *б* для того самого явища відхилення буде значним.

Зауваження:

- якщо на одній і тій самій координатній сітці наносяться дані, які дістали експериментально, і теоретична крива, то експериментальні дані треба чітко відмічати точками або іншими позначками. Точки на теоретичній кривій не наносять;
- лінія графіка повинна бути плавною, але при цьому зовсім не обов'язково, щоб вона проходила через всі експериментальні точки;
- у тих випадках, коли діапазон змін вимірюваної величини перевищує порядок, при побудові графіка зазвичай застосовують логарифмічний масштаб;
- при побудові графіків, якщо хід кривої плавний, немає потреби наносити велику кількість точок, вказують тільки відповідним способом ширину інтервалів реєстрації зміни аргументу. Але якщо на кривій з'являються точки, які вказують на можливість екстремумів і перегинів, то в області таких точок потрібно зробити більше вимірювань і нанести на координатній сітці більше експериментальних даних (рис. 6). Коли ж при побудові графіків на основі експериментальних даних дістали криву лінію, то в деяких випад-

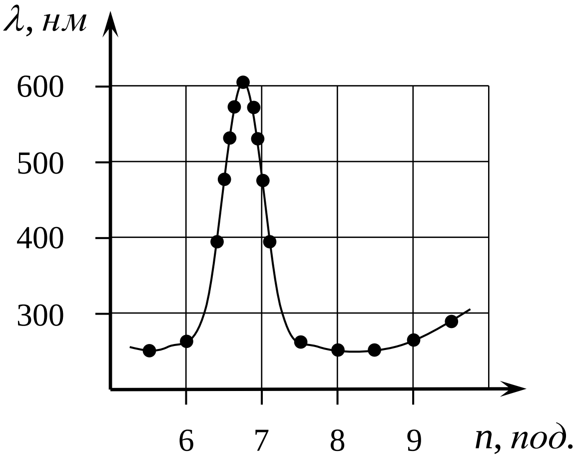


Рис. 6

ках бажано вибором різних функціональних шкал привести дану залежність до лінійної.

2.2 Функціональні шкали

Для побудови функціональної шкали неперервної і монотонної функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ вираховують значення цієї функції для ряду рівновіддалених значень аргументу $x_1, x_2, ..., x_m$, включаючи початок і кінець інтервалу. Потім відкладають на даній осі в більшості випадків від точки, що відповідає значенню функції $f(a)$, відрізки довжиною $\mu[f(x) - f(a)]$. Величину масштабу μ визначають із співвідношення

$$\mu[f(b) - f(a)] = l, \tag{2}$$

де l наперед вибрана довжина шкали.

Кінці кожного відрізка $\mu f(x_i)$ на шкалі позначаються відповідними значеннями аргументу x_i. При цьому дістаємо шкалу з нерівномірною довжиною поділок для рівновіддалених значень аргументу.

Функціональні шкали знаходять широке застосування при обробці експериментальних даних і часто полегшують знаходження виду функції для побудови емпіричної формули. Спеціальним підбором функціональних шкал графіки багатьох функцій можуть бути зведені до прямолінійного виду.

Приклад. Розглянемо рівняння кубічних парабол:

а) $y = x^3$;

б) $y = 5x^3 + 8$; (3)

в) $y = -6x^3 + 30$.

Графіки кубічних парабол зображені на рисунку 7 *а*. Будуємо тепер на осі ординат звичайну рівномірну шкалу, а на осі абсцис – функціональну шкалу кубів. Побудова такої шкали рівнозначна заміні змінних $x^3 = z$:

а) $y = z$;

б) $y = 5z + 8$; (4)

в) $y = -6z + 30$.

У нових змінних рівняння (3) будуть рівняннями першого степеня (4), графіки яких зображено відповідно на рис. 7 *б*. Працювати з лінійними залежностями набагато простіше.

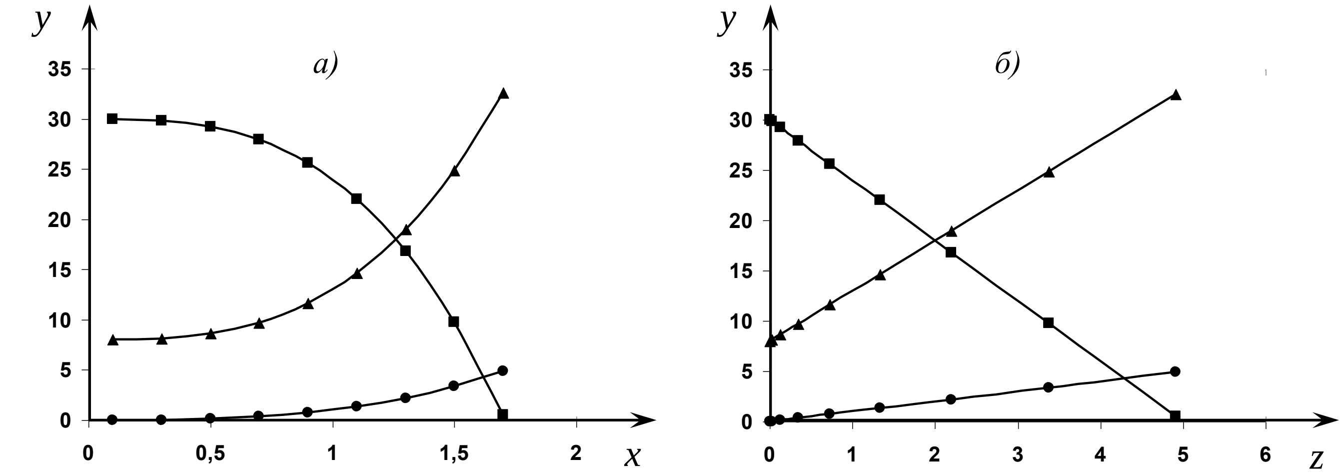


Рис. 7

Координатні сітки, які побудовані за допомогою функціональних шкал, називають функціональними сітками. Будь-яка неявна функція, задана у вигляді

$$a\varphi(x) + b\phi(x) + c = 0,$$

де a, b і c – сталі, зображатиметься прямою лінією на функціональній сітці, в якій на осі абсцис побудована функціональна шкала функції $\varphi(x)$, а на осі ординат функціональна шкала функції $\phi(x)$. Функції $\varphi(x)$ повинні бути монотонними і $\phi(x)$ неперервними.

Логарифмічні шкали

Логарифмічна шкала або логарифмічний масштаб – тип шкали вимірювань, що побудована на основі використання логарифмічного перетворення. Для побудови логарифмічних шкал зазвичай використовуються системи десяткових або натуральних логарифмів, а також система логарифмів з основою два.

На практиці, крім сіток з рівномірними шкалами (міліметровий папір), часто застосовують так званий напівлогарифмічний і логарифмічний папір. У напівлогарифмічному папері координатна сітка побудована з рівномірної і логарифмічної шкал (рис. 8, *а*), а в логарифмічному папері координатна сітка побудована з логарифмічних шкал (рис. 8, *б*).

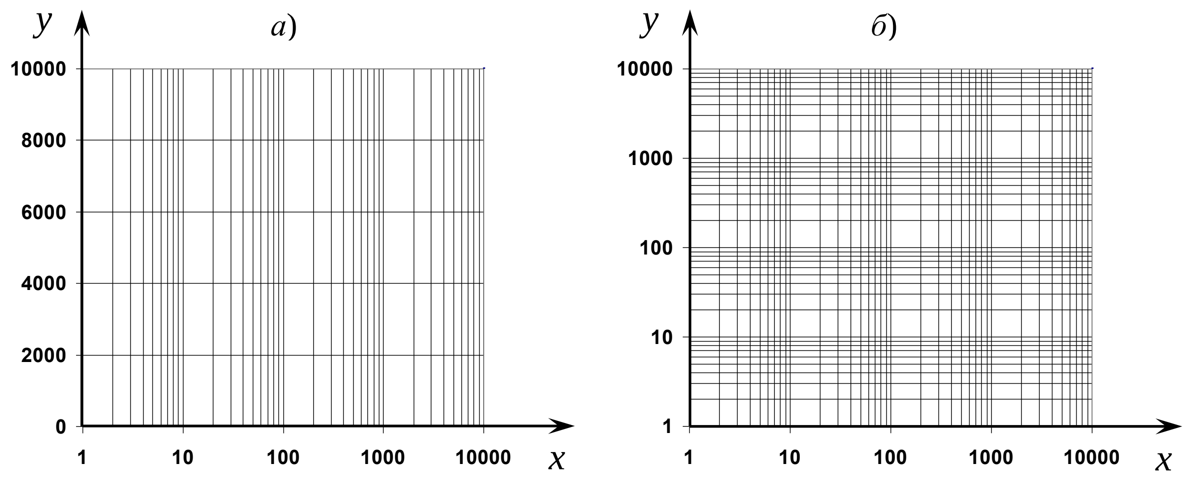


Рис. 8

У логарифмічній координатній сітці, як відомо, початком координат є точка $x=1, y=1$. Тому при використанні такої сітки з даними x_i, y_i потрібно виконати перетворення так, щоб $x_i \geq 1$ і $y_i \geq 1$. Початок координат у напівлогарифмічній координатній сітці відповідає точці $x=0, y=1$. Тому потрібно зробити перетворення так, щоб $y_i \geq 1$. Перетворення x_i, y_i можна здійснити множенням їх на вибраний множник.

Операція логарифмування може застосовуватись до безрозмірних величин, тому перед логарифмування перетворювана розмірна величина на початку перетворюється в безрозмірну шляхом її ділення на прийняте за погодженням довільне (опорне) значення цієї ж величини, після чого виконується операція логарифмування.

Логарифмічна шкала є зручною для відображення дуже великих діапазонів значень величин.

Крім того, для багатьох органів чуття величина відчуття є пропорційною логарифму впливу. Наприклад, в музиці ноти, що розрізняються за частотою у два рази, сприймаються як одна і та ж нота на октаву вище, а інтервал між нотами у півтону відповідає відношенню їх частот $2^{1/12}$. Тому нотна шкала – є логарифмічною з використанням логарифму з основою 2. Крім того, відповідно до закону Вебера-Фехнера, гучність звуку на сприйняття також пропорційна логарифму його інтенсивності (зокрема, логарифму потужності, що випромінюється звуковою колонкою). Тому на амплітудно-частотних характеристиках звуковідтворюючих пристроїв застосовують логарифмічний масштаб по обох осях.

Приклади використання логарифмічних шкал:
- шкала Ріхтера оцінки інтенсивності землетрусів;
- шкала експозицій у фотографії;

- зоряні величини – шкала яскравості зірок;
- шкала pH, яка показує ступінь кислотності середовища;
- шкала одиниць вимірювання різниці рівнів звукової гучності або потужності;
- шкала частоти звуку – октавна система.

2.3 Полярна система координат

Полярна система координат – двовимірна система координат, в якій кожна точка на площині визначається двома числами – кутом та відстанню. Полярна система координат особливо корисна у випадках, коли відношення між точками найпростіше зобразити у вигляді відстаней та кутів; в декартовій, або прямокутній системі координат, такі відношення можна встановити лише шляхом застосування тригонометричних рівнянь.

Полярна система координат задається променем, який називають нульовим або полярною віссю. Точка, з якої виходить цей промінь називається початком координат або полюсом (рис. 9). Будь-яка інша

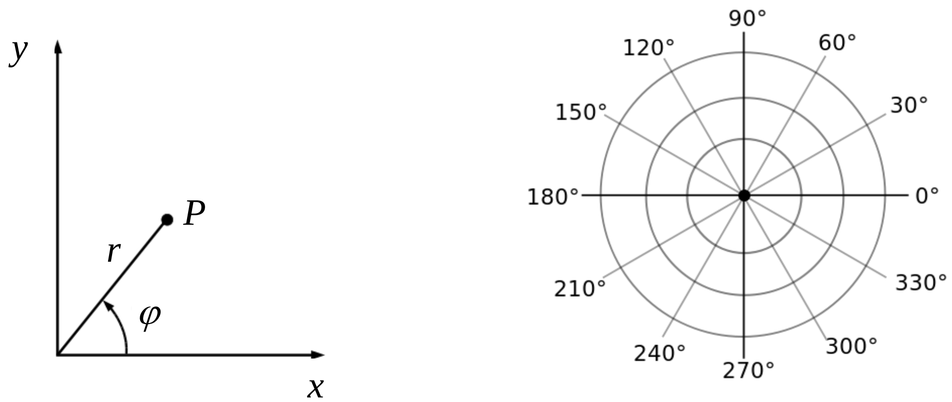


Рис. 9

точка на площині визначається двома полярними координатами: радіальною та кутовою.

Радіальна координата (зазвичай позначається r відповідає відстані від точки до початку координат. Кутова координата, що також зветься полярним кутом або азимутом і позначається φ, дорівнює куту, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки полярну вісь для того, щоб потрапити в цю точку.

Визначена таким чином радіальна координата може приймати значення від нуля до нескінченості, а кутова координата змінюється в межах від 0° до 360° (рис. 10). Однак, для зручності область значень полярної координати можна розширити за межі повного кута, а також

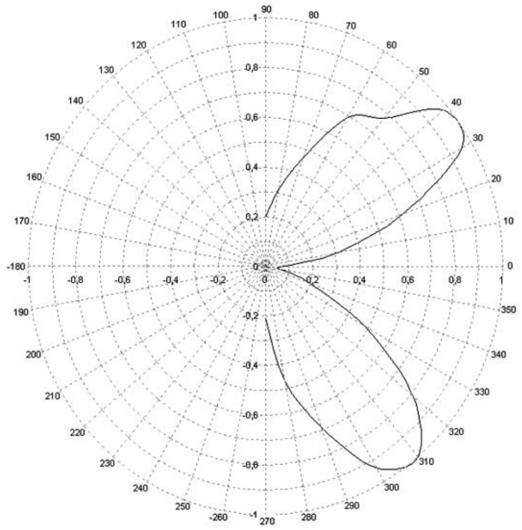


Рис. 10

дозволити їй приймати від'ємні значення, що відповідатиме повороту полярної осі за годинниковою стрілкою.

Полярні координати можна перевести в декартові координати

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

також дві декартові координати x и y можна перевести в полярну координату r

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В полярних координатах зручно зображати діаграми направленості мікрофонів (рис. 11), антен (рис. 12), акустичних колонок. Також полярну систему координат широко використовують в геодезії, навігації, фотометрії та ін.

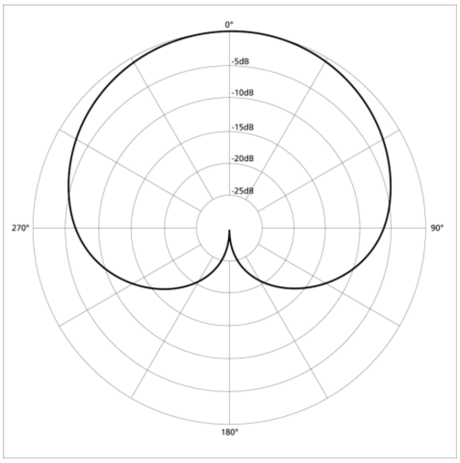


Рис. 11

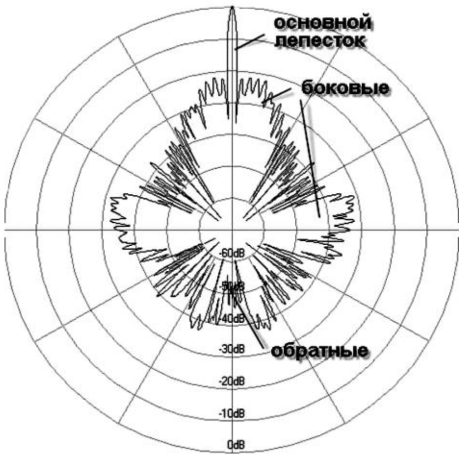


Рис. 12

2.4 Тривимірні системи координат

Складнішими будуть випадки, коли закон фізичного явища описується рівнянням, в яке входить три і більше змінних $f(x, y, z) = 0$. У таких випадках часто одній із змінних величин надають ряд фіксованих значень. Для кожного з таких значень треба дослідити залежність між двома іншими величинами. Так, тангенс кута діелектричних втрат діелектриків залежить як від температури T, так і від частоти ν. Здебільшого досліджують також залежність $tg\delta = f(T)$ при фіксованих значеннях частоти. Якщо є відповідна апаратура, то досліджують також залежність $tg\delta = f(\nu)$ при сталій температурі.

Для наочності залежностей вигляду $f(x, y, z) = 0$ використовують тривимірні системи координат (рис. 13 *а, б*). Так, на рис. 13 *в* зобра-

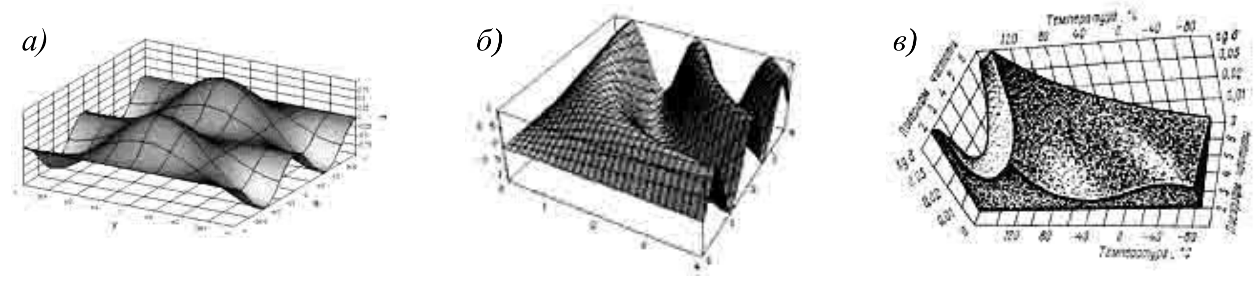


Рис. 13

жено залежність тангенса кута діелектричних втрат у поліетилентерефталаті від температури і частоти. Таке зображення дослідних даних широко використовують у геометричній термодинаміці.

Тема 3. Похибки фізичних вимірювань та їх класифікація

Вимірювання фізичних величин не може бути виконано абсолютно точно. Будь яке вимірювання дає наближений результат. Не можна абсолютно точно виміряти фізичну величину. Більш того, абсолютно точні вимірювання це ідеальне поняття. Достатньо знати наближений результат і похибку. З іншого боку збільшення точності вимірювань часто призводить до відкриття нових фізичних явищ і законів.

Похибка вимірювання – це відхилення результату вимірювання від істинного значення вимірюваної фізичної величини.

Абсолютна похибка вимірювання – це похибка вимірювання, виражена в одиницях вимірюваної величини.

Відносна похибка вимірювання – це похибка вимірювання, виражена як відношення абсолютної похибки до дійсного чи виміряного значення.

Істинне значення величини нам невідомо. Але з теорем математичної статистики слідує, що при необмеженому збільшенні кількості вимірів середнє значення необмежено наближується до шуканої величини.

За джерелами виникнення похибки вимірювання бувають інструментальні, методичні та особисті (похибки оператора).

Інструментальна похибка – складова похибки вимірювання, обумовлена властивостями засобу вимірювання. Ця похибка в свою чергу може містити кілька компонентів, зокрема, похибку засобу вимірювання та похибку обумовлену взаємодією засобу вимірювання з об’єктом вимірювання.

Методична похибка – складова похибки вимірювання, обумовлена недосконалістю методу вимірювання або невідповідністю об’єкта вимірювання його моделі, прийнятій для вимірювання.

Похибка оператора – складова похибки вимірювання, обумовлена індивідуальними властивостями оператора.

За закономірностями виникнення та прояву розрізняють систематичні, випадкові та надмірні похибки.

Систематична похибка – складова загальної похибки вимірювання, яка залишається постійною або закономірно змінюється під час повторних вимірювань однієї і тієї ж величини.

Випадкова похибка – складова загальної похибки вимірювання, яка змінюється випадковим чином (як за знаком, так і за величиною) під час повторних вимірювань однієї і тієї ж величини.

Надмірна похибка – похибка вимірювання, яка істотно перевищує очікувану за даних умов похибку. Результати, що містять надмірну похибку, називаються промахами. Такі результати необхідно виявляти та вилучати.

Таким чином, повна похибка вимірювання є сумою систематичної та випадкової похибок. Випадкові похибки можна виявити шляхом проведення повторних вимірювань, оскільки вони призводять до мінливості їх результатів. В цьому відношенні більш небезпечними є систематичні похибки, оскільки вони часто лишаються непоміченими. Якщо змінну систематичну похибку ще можна виявити за результатами повторних вимірювань методами дисперсійного аналізу або інженерними методами, то не існує математичних методів для виявлення постійних систематичних похибок. Постійні систематичні похибки можуть бути виявлені в результаті ретельного аналізу вимірювальної процедури (методики вимірювання) або експериментально в результаті спеціальних досліджень.

Методи визначення похибок та математична обробка результатів прямих та непрямих фізичних вимірювань описана в багатьох літературних джерелах.

3.1 Нормальний закон

В більшості підручників, присвячених обробці результатів вимірювань, наведено розрахунки для випадку нормального розподілу похибок. Нормальний закон розподілу випадкової величини (розподіл Гаусса) описується формулою

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (5)$$

де: σ^2 – дисперсія вимірювань, Δx – похибка. Графік і гістограма нормального розподілу приведені на рис. 14.

Формула Гаусса багаторазово перевірялася. У випадках, коли похибки вимірювань не дуже великі формула добре описує експериментальні дані. В деяких випадках експериментальні дані краще описують інші функції. Але найчастіше користуються нормальним розподілом, не завжди перевіряючи його справедливість. «Експериментатори вірять в нього, покладаючись на докази математиків, а математики – покладаючись на експериментальне підтвердження». Експеримент завжди дає тільки гістограму (рис. 15). Але закон нормального розподілу можна використовувати завжди, якщо сумарна похибка з'являється в результаті сумісної дії багатьох причин, кожна з яких дає малий внесок в загальну похибку. Навіть коли кожне джерело похибки має розподіл, що відрізняється від нормального, результат їхньої сумарної дії приводить до розподілу Гаусса (наслідок теореми Ляпунова). Основна умова її використання – відсутність окремих джерел домінуючих похибок.

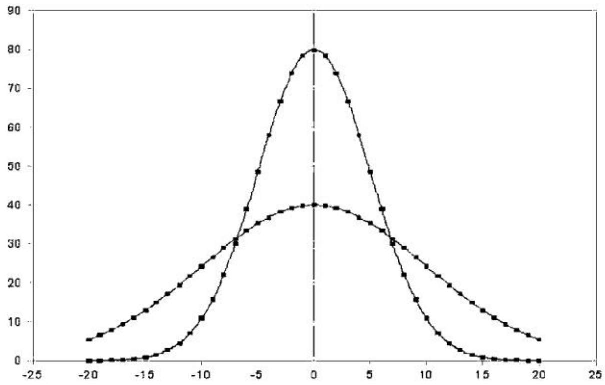


Рис. 14.

Важливість нормального закону розподілу в природничих науках зумовлена тим, що він задовільно апроксимує розподіл значень багатьох кількісних показників, спричинених дією багатьох рівносильних факторів. Тому його можна приймати (хоч і не завжди) як імовірнісну модель досліджуваного явища.

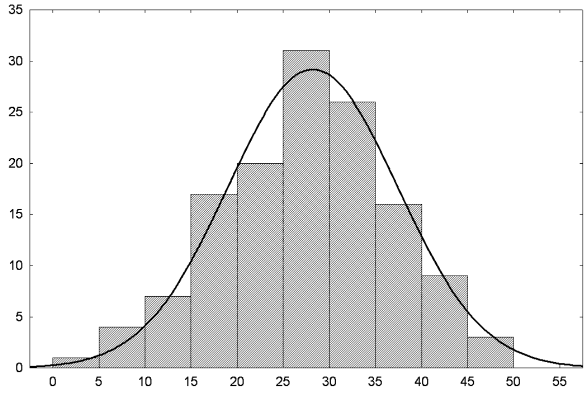


Рис. 15.

Нормальний закон характеризується середнім значенням (математичне очікування) и дисперсією. Тільки середнє значення не досконало описує розподіл випадкової величини. Наведемо відомий приклад: в одному купе їде 60-річна бабуся і онуки: 4, 5, 5 та 6 років. Середній вік 16 років. В сусідньому купе їде молодь: 15, 15, 16, 17, 17 років. Середній вік також дорівнює 16 років.

Таким чином, за середнім значенням вік в обох купе однаковий. Але стандартне відхилення в першому купе дає 24,6, а в другому 1.

Характерною особливістю нормального розподілу є те, що 68% всіх спостережень лежить в діапазоні $\pm\sigma$ від середнього, 95% всіх спостережень лежить в діапазоні $\pm 2\sigma$, а діапазон $\pm 3\sigma$ містить 99,7% результатів усіх спостережень. Тобто 997 значень з 1000 будуть знаходитись не далі ніж 3σ в ту або іншу сторону.

Прикладами величин розподілених за нормальним законом може бути: зріст людей, результати стрільби по мішені, розкид розмірів деталей.

В навчальній лабораторній практиці приймається, що похибки підкоряються нормальному закону розподілу. До формули Гаусса приводять такі припущення:

- похибки вимірювань можуть приймати неперервний ряд значень;
- при великій кількості спостережень похибки рівних значень, але різних знаків зустрічаються майже однаково часто;
- частота появи похибок зменшується зі збільшенням значення похибки. інакше кажучи, великі похибки зустрічаються рідше, ніж маленькі.

3.2 Дисперсія і середнє квадратичне відхилення

Дисперсія випадкової величини (від лат. *dispersio* розсіювання) – міра розсіювання (розкиду) даної випадкової величини, тобто її відхилення від математичного очікування (середнього значення). Позначається σ^2.

Оцінка дисперсії генеральної сукупності здійснюється сумою середніх квадратів відхилень досліджуваної випадкової величини за формулою

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2.$$

Вибіркова дисперсія, обчислена за цією формулою, дає декілька занижену (зміщену) оцінку генеральної дисперсії. Це пов'язано з тим, що величина, відносно якої беруться відхилення, сама залежить від елементів вибірки.

Є строгий доказ того, що знаменник вибіркової дисперсії завжди повинен дорівнювати різниці між обсягом вибірки і числом зв'язків, накладених на цю вибірку. Число зв'язків називається числом ступенів свободи вибірки. Щоб отримати незміщену оцінку генеральної дисперсії, слід використовувати загальну формулу, де в знаменнику замість n використовується число ступенів свободи $n-k$. Для незалежних (негрупованих) даних $k=1$, тоді незміщена оцінка вибіркової дисперсії

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2 .$$

Квадратний корінь з дисперсії, рівний σ, називається середньоквадратичним відхиленням, стандартним відхиленням або стандартним розкидом. Стандартні відхилення вимірюється в тих же одиницях, що і сама випадкова величину, а дисперсія вимірюється в квадратах цієї одиниці виміру.

Оцінюючи випадкові похибки ми завжди маємо справу з вибірковою дисперсією. Найбільш поширена оцінка за допомогою стандартної або середньої квадратичної похибки. Її часто називають стандартною похибкою або стандартом вимірювання.

Середня квадратична похибка для вибірки

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} ,$$

де: x_i– i-те значення випадкової величини, $\bar{x}$ – середнє значення, n – кількість вимірів.

Якщо кількість спостережень дуже велика $n \to \infty$, то S прямує до деякого постійного значення σ, яке називають статистичною границею

$$\sigma = \lim S .$$

Ця границя і є середня квадратична похибка. Насправді ми завжди знаходимо не σ, а її наближене значення S, яке наближається до σ із збільшенням кількості спостережень.

Деякі автори трактують ці поняття інакше, вважаючи, що між цими поняттями не існує великої різниці. Для великої кількості спостережень дійсно можна вважати що

$$S = \sqrt{\sigma} .$$

Для практичного використання зручніше використовувати середнє квадратичне відхилення. Воно має розмірність той величини, яку ми досліджуємо.

Наступний висновок, який випливає з закону складання похибок, відноситься до визначення похибки середнього арифметичного. Середнє арифметичне ряду вимірювань має меншу похибку, ніж результат кожного окремого вимірювання. Розрахунки показують, що середня квадратична похибка середнього арифметичного дорівнює

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Це фундаментальний закон зростання точності при зростанні числа спостережень. З нього випливає, що, бажаючи підвищити точність вимірювань в два рази, ми повинні зробити замість одного – чотири виміри.

При практичній роботі треба розрізняти застосування середньої квадратичної похибки окремого вимірювання та середньої квадратичної похибки середнього арифметичного. У тих випадках, коли ми хочемо характеризувати точність застосовуваного способу вимірювань, слід використовувати похибку S або σ, якщо n достатньо велике

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \tag{6}$$

Середня квадратична похибка середнього арифметичного застосовується, коли нам потрібно оцінити похибку того значення, яке ми отримали в результаті всіх проведених вимірювань

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \tag{7}$$

Випадкову похибку не можна встановити точно, а тільки з певною ймовірністю. Для коректного представлення результату вимірювань треба заздалегідь задати його надійність, або, інакше кажучи, вказати довірчу ймовірність. Випадкові похибки прийнято представляти у вигляді довірчого інтервалу, довжина якого визначається величиною довірчої ймовірності. У якості центру довірчого інтервалу для вимірюваної величини x береться її середнє, обчислене за результатами серії вимірювань. Межі цього довірчого інтервалу виражаються добутком середньоквадратичного відхилення і безрозмірного коефіцієнта Стьюдента. У 1908 році Стьюдент (Уільям Госсет) показав, що статистичний підхід справедливий і при малому числі вимірювань. Таким чином, для розрахунку абсолютної похибки при малій кількості вимірів вводиться спеціальний коефіцієнт, що залежить від надійності p і числа вимірювань n, який називається коефіцієнтом Стьюдента t_{pn}.

Тоді випадкова похибка середнього значення вимірювань

$$\Delta x_{вип} = t_{pn}\, S_{\bar{x}},$$

або
$$\Delta x_{вип} = t_{pn}\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n\,(n-1)}}\,.$$

Табл. 1

Коефіцієнти Стьюдента t_{pn}

n	p			
	0,5	**0,9**	**0,95**	**0,99**
2	1,00	6,3	12,7	63,7
3	0,82	2,9	4,3	9,9
4	0,77	2,4	3,2	5,8
5	0,74	2,1	2,8	4,6
6	0,73	2,0	2,6	4,0
7	0,72	1,9	2,4	3,7
8	0,71	1,9	2,4	3,5
9	0,71	1,9	2,3	3,4
10	0,70	1,8	2,3	3,3

Зауваження.

З попередніх міркувань слідує важливий практичний висновок про необхідну кількість вимірювань: Якщо відомо, що випадкова похибка менше похибки приладу, то в цьому випадку вимірювання достатньо провести один раз.

3.3 Порядок розрахунку похибок при прямих вимірюваннях

1. Виконати декілька вимірів фізичної величини. Результати занести в таблицю.
2. Обчислити середнє арифметичне значення

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}. \tag{8}$$

3. Обчислити випадкову складову похибки

$$\Delta x_{вип} = t_{pn} \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{n\,(n-1)}}, \tag{9}$$

де t_{pn} – коефіцієнт Стьюдента.

4. Обчислити похибку приладу (інструментальну похибку)

$$\Delta x_{пр} = \frac{2}{3}\delta_{\max}, \tag{10}$$

де $\delta_{\max}$ – максимальне значення похибки приладу.

5. Обчислити похибку відліку (округлення)

$$\Delta x_{відл} = p\frac{H}{2}, \tag{11}$$

де H – інтервал округлення.

6. Визначити повну абсолютну похибку прямого виміру

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{вип}^2 + \Delta x_{пр}^2 + \Delta x_{відл}^2}. \tag{12}$$

Якщо, одна зі складових похибки в три (або більше) рази менша іншої, то такою складовою можна знехтувати.

3.4 Приклад обробки результатів прямого вимірювання

Вимірювання довжини зразка стальною лінійкою дали такі результати: 50, 51, 50, 51, 50 мм. Для спрощення розрахунків обробку результатів проведемо в міліметрах, а потім результат переведемо в систему СІ.

В лабораторній практиці прийнято проводити розрахунки для довірчої ймовірності 0,95. Коефіцієнт Стьюдента для довірчої ймовірності 0,95 у випадку п'яти вимірів дорівнює 2,8.

1. Випадкова похибка розраховується за формулою (2)

Табл. 2

№	x	$\bar{x}$	Δx	Δx^2	t_{pn}	$\Delta x_{вип}$
1	50	50,4	-0,4	0,16	2,8	0,69
2	51		0,6	0,36		
3	50		-0,4	0,16		
4	51		0,6	0,36		
5	50		-0,4	0,16		

2. Приладова похибка. Максимальне значення похибки приладу $\delta_{\max}$ для лінійки дорівнює половині найменшої поділки: 0,5 мм. Тоді

$$\Delta x_{пр} = \frac{2}{3} 0{,}5 = 0{,}33\ мм.$$

3. Похибка відліку для лінійки дорівнює найменшій поділці: 1 мм.

$$\Delta x_{відл} = 0{,}95 \frac{1}{2} = 0{,}48\ мм$$

4. Похибка прямого виміру довжини зразка

$$\Delta x = \sqrt{0{,}69^2_{вип} + 0{,}33^2_{пр} + 0{,}48^2_{відл}} = 0{,}9\ мм.$$

5. Відносна похибка $\varepsilon = \frac{0{,}9}{50{,}4} 100\% = 1{,}8\%$.

6. Результат вимірювання прийнято представляти у вигляді:

$$x = (50{,}4 \pm 0{,}9) \cdot 10^{-3}\ м, \quad \text{при } p = 0{,}95,\ \varepsilon = 1{,}8\%.$$

3.5 Порядок розрахунку похибок при непрямих вимірюваннях

Якщо результат непрямих вимірювань виражається формулою зручною для логарифмування, то в цьому випадку доцільно застосувати метод логарифмічного диференціювання.

Нехай шукана величина x дорівнює $x = a \cdot b$. Проводимо декілька прямих вимірів величин a і b. Знаходимо величину x. Заносимо результати вимірювань в таблицю. Проводимо обробку результатів за формулами (1-5) окремо для a і b. Одержимо значення $\bar{a}$, Δa, $\bar{b}$, Δb, x.

Відносна похибка непрямого вимірювання величини x знаходиться за формулою

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2} \cdot 100\%. \qquad (13)$$

Абсолютну похибку знаходимо за формулою

$$\Delta x = \bar{x} \frac{\varepsilon}{100\%}. \qquad (14)$$

3.6 Приклад обробки результатів непрямого вимірювання

Для знаходження прискорення вільного падіння з формули $h = \frac{gt^2}{2}$ вимірювали час падіння тіла з певної висоти. Висоту вимірювали рулеткою з сантиметровими поділками, час – механічним секундоміром з поділками 0,2 $с$. Вимірювання дали такі результати: висота h: 12,56, 12,55, 12,57, 12,55, 12,57 $м$; час падіння: 1,6, 1,58, 1,6, 1,62, 1,6 $с$. Прискорення знаходили за формулою $g = \frac{2h}{t^2}$.

Занесемо результати вимірювань в таблицю:

Табл. 3

№	h, $м$	t, $с$	Відхилення від середнього	
			Δh, $м$	Δt, $с$
1	12,56	1,60	0,00	0,00
2	12,55	1,58	-0,01	-0,02
3	12,57	1,60	0,01	0,00
4	12,55	1,62	-0,01	0,02
5	12,57	1,60	0,01	0,00
	Середні значення		Середньоквадратичні відхилення	
	$\bar{h}$, $м$	$\bar{t}$, $с$	S_h	S_t
	12,560	1,600	0,004472	0,006325

Результати прямих вимірювань висоти і часу:

Табл. 4

Величина	Інструментальна похибка	Похибка відліку	Випадкова похибка	Загальна похибка прямих ви-
h, $м$	0,0033	0,0047	0,012	0,0138

t, c	0,0666	0,0950	0,017	0,1160

Похибка непрямих вимірювань прискорення:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta t}{t}\right)^2} \qquad \varepsilon = 0{,}145$$

$$\Delta g = \varepsilon \cdot g \qquad \Delta g = 1{,}42$$

$$x = (9{,}81 \pm 1{,}42)\ м/c^2, \qquad \text{при}\ p = 0{,}95,\ \varepsilon = 14{,}5\%.$$

Тема 4. Апроксимація, інтерполяція, екстраполяція

4.1 Апроксимація

До задач експериментальної фізики відноситься не тільки вимірювання постійних величин, але и дослідження залежності між різноманітними фізичними характеристиками. Такі дослідження називають динамічними.

Більшість законів фізики, в тому числі і фундаментальних, формулюються у вигляді рівнянь, які пов’язують між собою фізичні величини. Розглянемо випадок, коли згідно теорії дві фізичні величини пов’язані деякою функцією

$$y = f(x). \tag{15}$$

Зауважимо, якщо повністю відсутня теоретична інформація про функціональну залежність, то експериментальних даних може бути недостатньо для отримання правильного вигляду функції. Фізична теорія часто дозволяє зробити певні твердження про характер залежності між x та y, або встановити вигляд функції (15). Часто ця функція містить один або декілька постійних параметрів

$$y = f(x, a, b, c, ...). \tag{16}$$

Для встановлення конкретного вигляду функції, як правило, треба проводити вимірювання значень залежної змінної y при різних значеннях аргументу x. Результати досліду завжди мають випадкові похибки. Тому ніколи не вдається підібрати параметри $a, b, c, ...$ так, щоб задана функція (16) задовольняла усім експериментальним даним. Інакше кажучи, ніяким підбором параметрів $a, b, c, ...$ неможна добитися щоб графік функції проходив через усі експериментальні точки. Важливим етапом роботи фізика-експериментатора є пошук значень параметрів $a, b, c, ...$, при яких графік функції проходить до експериментальних точок найближче. Ця математична процедура називається апроксимація результатів експерименту функцією заданого типу.

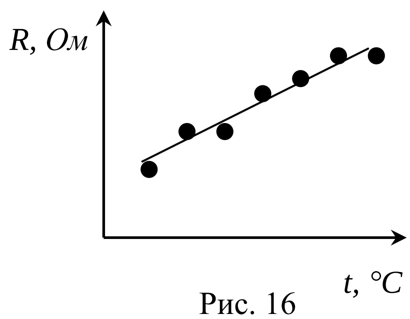


Рис. 16

Апроксимація (лат. *approximare* наближати) – наближене вираження одних математичних об’єктів іншими, простішими, напр. кривих ліній – ламаними, ірраціональних чисел – раціональними, неперервних функцій – многочленами.

Задача апроксимації має декілька варіантів:
а) відома теоретична інформація про вигляд функції, треба знайти параметри у формулі;

Приклад: Результати вимірювання опору провідника в залежності від температури $R = R_0(1+\alpha t)$ приведені на рис. 16. Знайти температурний коефіцієнт опору α. Для цього треба провести пряму так, щоб вона пройшла найближче до всіх експериментальних точок.
б) теоретична інформація про функціональну залежність не відома, потрібно встановити вигляд функції або фізичного закону;

В цьому випадку, експериментальних досліджень (за рахунок похибок) може бути не достатньо для отримання задовільного наближення шуканої функції. Проведенню експериментальних досліджень повинен передувати теоретичний аналіз, а експеримент проводиться з метою підтвердження теорії. Таким чином, ми повертаємось до пункту а). Іноді проведення попередніх експериментальних досліджень допомагає в розробці теорії.
в) теоретична інформація про функціональну залежність не відома і не потрібна, але для практичних розрахунків треба мати емпіричну формулу.

Приклад: Для залежності ЕРС термопари від температури ще не створено відповідної теорії, яка б правильно описувала цю залежність. Для практичного використання зручно мати не тільки таблиці, а і емпіричну формулу, за допомогою якої можна розрахувати ЕРС при даній температурі.

4.2 Інтерполяція

Багатьом із тих, хто стикається з науковими та інженерними розрахунками часто доводиться оперувати наборами значень, отриманих експериментальним шляхом чи методом випадкової вибірки. Як правило, на підставі цих наборів потрібно побудувати функцію (формулу), зі значеннями якої могли б з високою точністю збігатися інші отримувані значення. За допомогою такої функції можна знаходити проміжні значення досліджуваної залежності.

Інтерполяція (лат. *interpolatio* зміна, переробка) – в обчислювальній математиці спосіб знаходження проміжних значень величини за наявним дискретним набором відомих значень.

Наведемо декілька прикладів інтерполяції експериментальних даних.

Для дослідження фізичних явищ за допомогою математичного апарату користуються різними функціями, які можна задавати різними способами. Так, функціональна залежність між фізичними величинами може бути задана аналітичним виразом, за допомогою якого можна обчислити значення функцій для конкретних значень аргументів. Часто вид аналітичного виразу буває складним, а обчислення за його допомогою громіздкі. Якщо деяка функція занадто складна для продуктивних обчислень, можна спробувати обчислити її значення в декількох точках, а між ними побудувати, тобто інтерполювати, простішою функцією. Зрозуміло, використання спрощеної функції не дозволяє одержати такі ж точні результати, які давала б справжня функція. Але, для деяких класів задач, досягнутий виграш у простоті і швидкості обчислень може переважити отриманий огріх у результатах.

Іноді функціональна залежність виражається за допомогою нескінченного ряду. Обчислення значень такої функції обумовлені деякими труднощами. Треба встановити збіжність ряду та знайти оцінку точності результату, оскільки при обчисленнях обмежуються деякою кількістю членів ряду.

Функціональна залежність також може бути виражена за допомогою невизначеного інтеграла або диференціальним рівнянням. Інтеграли та розв’язки диференціальних рівнянь також можуть виявитись громіздкими і малопридатними для обчислення значень функцій для будь-яких значень аргументів.

Якщо функція часто зустрічається в різних фізичних задачах, а обчислення її значень громіздкі, то складають таблиці її значень для певних значень аргументів. Таблиці також складають при проведенні фізичних експериментів, в яких вивчають залежність між фізичними величинами. Отже, у наведених та в ряді інших випадків виникає потреба складати таблиці функцій. До таблиці заносять значення функцій тільки для деяких значень аргументів. Табличні значення функцій і аргументів називають вузлами таблиці.

Якщо функціональна залежність невідома або аналітичний вираз її складний і малопридатний для обчислень, то в такому разі треба знайти таку найпростішу неперервну монотонну функцію $y = f(x)$, яка для вузлових значень аргументу $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ має відповідні значення $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n)$, а в проміжних точках, наближено передає експериментальну залежність.

Завдання побудови такої функції називаються задачею інтерполяції в широкому розумінні слова, функцію ж $y = f(x)$ називають інтерполюючою функцією. Більш вужчим завданням інтерполяції є знаходження значень функції для значень аргументів x, які лежать між вузлами таблиці. Такі обчислення проводять за допомогою інтерполюючої функції $y = f(x)$. Інтерполяцію можна здійснити також графічно.

На координатній сітці наносять точки, які відповідають вузловим точкам таблиці x_i та y_i, і через них проводять інтерполюючу криву. Цю криву приймають як наближений графік функції, за допомогою якого і проводять інтерполяцію. Точність графічного способу інтерполяції залежить від характеру залежності $y = f(x)$ і точності побудови графіків.

Інтерполюючу функцію $y = f(x)$ дуже часто шукають у вигляді многочлена. Користуватись многочленами зручно не тільки тому, що вони становлять собою прості функції, а й тому, що невідому функцію легко апроксимувати многочленами з будь-якою точністю. Крім того, інтерполювання за допомогою многочленів спрощує задачі дискретного диференціювання та інтегрування функцій.

Перш ніж перейти до розгляду конкретних методів інтерполяції, з'ясуємо, для яких умов він буде єдиним і якою мірою задовольнятиме умову точкової інтерполяції. Відповідь на це питання дає наведена без доведення теорема: якщо всі табличні значення аргументів різні, то інтерполяційний поліном, який задовольняє умову точкової інтерполяції, існує і є єдиним.

Значення функцій у таблицях можуть бути як для рівновіддалених значень аргументів із сталим кроком, так і для не рівновіддалених значень аргументів.

Табл. 5

x	**y**
1	2
2	5
3	10
4	17
5	26

Приклад: В таблиці 5 наведено результати деякого експериментального дослідження. Якщо нам потрібні значення y в проміжках рядків таблиці ($x = 1{,}2;\ 1{,}3;\ 1{,}4\ ...$), то приходиться використовувати інтерполяцію.

При цьому:

x_i – називають вузлами інтерполяції, а їх сукупність інтерполяційною сіткою;

пари (x_i, y_i) називають точками даних чи базовими точками;

різницю між «сусідніми» значеннями $x_i - x_{i-1}$ кроком інтерполяційної сітки;

функцію $F(x)$ – функцією, що інтерполює або інтерполянтом.

Існує багато різних способів інтерполяції. Вибір найбільш придатного алгоритму залежить від відповідей на питання: наскільки точний обраний метод, які затрати на його використання, наскільки гладкою є інтерполяційна функція, яку кількість точок даних вона вимагає і т.д.

Існують методи інтерполяції, які дозволяють здійснювати її не будуючи графік експериментальної залежності. Але в експериментальній фізиці графіки відіграють велику роль, тому зазвичай інтерполяцію поєднують з апроксимацією. З початку знаходять функцію, яка найкраще описує експериментальну залежність, далі розраховують значення функції для потрібних значень аргументу.

4.3 Екстраполяція

Екстраполяція (лат. *extra* поза, зовні, *polire* пригладжую, виправляю) – наближене знаходження за рядом даних значень функції інших її значень, що містяться поза цим рядом.

Методи екстраполяції в багатьох випадках подібні до методів інтерполяції. Для лінійної залежності екстраполяція – тривіальна задача. Коли залежність нелінійна використовувати екстраполяцію треба дуже обережно тому, що це може привести до великих похибок.

Табл. 6

x	y
86	14,3
87	19,1
88	28,6
89	57,2
90	?

Приклад: В таблиці 6 наведено деяку залежність $y = f(x)$. Яке значення функції буде для останнього аргументу? Давлячись на таблицю можна припустити, що y_5 приблизно дорівнює 100-150. Правильна відповідь вражає, бо вона несподівано велика $y_5 = \infty$. Ви здогадались, яку функцію використано в прикладі?

Як бачимо, взагалі екстраполяція некоректна операція. В цьому прикладі крок аргументу на одиницю збільшує функцію до нескінченості. Таких прикладів можна навести багато.

4.4 Метод найменших квадратів

Розглянемо апроксимацію деякої експериментально отриманої залежності $y = f(x, a_1, a_2, ..., a_k)$. В результаті вимірювань ми найчастіше маємо таблицю значень

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k
Y	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_k

Нехай з теорії нам відома формула, яка описує досліджувану залежність $y = f(x, a_1, a_2, ..., a_k)$. З експерименту треба знайти параметри $a_1, a_2, ..., a_k$. Практично ніколи не вдається підібрати чисельні значення параметрів $a_1, a_2, ..., a_k$ так, щоб функція заданого вигляду задовольняла всім експериментальним результатам. Інакше кажучи, ніяким підбором параметрів $a_1, a_2, ..., a_k$ не можна добитися щоб графік функції проходив через всі експериментальні точки. Справа в тому, що величини y_i, отримані в результаті експерименту, несуть в собі елемент випадковості, обумовлений похибками вимірювань.

Наприклад, досліджувана залежність описується законом $y = ax^2 + bx + c$ (поліном другого ступеня). Точки з випадковими похибками зображені на рис. 17. Треба провести параболу, що якнайближче проходить до експериментальних точок.

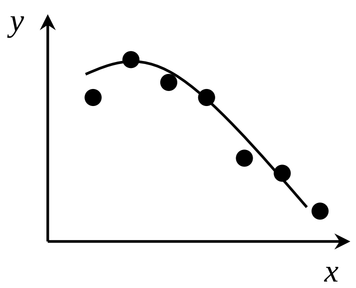


Рис. 17

В процесі апроксимації експериментальних залежностей виникає питання вибору критерію якості отриманого наближення функції $y = f(x, a_1, a_2, ..., a_k)$. Існують різні точки зору на то, яке наближення вважати «найкращим». Одним з найпоширеніших методів розрахунку невідомих параметрів функції на основі результатів дослідів є метод найменших квадратів.

Метод оцінювання параметрів апроксимуючої функції шляхом мінімізації суми квадратів відхилень шуканої функції від експериментальних точок називається методом найменших квадратів (МНК) або Least Squares Method (LS).

Метод найменших квадратів використовують також для наближеного представлення заданої функції іншими (більш простими) функціями.

Нині МНК є одним з найважливіших розділів математичної статистики і широко використовується для статистичних виводів в різних галузях науки і техніки.

Суть обґрунтування МНК (по Гаусу) полягає в допущенні, що «збиток» від заміни точного (невідомого) значення фізичної величини x її наближеним значенням X, обчисленим за результатами спостережень, пропорційний квадрату помилки $(X-m)^2$. У цих умовах оптимальною оцінкою природно визнати таку позбавлену систематичної помилки величину X, для якої середнє значення «збитку» мінімальне. Саме це вимога і складає основу МНК. У загальному випадку відшукання оптимальної в сенсі МНК оцінки X – завдання вельми складне, тому практично це завдання звужують і як X вибирають лінійну функцію від результатів спостережень, позбавлену систематичної помилки, і таку, для якої середнє значення «збитку» мінімальне в класі всіх лінійних функцій. Якщо випадкові помилки спостережень підкоряються нормальному розподілу і оцінювана величина m залежить від середніх значень результатів спостережень лінійно, те рішення цієї задачі одночасно буде і рішенням загальної задачі. При цьому оптимальна оцінка X також підкоряється нормальному розподілу з середнім значенням m і, отже, густина вірогідності випадкової величини X при $x = X$ досягає максимуму в точці $m = X$ (це властивість і виражає точний вміст поширеного в теорії помилок твердження «оцінка X, обчислена згідно МНК, – найбільш вірогідне значення невідомого параметра m»).

Лінійна апроксимація

Розглянемо знаходження коефіцієнтів лінійної функції методом найменших квадратів. Будемо вважати, що між x і y існує лінійна залежність $y = ax + b$. Відстань від i-тої точки, до прямої $ax_i + b - y_i$ (рис. 18). Пряма буде проведена найкращим чином, якщо сума квадратів усіх відстаней $ax_i + b - y_i$ матиме найменше
значення. Для знаходження коефіцієнтів a і b треба мінімізувати суму $\sum_1^n (ax_i + b - y_i)^2$.

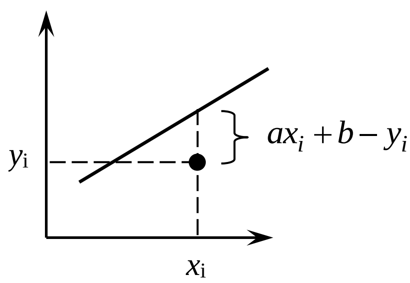


Рис. 18

Прирівняємо до нуля похідні

$$\frac{d}{da}\left(\sum(ax_i + b - y_i)^2\right) = 0,$$
$$\frac{d}{db}\left(\sum(ax_i + b - y_i)^2\right) = 0.$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \tag{17}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{18}$$

де:

n – кількість експериментальних вимірів (точок),

x_i, y_i – абсциса та ордината i-тої експериментальної точки.

Для спрощення вигляду формул (17) та (18) в них опущені межі суми. Всі суми в межах від одиниці до n.

Для лінійної залежності задача знаходження параметрів a і b розв'язана аналітично. Її розв'язок в скороченому вигляді наведено вище. Ця задача – окремий випадок широкого класу задач апроксимації кривими. Деякі з них можуть бути розв'язані методом описаним вище.

Нелінійна апроксимація

<u>Апроксимація поліномом.</u>

Поліномом називають вираз

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ... + mx^n.$$

Якщо результати вимірювань y_i підкоряються нормальному закону, то задача знаходження виразів для a, b, c, … аналітично може бути розв'язана. Але система рівнянь стає дуже громіздкою, яку розв'язати практично стає дуже важко або неможливо. В цих випадках використовують чисельні методи.

<u>Апроксимація експоненціальними функціями.</u>

Одна з важливих функцій у фізиці – експоненціальна $y = ae^{bx}$. Пряме використання методу найменших квадратів приводить до таких рівнянь, які не мають простого розв'язку. Наведене рівняння можна привести до лінійного, якщо взяти логарифми від обох частин $\ln y = \ln a + bx$. Хоча y нелінійно залежить від x, але $\ln y$ залежить від x лінійно.

Апроксимація гіперболічними функціями

Якщо експериментальна залежність описується формулою $y = \frac{k}{x} + l$, то позначаючи $\frac{1}{x} = z$, отримаємо нову лінійну функцію $y = kz + l$, до якої можна застосувати МНК для лінійних функцій.

Приклад. Результати вимірювання залежності показника заломлення водню від довжини хвилі наведені в таблиці 7, а графік залежності на рис. 19.

Табл. 7

λ, нм	$(n-1)\cdot 10^7$
546,23	1396,50
407,90	1426,32
334,24	1461,33
289,45	1498,59
253,56	1546,90
230,29	1594,18
193,58	1718,24
185,46	1759,26

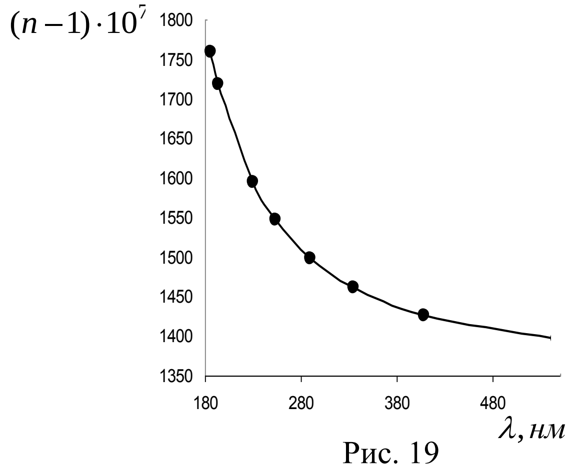


Рис. 19

Відомо, що ця залежність описується формулою Коші

$n - 1 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \ldots$. Обмежимося двома членами ряду $n - 1 = A + \frac{B}{\lambda^2}$ і введемо позначення $x = 1/\lambda^2$, тоді рівняння має вигляд $n - 1 = A + Bx$. В таблиці 8 наведені значення для нової лінійної залежності, а на рис. 20 відповідний графік.

Табл. 8

$(1/\lambda^2)\cdot 10^6$, нм	$(n-1)\cdot 10^7$
3,3516	1396,50
6,0102	1426,32
8,9512	1461,33
11,936	1498,59
15,554	1546,90
18,856	1594,18
26,686	1718,24
29,074	1759,26

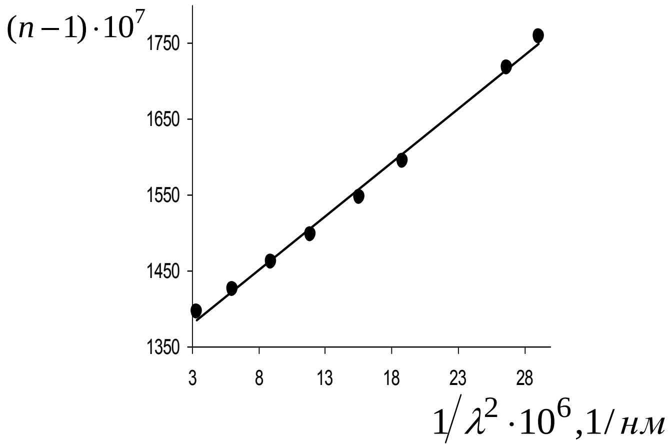


Рис. 20

До такої залежності можна застосовувати МНК для лінійних функцій.

Зауваження

1. Випадкові похибки вимірювань повинні бути розподілені за нормальним законом.

2. При складанні рівнянь за МНК ми вважали, що похибки мають тільки величини y_i, а величини x_i відомі точно. Якщо це не так, то слід шукати інтерполюючу функцію таким чином, щоб сума квадратів відстаней від точок $x_i y_i$ до шуканої кривої була найменшою (рис. 21).

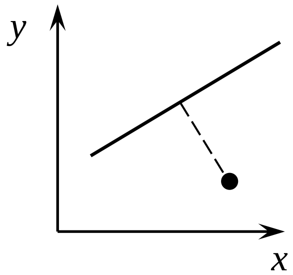


Рис. 21

3. Слід підкреслити, що спосіб найменших квадратів не може дати відповідь на питання про те, якого виду функція краще апроксимує дані експериментальні точки. Вид інтерполюючої функції повинен бути заданий з фізичних міркувань. Метод найменших квадратів дозволяє тільки вибрати, яка з прямих, експонент або парабол є кращою прямою, експонентою або параболою.

4. При апроксимації експериментальних даних слід пам'ятати, що число експериментальних точок повинно бути не менше числа коефіцієнтів, які треба визначити.

5. Будь-яку, навіть дуже складну залежність, можна апроксимувати поліномами. Найчастіше використовуються лінійна функція або поліном другого порядку. Використання поліномів більш високих степенів, як правило, не має фізичного змісту. Їх використання виправдано коли нас не цікавить фізичний зміст, а потрібно використання таблиць замінити формулою для спрощення інтерполяції.

6. Для того, щоб інтерполяція дала довільні результати необхідна впевненість, що досліджувана залежність описується функцією, яка не має особливих точок, розривів та дуже великих значень другої та третьої похідних. Інакше кажучи крива повинна бути достатньо гладкою. При вимірюваннях точки слід рівномірно розташовувати по всій досліджуваній області. Там де функція швидко змінює своє значення точки слід розташовувати густіше.

7. Застосовувати МНК до функцій, які швидко змінюються слід дуже обережно. На рис. 22 показана залежність, яка має один гострий максимум. Поблизу максимуму знято тільки дві експериментальні точки. Апроксимуюча крива може пройти як показано пунктиром, абсолютно не відображаючи істину залежність поблизу максимуму. Цей приклад показує, як обережно треба підбирати апроксимуючи функції.

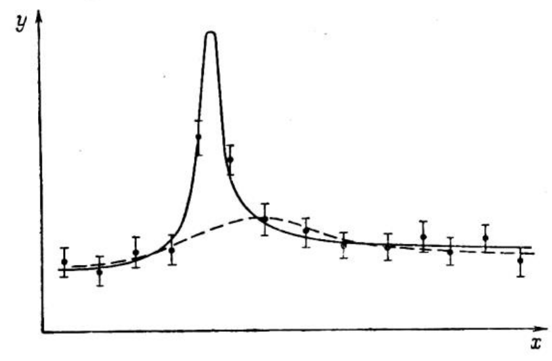


Рис. 22

8. Використання МНК пов'язано з громіздкими розрахунками. Тому використання сучасної обчислювальної техніки слід вважати обов'язковим.

Тема 5. Програмне забезпечення для ОРВ

Використання сучасного програмного забезпечення для ПК значно полегшує побудову графіків та обробку експериментальних даних, підвищує точність та продуктивність роботи. Розглянемо дві програми Microsoft Excel та Origin. Кожна з цих програм має свої позитивні риси та певні недоліки. Крім того кожна програма має декілька версій. Нижче буде розглянуто роботу з програмами Microsoft Office Excel 2003 та Origin 6.1. Інші версії незначно відрізняються від вказаних.

5.1 Microsoft Excel

Крім обчислювальних можливостей Microsoft Excel дозволяє будувати діаграми різних типів та графіки. Діаграми є засобом наочного подання даних і полегшують виконання порівнянь, виявлення закономірностей і тенденцій даних. Наприклад, замість аналізу декількох стовпчиків чисел можна, глянувши на діаграму, дізнатися, зменшуються або зростають обсяги продажів або як залежить одна фізична величина від іншої. Microsoft Excel підтримує різні типи діаграм, дозволяючи представити дані у найбільш зрозумілому вигляді. Створюючи діаграму за допомогою «Мастера диаграмм», або використовуючи команду «Тип диаграммы» для зміни існуючої діаграми, можна легко вибрати потрібний тип в списку типів діаграм. Несподівано для користувача, але діаграма з назвою «График» виявляється непридатною для побудови фізичних експериментальних графіків. Для обробки та представлення результатів фізичних вимірювань використовується точкова діаграма. Далі для побудови фізичних графіків ми будемо використовувати саме точкову діаграму.

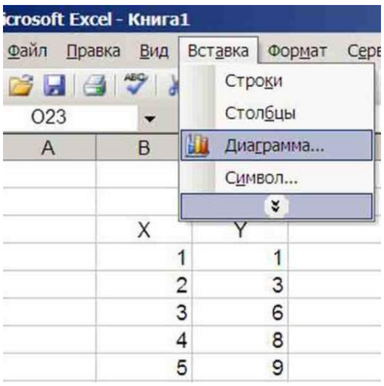


Рис. 23

Для побудови точкової діаграми треба ввести в клітинки листа дані у вигляді вертикальних стовпчиків таблиці (рис. 23). Викликати «Мастер диаграмм»: «Вставка» → «Диаграмма», або натиснувши на значок «Мастер диаграмм» на панелі інструментів. В діалоговому вікні (рис. 24) вибрати «То-

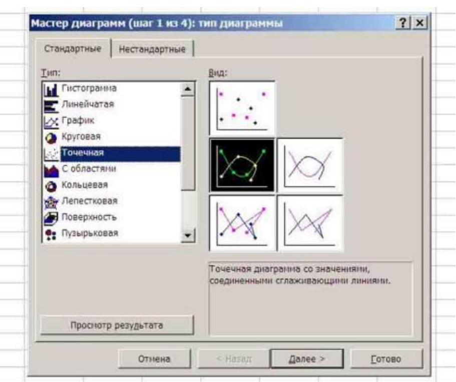


Рис. 24

чечная» зі згладжуючими лініями або без ліній (для задач апроксимації даних треба вибирати діаграму без ліній). Натиснути кнопку «Далее». В наступному діалоговому вікні (рис. 25) вибрати закладку «Ряд» → «Добавить». Натиснути на кнопку «1», виділити ряд значень аргументу, знов натиснути кнопку «1», натиснути на кнопку «2» і виділити ряд значень функції та знов натиснути кнопку «2». Після цього натиснути «Далее» або «Готово».

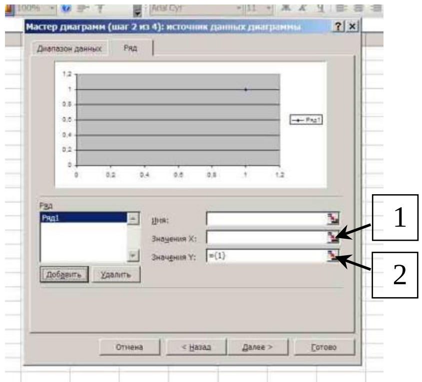


Рис. 25

На отриманій діаграмі натиснути на легенду —●— Ряд 1 та знищіти її клавішею «Delete». Легенда потрібна у випадку побудови в одній системі координат декількох графіків.

Діаграму можна перетягувати на листі натиснувши лівою кнопкою миші. Форматування діаграми найпростіше виконати натиснувши на області побудови (не попадати курсором на лінії) правою кнопкою миші. В контекстному меню можна вибрати пункти:

- «Формат области построения» – форматування рамки та заливка області побудови.
- «Тип диаграммы» – вибирається діаграма з лініями або без ліній.
- «Исходные данные» – дозволяє змінювати діапазон значень x і y.
- «Параметры диаграммы» – можна добавити заголовки, виключати осі, лінії сітки, добавити легенду та підписи даних.
- «Размещение» – дозволяє розмістити діаграму на цьому ж або на окремому листі.
- «Окно диаграммы» – показує діаграму в окремому вікні.
- «Очистить» – очищає форматування області побудови діаграми.

Натиснувши правою кнопкою миші на діаграмі на ряд значень x або y можна провести форматування одної осі.

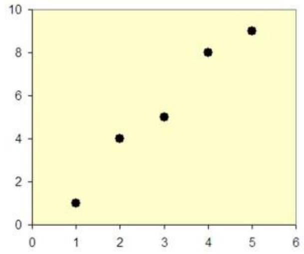


Рис. 26

Для форматування точок діаграми (форма, розмір, колір точки та колір фону) наведіть курсор миші на точку та натисніть праву кнопку. В цьому ж діалоговому вікні можна включати або виключати згладжуючу лінію та проводити її форматування.

Коли діаграма набула вигляду, як показано на рис. 26 можна провести пряму за методом найменших квадратів. В Microsoft Excel ця операція називається «Добавить линию тренда». Для цього натисніть правою кнопкою миші на точку графіка та в контекстному меню виберіть пункт «Добавить линию тренда» (рис. 27). Далі виберіть «Линейная» та в закладці «Параметры» поставте галочку в пункті «Показывать уравнение на диаграмме».

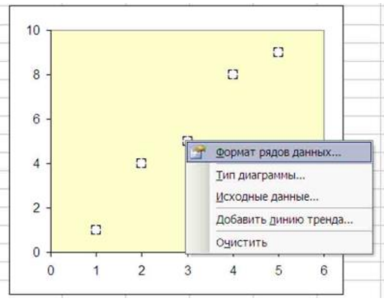


Рис. 27

В результаті цих операцій діаграма повинна набути вигляду як показано на рис. 28.

При запуску Microsoft Excel створює три листа. За контекстним меню, яке викликається правою кнопкою миші листи можна добавляти, видаляти, перейменовувати, переміщувати та копіювати.

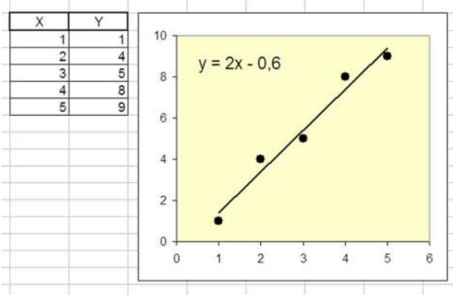


Рис. 28

Перед друком листа з програми Microsoft Excel варто спочатку подивитись, як буде виглядати лист на сторінці формату А4. Для цього виконайте «Файл» → «Предварительный просмотр». Далі для друку натисніть «Печать», для виходу – «Закрыть».

5.2 Origin

Крім поширеного пакета Microsoft Excel, який призначений для розв’язування повсякденних офісних задач, існують спеціалізовані

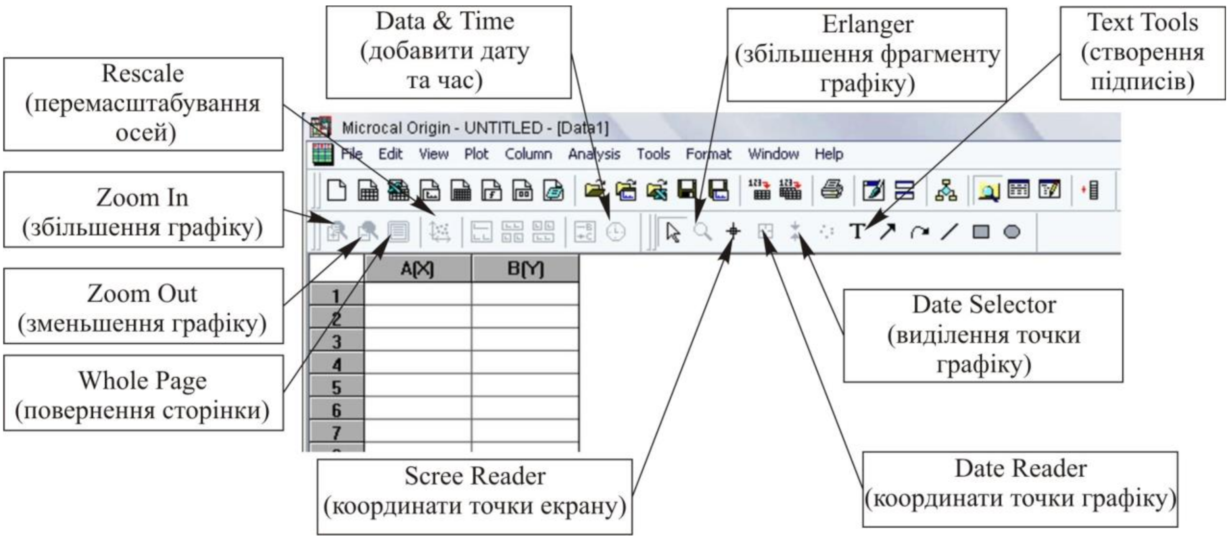


Рис. 29

програми, призначені суто для обробки та візуалізації експериментальних даних. Пакет OriginLab Corporation має більше можливостей і тому широко використовується фізиками в усьому світі. Розглянемо обробку експериментальних даних програмою ORIGIN 6.1.

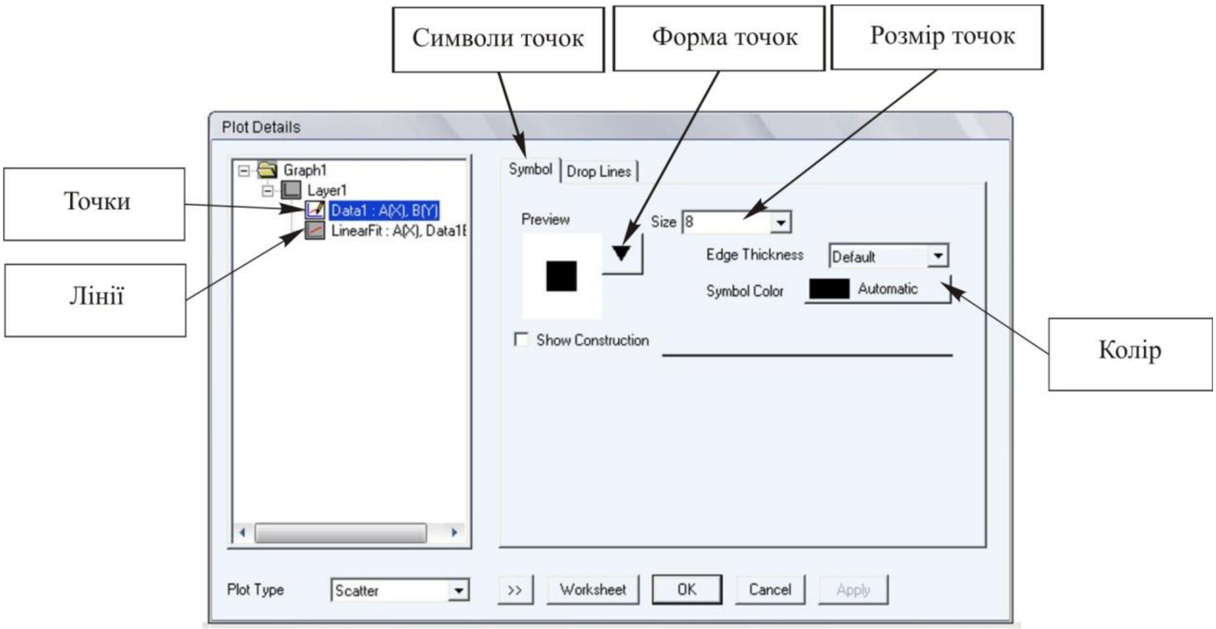


Рис. 30

Запуск. Пакет ORIGIN 6.1 не вимагає установки. Для його запуску достатньо двічі натиснути лівою кнопкою миші файл Origin61.exe

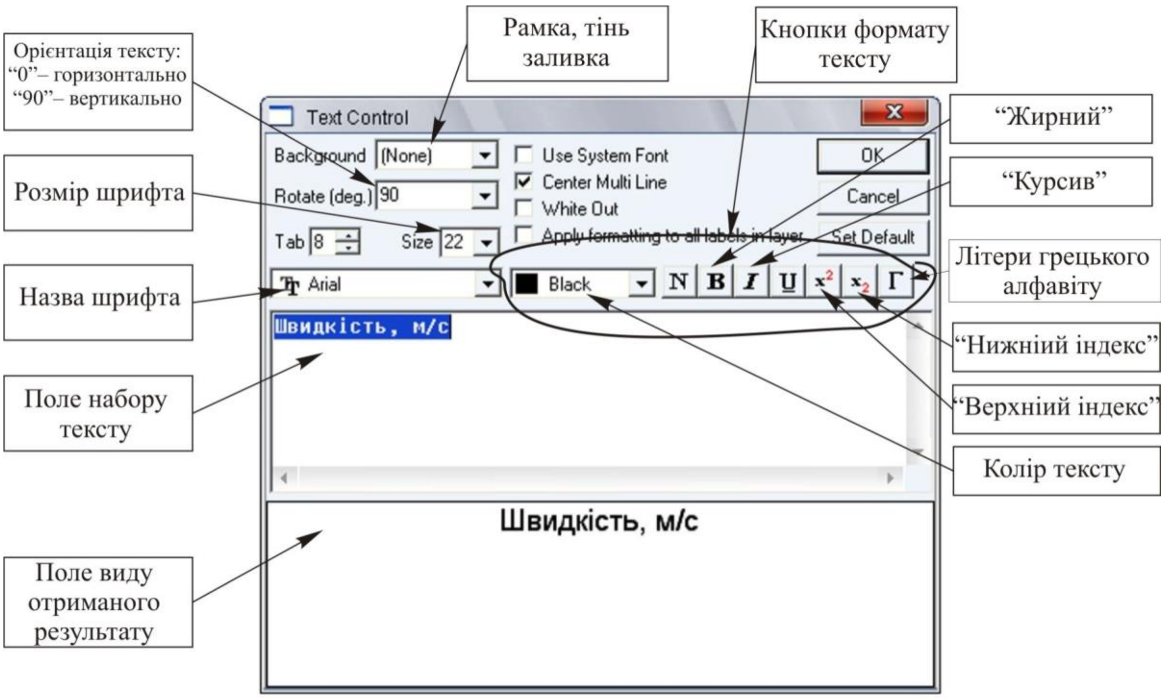


Рис. 31

або двічі натиснути ярлик програми на робочому столі. Після запуску на екрані з’являється панель інструментів та вікно «Data 1» з таблицею для даних. На рис. 29 показані найбільш важливі значки панелі інструментів.

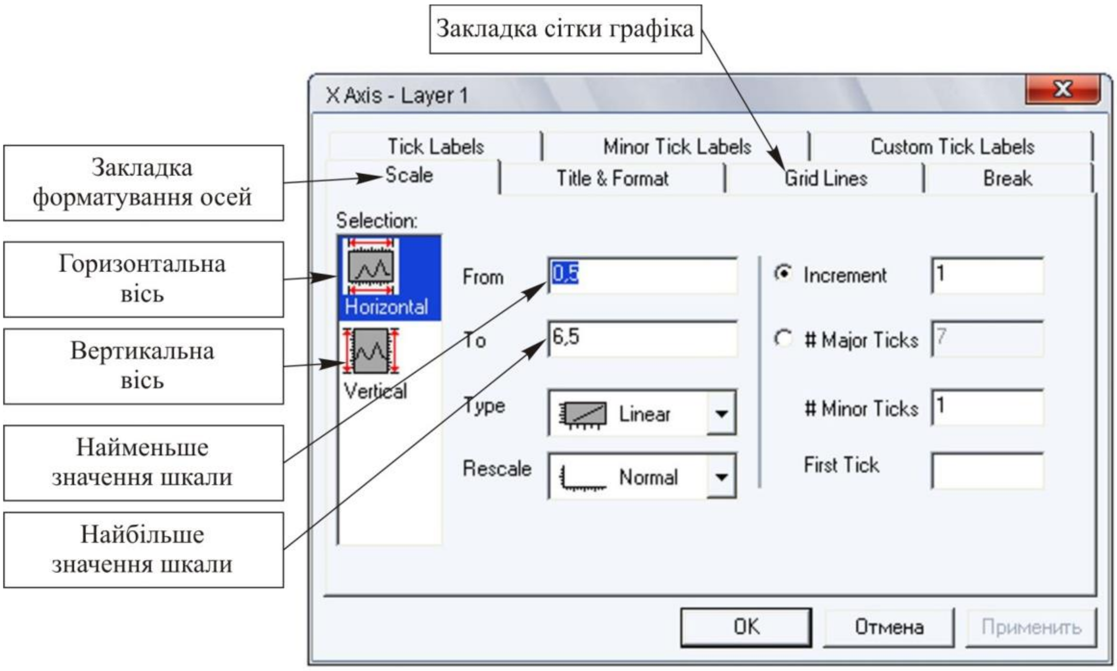


Рис. 32

<u>Введення даних</u>. Заповнити таблицю експериментальними даними і підписати стовпчики. Для цього двічі натиснути лівою кнопкою миші на сірому заголовку стовпчика, в діалоговому вікні «Worksheet Column Format» ввести в поле «Column Name» назву (підтримується російська та українська мова). Ширину стовпчика можна змінити у полі «Column Width».

Якщо двох стовпчиків замало добавити їх можна шляхом: меню «Column» → «Add New Column» або в контекстному меню після натискання правої кнопки миші вибрати «Add New Column».

<u>Побудова графіка</u>. Виділити стовпчики з даними. В меню «Plot» вибрати символ «Scatter»  . На цей символ можна натиснути також внизу зліва на панелі для побудови графіків і діаграм. На екрані з'явиться нове вікно з графіком. Зліва у вікні об'єктів (в ньому відображається назва, тип, дата та ін.) крім назви об'єкту «Data 1» з'явиться назва нового об'єкту «Graph 1». Переходити між об'єктами можна подвійним натисканням лівої кнопки миші. Видалити створений об'єкт (наприклад, графік) можна натиснувши правою кнопкою миші та вибравши «Delete Window».

<u>Форматування</u>. Натиснувши двічі на точку графіка визвати вікно «Plot Details» (параметри точок) рис. 30. В цьому вікні можна вибрати

форму, розмір точок, колір точок та їх заливки. Також можна форматувати лінії графіка, якщо вони є.

Легенду графіка можна змінити викликавши вікно «Text Control» (Управління текстом) двічі натиснувши лівою кнопкою миші текст легенди. У вікні (рис. 31) можна змінювати параметри тексту. Для використання російської або української мови необхідно вибирати шрифти з підтримкою кирилиці (наприклад Arial CYR, Courier New CYR).

Форматування надписів на осях виконується аналогічно форматуванню легенди – подвійним натиском викликаємо діалогове вікно «Text Control».

Для форматування осей натисніть лівою кнопкою миші на осі графіка. В діалоговому вікні «X Axis» або «Y Axis» (рис. 32) на закладці «Scale» можна змінювати розмір вертикальної та горизонтальної шкали.

Закладка «Grid Lines» дозволяє форматувати лінії сітки горизонтальної та вертикальної осей: наявність основних та проміжних ліній, колір та тип ліній. Закладка «Title & Format» дозволяє змінити надписи на осях. Але тут немає можливості вибрати шрифт і тому користу-

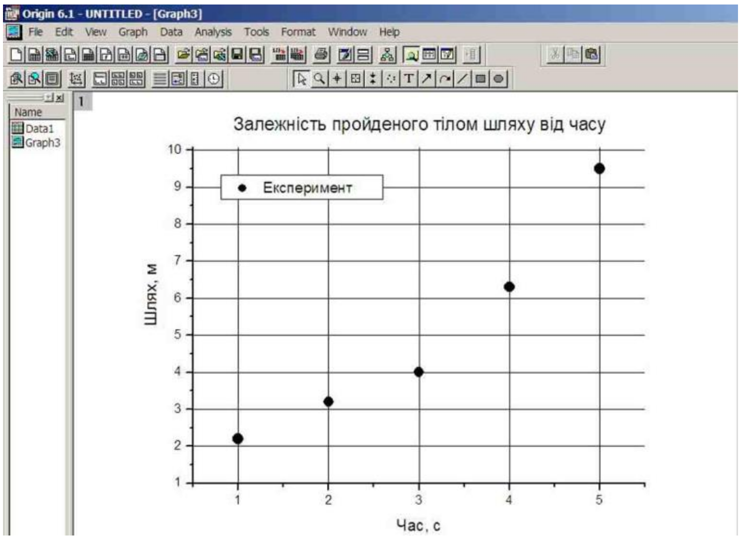


Рис. 33

ватись можна тільки латинськими літерами. Закладка «Break» дозволяє розривати вертикальну або горизонтальну лінію графіка. Це може бути потрібно коли середину графіка можна не розглядати, а цікаві ефекти спостерігаються на початку та в кінці шкали осі.

Коли графік набув вигляду як на рис. 33 форматування закінчено.

Перехід між вікнами даних та графіка відбувається подвійним натисканням лівої кнопки миші на назві у вікні об’єктів.

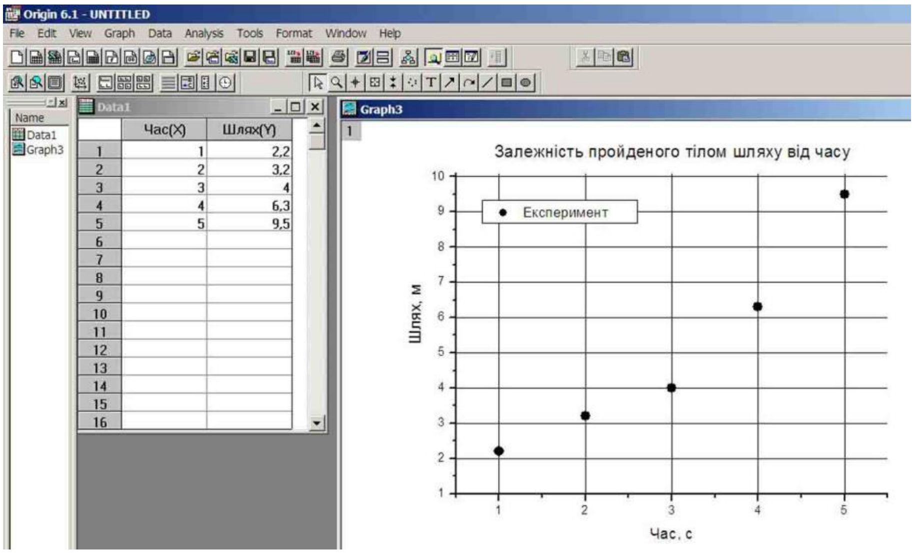


Рис. 34

Якщо вікно графіка звернути, то можна розташувати дані та графік (або декілька графіків) поруч (рис. 34). Це буває корисно для аналізу даних.

<u>Апроксимація</u>. В меню «Analysis» виберіть пункт «Fit Linear» для апроксимації даних лінійною функцією. В нашому прикладі проведе-

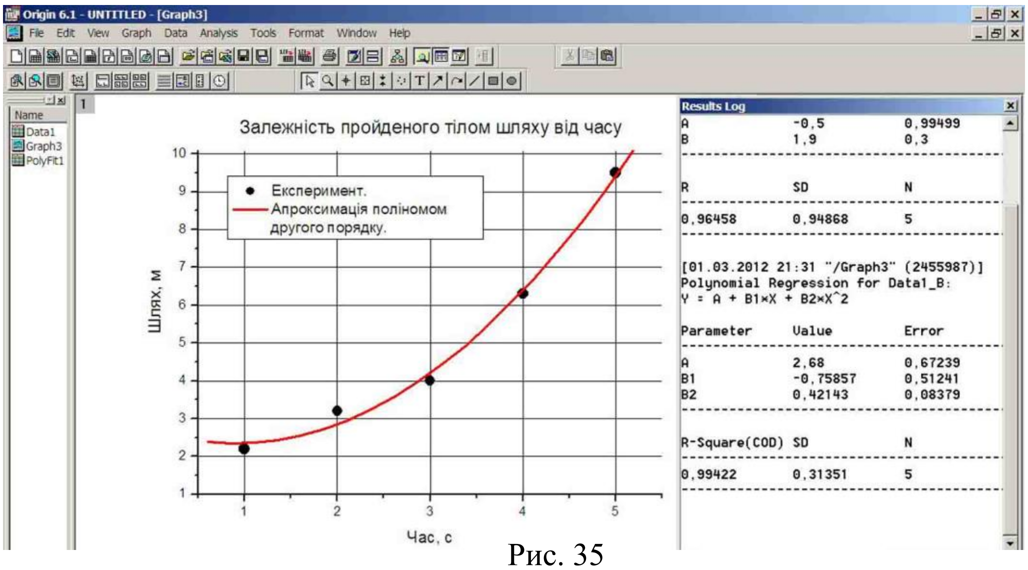


Рис. 35

мо апроксимацію поліномом другого порядку. В меню виберемо «Fit Polynomial» в діалоговому вікні виберемо другий порядок поліному (можна вибирати до дев’ятого порядку). Натиснемо «ОК» і на графіку з’явиться апроксимуюча лінія, в легенді добавиться інформація про лінію, а справа з'явиться вікно «Results Log» – журнал, протокол або вікно результатів.

Текст легенди та апроксимуючу лінію можна форматувати як описано вище. У вікні результатів наведено дата, вид лінії та параметри апроксимуючої лінії, а також похибки параметрів і достовірності результату апроксимації (рис. 35).

Після обробки всіх даних можна сформувати лист звіту. У меню «File» вибрати «New» → «Layout», натиснути «OK». На аркуші, що з'явиться, натиснути правою кнопкою миші, з'явиться меню із зазначенням об'єктів (таблиці, графіки, текст), які можна розташувати на звітному аркуші перетягуванням.

Зберегти отримані результати можна шляхом: «File» → «Save Project As…».

Пакет ORIGIN дозволяє імпортувати дані різних форматів. Джерелом даних може бути файл, записаний у форматі різних наукових

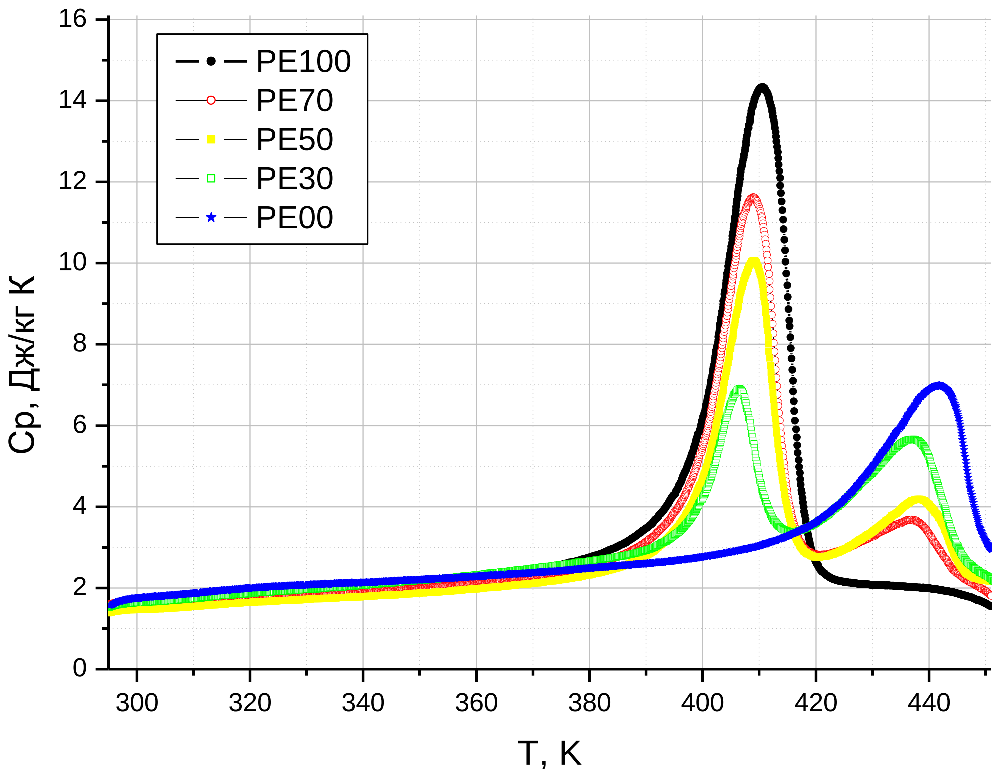


Рис. 36

програм і баз даних. Зокрема, дані можуть бути записані в файл формату ASCII. Після того, як ви запустили програму ORIGIN, і перед вами з'явилася таблиця, в меню «File» вам буде доступна команда «Import» → «Single ASCII» (Імпорт → Одиночний ASCII). У вікні стандартного запиту імені файлу виберіть потрібний і натисніть «Открыть». Повинна з’явитися таблиця з імпортованими даними. ORIGIN автоматично бере ім’я файлу як ім’я таблиці і використовує текст з файлу в якості назв стовпчиків.

Графіки створені в програмі ORIGIN можна вставляти в інші програми, наприклад, в документ «Microsoft Word». Для цього виконайте: «Edit» → «Copy Page» і вставте в графік в документ.

Графічні дані, отримані в ORIGIN, також можна легко перенести або вставити в документи CorelDRAW і PowerPoint, а також перетворити в растрові і векторні графічні формати: BMP, EPS, JPG, PDF, TIFF, WMF і багато інших. На рис. 36 наведено приклад графіка виконаного в програмі ORIGIN.

5.3 Особливості розрахунків у програмі ORIGIN

Зміна даних у листі Data

При побудові графіків змінені дані відображаються на графіку після активації вікна графіка.

Під час розрахунків іноді виникає потреба зміни дані у стовпчиках, як показано в таблицях 1 і 2. У стовпчику C(Y)

Таблиця 1

A(X)	B(Y)	C(Y)
1	1	2
2	2	4
3	3	6
4	4	8
5	5	10

Таблиця 2

A(X)	B(Y)	C(Y)
1	11	12
2	12	14
3	13	16
4	14	18
5	15	20

знаходимо суму A(X) + B(Y). Якщо у стовпчику B(Y) змінюємо дані, то програма Origin, на відміну від програми Excel, автоматично не перераховує значення суми в третьому стовпчику. Треба натиснути на C(Y) правою кнопкою миші, вибрати «Set Column Values» і «ОК».

Збереження і копіювання графіків

Збереження:

проекту File → Save Project As… → Name.opj

вікна File → Save Window As…→ Name.ogg (графік)

File → Save Window As…→ Name.ogw (дані)

графіка File → Export Page → Name.jpg

Name.bmp

Name.wmf

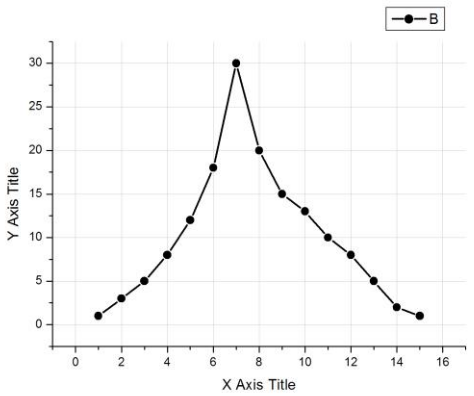
Копіювання графіка у програму Microsoft Word:

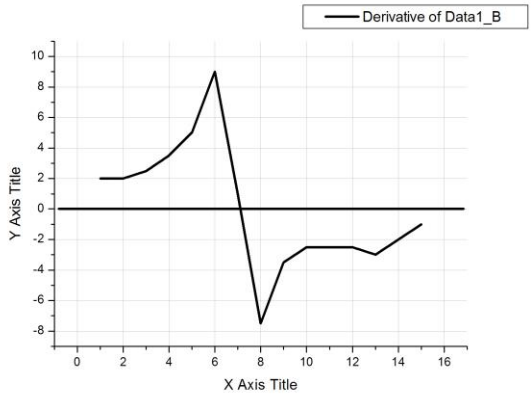
Ctrl C → Ctrl V   зберігається зв'язок з

Edit → Copy Page   програмою Origin.

Диференціювання та інтегрування

а) диференціювання: Analysis → Calculus → Differentiate.





б) інтегрування: Analysis → Calculus → Integrate.

Відображення на графіку похибок

Добавити стовпчик похибок, наприклад, C(Y). Виділивши стовпчик C, вкажіть його роль:

Column → Set As Y Error,

Права кнопка → Set As → Y Error.

Для того, щоб на графіку відобразилися не тільки експериментальні точки, а й похибки, необхідно виділити три колонки (A(X), B(Y), C(YEr) і вибрати тип графіка Scatter або Scatter + Line.

Створення власної функції

Якщо в пакеті Origin потрібна функція відсутня, її можна добавити. Розглянемо нелінійну апроксимацію на прикладі знаходження прискорення вільного падіння тіла. В таблиці 3 наведено результати вимірювання часу і пройденого шляху. Побудуємо точковий графік і створимо власну функцію виду

Таблиця 3

t, c	S, м
1	4,91
3	44,12
5	122,55
7	240,55
9	397,08

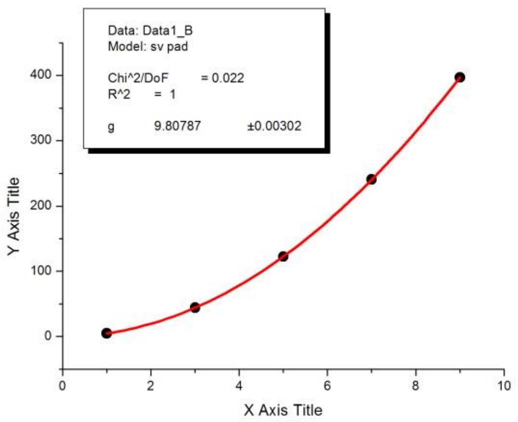
$$S = \frac{gt^2}{2}.$$

Analysis → Non-linear Curve Fit…

Відкриється вікно, в якому виконайте: Function → New.

В полі Name можна ввести назву нашої функції. В полі Number of Parameters вводять кількість параметрів (в нашому випадку параметр один g). В полі Parameter Names можна замість запропонованого P1 ввести g. Для цього поставте галочку у полі User Defined Param. Names. В полі Independent Var та Dependent Var можна ввести літери t і S або залишити запропоновані програмою x і y. В полі Form вибрати Equations і у великому полі набрати необхідну формулу у вигляді y = P1*x^2/2 або у вигляді S = g*t^2/2. Натисніть кнопку Save для запису вашої функції у пакет.

Для проведення апроксимації виконайте: Action → Fit.



У новому вікні натисніть Active Dataset (використовувати активний набір даних). Відкриється вікно Fitting Session. В полі Vary? (змінна?) повинна стояти галочка, а в поле Value (значення) введіть початкове значення параметра (наприклад одиницю). Натискуйте клавішу 1 Iter. або 10 Iter. і спостерігайте як змінюються значення параметра та похибки. Коли значення перестають змінюватися апроксимацію закінчено, натисніть кнопку Done та прочитайте значення параметра (в нашому прикладі це прискорення вільного падіння) та достовірності апроксимації у журналі Results Log. Результати апроксимації виводяться також у вікні на графіку, а точки графіка з’єднує апроксимуюча крива.

Розділ 6. Кореляційний аналіз

6.1 Вступ

Чимало фізичних величин пов’язані певними функціональними залежностями. Наприклад, закон Ома описує лінійну залежність струму в ділянці кола від падіння напруги на цій ділянці. Закон всесвітнього тяжіння стверджує, що сила гравітації пропорційна добутку мас взаємодіючих тіл і обернено пропорційна квадрату відстані між ними. Ці залежності є узагальненням дослідних даних або встановлені методами теоретичної фізики. Фізики завжди прагнуть описати явища і процеси функціональними залежностями.

Функція – математичне поняття, що відображає зв’язок між елементами множин, інакше кажучи, це правило, за яким кожному елементу з першої множини (області визначення) ставиться у відповідність один і тільки один елемент з другої множини (області значень). Наприклад, шлях який пройшов автомобіль при рівномірному русі пов’язаний з часом руху функціональною залежністю $S = vt$.

Але часто на початковому етапі вирішення якої-небудь фізичної проблеми вигляд функціонального зв’язку між певними фізичними величинами є невідомим. Більше того, іноді існують сумніви в наявності такого зв’язку. Деякі фізичні величини можуть бути незалежними.

Дослідження зв’язку між двома величинами X і Y проводиться шляхом вимірювань значень величини Y при різних значеннях величини X. За отриманими результатами робиться висновок про зв’язок або незалежності фізичних величин X і Y. Слід мати на увазі, що будь-який метод вимірювання вносить в результат певну випадкову похибку, а це, в свою чергу, ускладнює однозначний висновок про наявність або відсутність функціональної залежності між даними фізичними величинами.

6.2 Кореляція

При вивченні реальних процесів з’ясовується, що існують фізичні величини, які, з одного боку, явно не пов’язані однозначною функціональною залежністю, але, з іншого боку, вони не є і абсолютно незалежними. Це означає, що при одному і тому ж значенні змінної X в експериментах виходять різні значення змінної Y, причому їх розкид значно перевищує похибку вимірювання Y. У той же час середні значення Y регулярно збільшуються чи зменшуються з ростом X. Подібні величини називаються корельованими, або кажуть, що ці величини X і Y пов'язані між собою статистичною залежністю. Аналіз статистичних зв'язків є в цілому складним завданням і виконується методами математичної статистики.

Статистичними залежностями пов'язані випадкові величини, які зустрічаються майже у всіх областях фізики та інших наук: термодинаміці, квантовій фізиці, механіці, теорії нелінійних коливань. Статистичними залежностями описуються чимало біофізичних процесів, що обумовлено складністю досліджуваних об'єктів. Статистичні залежності можна зустріти в соціології, економіці, педагогіці, спортивних дослідженнях та в інших галузях.

Для оцінки і характеристики статистичних зв'язків розроблено певні поняття і критерії. Розглянемо ці питання докладніше. Статистичні зв'язки, які можуть бути між величинами X і Y, можна звести до трьох різних характерних випадків, які корисно пояснити графічно (рис. 37). У кожному з цих випадків певному значенню X відповідає

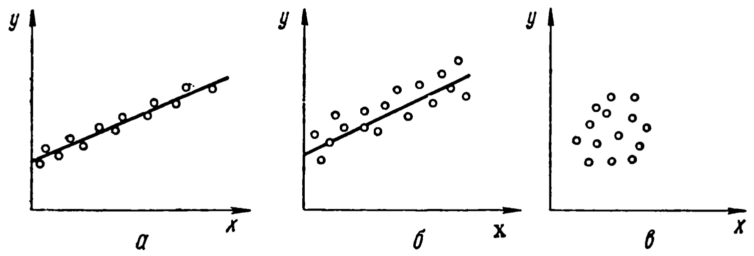


Рис. 37.

множина значень Y. Як видно з рис. 37, найбільш сильний зв'язок між величинами X і Y спостерігається в першому випадку (рис. 37 *а*), у другому він значно менший, а в третьому (рис. 37 *в*) зв'язок відсутній. Отже, у випадку статистичних зв'язків може йти мова про певний ступінь (силу) їх. У розглянутому випадку (рис. 37 *а*) залежність між X і Y має лінійний характер. Ця залежність описується формулою $y = ax + b$. Але це тільки окремий, найбільш простий випадок. Значна кількість, статистичних залежностей має нелінійний (квадратичний, показниковий та ін.) характер, який, зокрема, може бути зведений до більш простих лінійних залежностей.

6.3 Поняття математичної статистики

Якщо зі зміною значення однієї із змінних друга може у певних межах приймати будь-які значення з деякими ймовірностями, але її середнє значення чи інші статистичні характеристики змінюється за певним законом – зв'язок є статистичним. Іншими словами, при статистичному зв'язку різним значенням однієї змінної відповідають різні розподіли значень іншої змінної.

Кореляційним зв'язком називають найважливіший окремий випадок статистичного зв'язку коли різним значенням однієї змінної відповідають різні середні значення іншої. Зі зміною значення ознаки X закономірно змінюється середнє значення ознаки Y; в той час як в кожному окремому випадку значення ознаки Y (з різними ймовірностями) може приймати безліч різних значень.

Статистичний зв'язок між двома ознаками (змінними величинами) передбачає, що кожен з них має випадкову варіацію індивідуальних значень щодо середньої величини. Якщо ж таку варіацію має лише одна з ознак, а значення іншого є жорстко детермінованими, то говорять про регресію, але не про статистичний зв'язок.

Шляхи виникнення кореляційного зв'язку.

1. Причинна залежність результативної ознаки від факторної ознаки. Наприклад, ознака X – родючість ґрунтів, ознака Y – врожайність сільськогосподарської культури.
2. Кореляційний зв'язок між двома наслідками загальної причини. Наприклад, якщо в якості ознаки X взяти число пожежних команд в місті, а за ознаку Y – суму збитків за рік в місті від пожеж, то між ознаками X і Y в містах Росії на початку XX століття була виявлена істотна пряма кореляція.
3. Взаємозв'язок ознак, кожна з яких і причина, і наслідок. Наприклад, кореляція між рівнями продуктивності праці робітників і рівнем оплати праці.

Слово кореляція (*correlation*) складається з приставки «*co-*», яка позначає спільність і кореня «*relation*», перекладається як «відношення» або «зв'язок». Дослівно *correlation* перекладається як взаємозв'язок. Коефіцієнт кореляції – це міра взаємозв'язку досліджуваних явищ. Коефіцієнт кореляції змінюється від -1 до +1. Показники близькі до +1 говорять про те, що при збільшенні значення однієї змінної збільшується значення іншої змінної. Показники близькі до -1 свідчать про зворотний зв'язок, тобто при збільшенні значень однієї змінної, значення другої зменшуються.

Формально, кореляція не означає причинно-наслідкового зв'язку. Це взаємозв'язок, взаємне співпадіння явищ. Іноді кореляція може говорити про причинно- наслідковий зв'язок. Це випадки, коли одна зі змінних об'єктивна, а друга суб'єктивна. До об'єктивних змінних належать фізична величина, яка визначена без похибок, вік, стаж, зріст, які просто не можуть залежати від суб'єктивних змінних: настрою, характеру особистості, мотивації і т.д. Однак, такі об'єктивні величини як вага, кількість дітей у сім'ї, частота зміни місця роботи, кількість контактів і т.п. можуть і часто залежать від суб'єктивних психологічних показників.

Коефіцієнт кореляції є дуже важливим методом математичної статистики в психологічних та педагогічних дослідженнях. Формально простий цей метод дозволяє отримати величезну кількість інформації, але і зробити таку ж величезну кількість помилок. Наприклад, професіоналізм робітника зростає із зростанням стажу роботи. Стаж і професіоналізм корелюють і ми можемо бути впевнені, що для підвищення професіоналізму стаж є об'єктивною причиною. Об'єктивні змінні, що засновані на часі завжди є причиною при наявності кореляції з суб'єктивними характеристиками. В решті випадків треба дуже обережно ставитися до причинно-наслідкових інтерпретацій коефіцієнта кореляції. Якщо причинно-наслідковий зв'язок обґрунтовано теоретичними дослідженнями та підтверджується різними авторами та перевірками, то кореляцію також можна інтерпретувати як причинно-наслідковий зв'язок.

Різноманітні випадки кореляційних залежностей можуть мати різні напрямки. А саме, коли даному ряду значень X відповідають зростаючі значення Y, спостерігають прямий напрямок кореляції; коли даному ряду значень X відповідають спадні значення Y, йдеться про зворотну кореляцію. Отже, кореляція характеризується ступенем (силою), формою та напрямком. Ці характеристики вивчає кореляційний аналіз.

Кореляційний аналіз – це статистичне дослідження залежності між випадковими величинами. У найпростішому випадку досліджують дві вибірки (набори даних), у загальному – їх багатовимірні комплекси.

Мета кореляційного аналізу – виявити чи існує істотна залежність однієї змінної від інших.

Головні завдання кореляційного аналізу:

1. Оцінка за вибірковими даними коефіцієнтів кореляції.
2. Перевірка значущості вибіркових коефіцієнтів кореляції.
3. Оцінка близькості виявленого зв'язку до лінійного.
4. Побудова довірчого інтервалу для коефіцієнтів кореляції.

Розглянемо більш докладно, як оцінюють силу кореляційних залежностей.

Повернемось до рис. 24. Кореляційна залежність $y = ax + b$ називається регресією. Графік цієї залежності називається лінією регресії Y на X. Встановлено, що лінія регресії найкраще відбиватиме кореляційні залежності, якщо вона відповідає умові найменших квадратів, тобто сума квадратів відстаней окремих точок від лінії регресії повинна бути мінімальною.

Для характеристики ступеня і напрямку кореляційного зв'язку вводять поняття коефіцієнта кореляції, який визначається співвідношенням

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\sigma_x \sigma_y},$$

де n – кількість вимірів, σ_x та σ_y – дисперсія величин x та y.

Значимість (надійність) коефіцієнта кореляції розраховують за формулою

$$t_{факт} = \frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}},$$

де $t_{факт}$ – критерій Стьюдента. Якщо $t_{факт} > t_{Стьюдента}$, то коефіцієнт кореляції вважається значимим.

Класифікація кореляційних зв'язків проводиться за величиною r:

сильна	$r > 0{,}7$;
середня	$0{,}5 < r < 0{,}69$;
помірна	$0{,}3 < r < 0{,}49$;
слабка	$0{,}2 < r < 0{,}29$;
дуже слабка	$r < 0{,}19$.

В програмі EXCEL для розрахунку коефіцієнта лінійної кореляції існує спеціальна функція КОРРЕЛ (*массив1, массив2*), де *массив1* – діапазон клітинок зі значеннями першої випадкової величини (першого параметра), *массив2* – діапазон клітинок зі значеннями другого параметра. Для графічного зображення значень величин X і Y та отримання рівняння регресії використовують точкову діаграму та проводять лінію тренда, виводячи на екран рівняння прямої та величину достовірності апроксимації (коефіцієнт детермінації) R^2. Чим більше R^2, тим більшу долю варіації пояснюють змінні, що включені до моделі (для лінійної кореляції модель – пряма лінія). Наприклад, $R^2 = 0{,}76$ – це означає, що рівняння описує 76% загальної дисперсії моделі.

При пошуку кращої регресійної моделі слід керуватися наступними найбільш загальними вимогами:

- регресійна модель повинна пояснювати не менше 80% варіації залежної змінної, тобто $R^2 \geq 0.8$;
- стандартна помилка оцінки залежної змінної по рівнянню повинна складати не більше 5% середнього значення залежної змінної;
- залишки від регресії повинні бути без помітної автокореляції (r <0,30), нормально розподілені і без систематичної складової.

Лабораторні роботи

Лабораторна робота № 1

Побудова графіків у функціональних шкалах

Теоретичні відомості

У фізичних та інших експериментальних дослідженнях отриману інформацію дуже часто представляють у графічному вигляді. Якщо табличні значення можуть вказувати на зміну досліджуваної величини, то графічне зображення досліджуваної залежності наочно вказує на характер залежності і в багатьох випадках може служити для теоретичного аналізу даної залежності. Для графічних зображень експериментальних даних, крім рівномірних шкал, використовують особливі, які називаються шкалами функції або функціональними шкалами.

Логарифмічна система координат

Логарифмічна шкала або логарифмічний масштаб – тип шкали вимірювань, що побудована на основі використання логарифмічного перетворення. Для побудови логарифмічних шкал зазвичай використовуються системи десяткових або натуральних логарифмів, а також система логарифмів з основою два.

У логарифмічній координатній сітці, як відомо, початком координат є точка $x=1, y=1$. Тому при використанні такої сітки з даними x_i, y_i потрібно виконати перетворення так, щоб $x_i \geq 1$ і $y_i \geq 1$. Початок координат у напівлогарифмічній координатній сітці відповідає точці $x=0, y=1$. Тому потрібно зробити перетворення так, щоб $y_i \geq 1$. Перетворення x_i, y_i можна здійснити множенням їх на вибраний множник. Операція логарифмування може застосовуватись до безрозмірних величин, тому перед логарифмування перетворювана розмірна величина на початку перетворюється в безрозмірну шляхом її ділення на прийняте за погодженням довільне (опорне) значен-

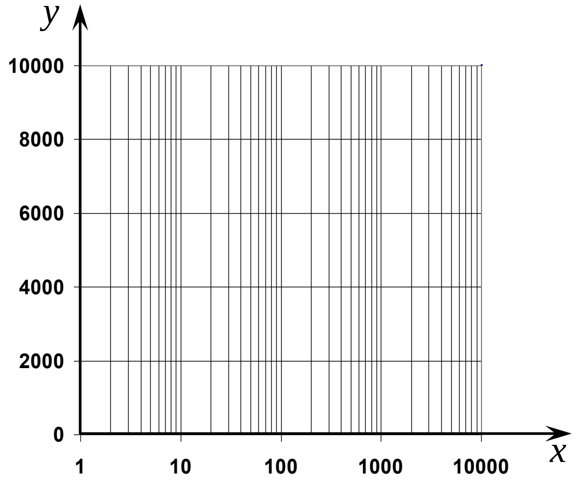


Рис. 1

ня цієї ж величини, після чого виконується операція логарифмування. Логарифмічна шкала є зручною для відображення дуже великих діапазонів значень величин. На рис. 1 зображена напівлогарифмічна система координат. В такий системі вісь x має логарифмічний масштаб, а вісь y – лінійний.

Для побудови логарифмічної шкали користуються правилом: у логарифмічній шкалі довжина відрізка пропорційна логарифму відношення величин відзначених на кінцях цього відрізка, в той час як на шкалі в лінійному масштабі довжина відрізка пропорційна різниці величин на його кінцях.

Полярна система координат

Полярна система координат – двовимірна система координат, в якій кожна точка на площині визначається двома числами – кутом та відстанню. Полярна система координат особливо корисна у випадках, коли відношення між точками найпростіше зобразити у вигляді відстаней та кутів; в декартовій, або прямокутній системі координат, такі відношення можна встановити лише шляхом застосування тригонометричних рівнянь.

Полярна система координат задається променем, який називають нульовим або полярною віссю. Точка, з якої виходить цей промінь називається початком координат або полюсом. Будь-яка інша точка на площині визначається двома полярними координатами: радіальною та кутовою.

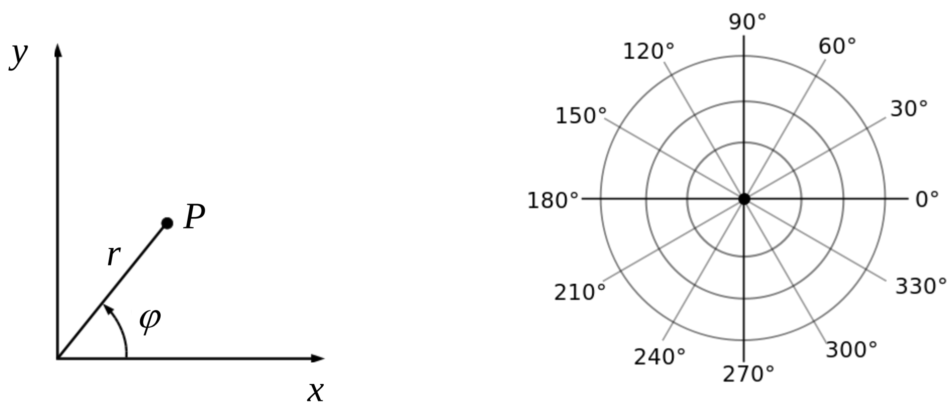


Рис. 2

Радіальна координата (зазвичай позначається r відповідає відстані від точки до початку координат. Кутова координата, що також зветься полярним кутом або азимутом і позначається φ, дорівнює куту, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки полярну вісь для того, щоб потрапити в цю точку.

Визначена таким чином радіальна координата може приймати значення від нуля до нескінченості, а кутова координата змінюється в межах від 0° до 360° (рис. 2). Однак, для зручності область значень полярної координати можна розширити за межі повного кута, а також дозволити їй приймати від’ємні значення, що відповідатиме повороту полярної осі за годинниковою стрілкою.

Порядок виконання роботи

1. На білому папері формату А4 накреслити лінійну і напівлогарифмічну системи координат. Побудувати графік залежності $y=(x)$ в лінійній та напівлогарифмічній системах координат свого варіанту.

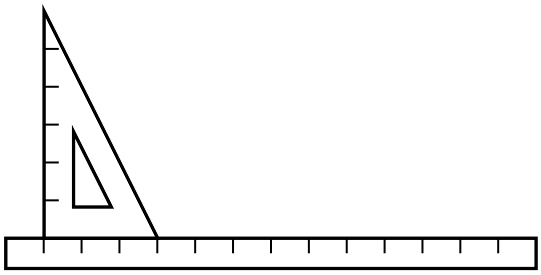


Рис. 3

2. Для креслення системи координат на білому папері слід використати лінійку і трикутник з прямим кутом (рис. 3).
3. Підрахувати масштабний коефіцієнт логарифмічної шкали з формули

$$L = k \ln \frac{x_{\max}}{x_0},$$

де: L – довжина логарифмічної шкали на папері, $x_{\max}$ і x_0 – найбільше і найменше значення шкали, k – масштабний коефіцієнт.

4. Відстань кожної поділки від початку осі знайти за формулою

$$l = k \ln \frac{x}{x_0},$$

де: l – відстань поділки від початку шкали (від поділки, яка відповідає значенню x_0), k – масштабний коефіцієнт, x і x_0 – поточне і найменше значення шкали.

З властивостей логарифмів слідує, що

$$\ln 100 = 2\ln 10,$$

$$\ln 1000 = 3\ln 10 \text{ і т.д.},$$

тобто довжини відрізків між поділками шкали в інтервалах 1-10, 10-100 і т.д. будуть повторюватись. Це дозволяє прискорити побудову логарифмічної шкали. Достатньо розрахувати довжини відрізків для значень в інтервалі 1-10 і побудувати такі самі довжини відрізків між поділками в усіх інших інтервалах значень 10-100, 100-1000 і т.д.

5. На зворотній стороні листа накреслити полярну систему координат і побудувати графік залежності $r = (\varphi)$ свого варіанту.
6. Номер варіанту дорівнює номеру прізвища студента в академічному журналі.

Контрольні питання

1. З якою метою в експериментальних дослідженнях використовують графіки?
2. Які види графіків вам відомі?
3. Основні правила побудови графіків.
4. Що таке функціональні шкали?
5. Які особливості логарифмічної шкали? В яких випадках вона використовується?

Література

1. Кучерук І.М., Дущенко В.П., Андріанов В.М. Обробка результатів
   фізичних вимірювань. Київ.: Вища школа, 1981. – 216 с.
2. Ганніченко Ю.І., Рехтета М.А., Клименко М.В. та ін. Методи визначення похибок та математична обробка результатів фізичних вимірювань. Миколаїв: МДУ ім. В.О. Сухомлинського, 2007. – 48 с.
3. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. Л.: Наука, 1985. – 112 с.

З а в д а н н я   д о   л а б о р а т о р н о ї   р о б о т и

(другу половину графіка в полярних координатах
в інтервалі 180°-360° побудувати симетрично першій половині)

1 варіант				2 варіант				3 варіант				4 варіант			
x	y	φ	r	x	y	φ	r	x	y	φ	r	x	y	φ	r
1	2,0	0	7,0	10	1,0	0	8,0	2	9,0	0	4,0	1	9,0	0	8,0
2	4,0	30	6,0	20	4,0	30	7,4	4	6,4	30	7,2	2	5,3	30	5,0
6	6,5	60	5,2	40	6,0	60	6,3	10	4,7	60	5,1	10	2,8	60	3,2
10	7,5	90	4,3	100	7,5	90	5,2	30	3,5	90	3,2	40	3,7	90	2,1
50	9,0	120	3,3	200	8,0	120	3,7	100	3,0	120	2,0	100	4,5	120	1,4
100	9,0	150	2,1	300	8,0	150	1,6	200	3,0	150	1,5	200	3,8	150	1,1
500	9,0	180	1,9	800	7,0	180	1,0	900	4,0	180	1,0	1000	3,4	180	1,0
1000	8,8			2000	5,2			3000	5,9			3000	5,2		
3000	7,0			4000	3,5			6000	7,7			5000	7,4		
10000	1,0			9000	1,0			9000	9,0			7000	9,0		

5 варіант				6 варіант				7 варіант				8 варіант			
x	y	φ	r	x	y	φ	r	x	y	φ	r	x	y	φ	r
2	1,0	0	8,0	2	10,0	0	6,0	1	90	0	80	2	10	0	80
3	3,0	30	6,6	3	5,7	30	6,8	2	53	30	50	3	30	30	66
5	5,2	60	2,7	4	4,3	60	8,0	10	28	60	32	5	52	60	27
9	7,1	90	1,2	8	2,4	90	3,3	40	37	90	21	9	71	90	12
20	8,4	120	0,8	20	1,1	120	1,6	100	45	120	14	20	84	120	8
70	8,0	150	0,8	70	0,6	150	1,2	200	38	150	11	70	80	150	8
200	7,4	180	1,0	300	2,4	180	1,0	1000	34	180	10	200	74	180	10
600	8,3			1000	2,9			3000	52			600	83		
2000	8,8			3000	3,7			5000	74			2000	88		
8000	9,0			9000	8,0			7000	90			8000	90		

9 варіант				10 варіант				11 варіант				12 варіант			
x	y	φ	r	x	y	φ	r	x	y	φ	r	x	y	φ	r
2	100	0	60	1	20	0	70	10	10	0	80	2	90	0	40
3	57	30	68	2	40	30	60	20	40	30	74	4	64	30	72
4	43	60	80	6	65	60	52	40	60	60	63	10	47	60	51
8	24	90	33	10	75	90	43	100	75	90	52	30	35	90	32
20	11	120	16	50	90	120	33	200	80	120	37	100	30	120	20
70	6	150	12	100	90	150	21	300	80	150	16	200	30	150	15
300	24	180		500	90	180	19	800	70	180	10	900	40	180	10
1000	29			1000	88			2000	52			3000	59		
3000	37			3000	70			4000	35			6000	77		
9000	80			10000	10			9000	10			9000	90		

13 варіант				14 варіант				15 варіант				16 варіант			
x	y	φ	r	x	y	φ	r	x	y	φ	r	x	y	φ	r
2	10,0	0	6,0	2	1,0	0	8,0	1	9,0	0	8,0	2	9,0	0	4,0
3	5,7	30	6,8	3	3,0	30	6,6	2	5,3	30	5,0	4	6,4	30	7,2
4	4,3	60	8,0	5	5,2	60	2,7	10	2,8	60	3,2	10	4,7	60	5,1
8	2,4	90	3,3	9	7,1	90	1,2	40	3,7	90	2,1	30	3,5	90	3,2
20	1,1	120	1,6	20	8,4	120	0,8	100	4,5	120	1,4	100	3,0	120	2,0
70	0,6	150	1,2	70	8,0	150	0,8	200	3,8	150	1,1	200	3,0	150	1,5
300	2,4	180	1,0	200	7,4	180	1,0	1000	3,4	180	1,0	900	4,0	180	1,0
1000	2,9			600	8,3			3000	5,2			3000	5,9		
3000	3,7			2000	8,8			5000	7,4			6000	7,7		
9000	8,0			8000	9,0			7000	9,0			9000	9,0		

17 варіант				18 варіант				19 варіант				20 варіант			
x	y	φ	r	x	y	φ	r	x	y	φ	r	x	y	φ	r
10	1,0	0	8,0	1	2,0	0	7,0	2	10	0	80	1	20	0	70
20	4,0	30	7,4	2	4,0	30	6,0	3	30	30	66	2	40	30	60
40	6,0	60	6,3	6	6,5	60	5,2	5	52	60	27	6	65	60	52
100	7,5	90	5,2	10	7,5	90	4,3	9	71	90	12	10	75	90	43
200	8,0	120	3,7	50	9,0	120	3,3	20	84	120	8	50	90	120	33
300	8,0	150	1,6	100	9,0	150	2,1	70	80	150	8	100	90	150	21
800	7,0	180	1,0	500	9,0	180	1,9	200	74	180	10	500	90	180	19
2000	5,2			1000	8,8			600	83			1000	88		
4000	3,5			3000	7,0			2000	88			3000	70		
9000	1,0			10000	1,0			8000	90			10000	10		

21 варіант				22 варіант				23 варіант				24 варіант			
x	y	φ	r	x	y	φ	r	x	y	φ	r	x	y	φ	r
2	90	0	40	1	90	0	80								
4	64	30	72	2	53	30	50								
10	47	60	51	10	28	60	32								
30	35	90	32	40	37	90	21								
100	30	120	20	100	45	120	14								
200	30	150	15	200	38	150	11								
900	40	180	10	1000	34	180	10								
3000	59			3000	52										
6000	77			5000	74										
9000	90			7000	90										

Лабораторна робота № 2

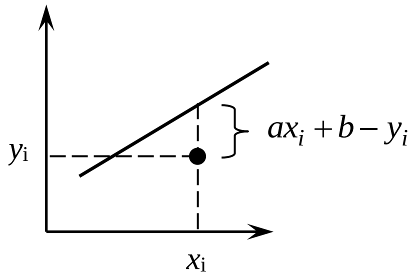
Метод найменших квадратів

Т е о р е т и ч н і   в і д о м о с т і

Для обробки експериментальних даних найчастіше на практиці використовують метод найменших квадратів (МНК) – один з методів теорії помилок, що використовується для оцінки невідомих величин за наслідками вимірювань, що містять випадкові помилки.

МНК запропонували К. Гаусс і А. Лежандр. Строге математичне обґрунтовування методу було дано Марковим і Колмогоровим. Нині цей метод є одним з найважливіших розділів математичної статистики і широко використовується для статистичних висновків в різних областях науки і техніки.

Якщо з теоретичних міркувань можна вважати, що між x і y існує лінійна залежність $y = ax + b$, то параметри прямої найчастіше знаходять за допомогою МНК. Відстань від i-тої точки, до прямої $ax_i + b - y_i$. Пряма буде проведена найкращим чином, якщо сума квадратів усіх відстаней $ax_i + b - y_i$ буде мате найменше значення. Для знаходження коефіцієнтів a і b треба мінімізувати суму $\sum_1^n (ax_i + b - y_i)^2$. Прирівняємо до нуля похідні



$$\frac{d}{da}\left(\sum (ax_i + b - y_i)^2\right) = 0,$$
$$\frac{d}{db}\left(\sum (ax_i + b - y_i)^2\right) = 0.$$

Розв’язавши систему рівнянь, отримаємо

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

де:

n – кількість експериментальних вимірів (точок),
x_i, y_i – абсциса та ордината i-тої експериментальної точки.

Для спрощення вигляду формул в них опущені межі суми. Всі суми знаходити в межах від одиниці до n.

Порядок виконання роботи

1. З таблиці 2 переписати відповідні експериментальні значення x і y.
2. Розрахунки проводити користуючись калькулятором. Проміжні результати записувати в таблицю 1.

Таблиця 1

№	x	y	x^2	y^2	xy	$(\sum x_i)^2$	$(\sum y_i)^2$
1						-	-
2						-	-
3						-	-
4						-	-
5						-	-
$\sum$							

3. Розрахувати коефіцієнти a і b для лінійної апроксимації даної залежності.
4. Побудувати на звичайному білому або міліметровому папері експериментальні точки та пряму $y = ax + b$.
5. При розрахунках зберігати не менше 4-5 значущих цифр.
6. У висновках записати коефіцієнти a і b з трьома цифрами після коми.

Контрольні питання

1. Що таке апроксимація?
2. Який геометричний зміст коефіцієнтів a і b?
3. Що таке функція розподілу ймовірності?
4. При яких умовах випадкова величина підкоряється нормальному закону?
5. Яким чином використовують МНК для нелінійних залежностей?

Л і т е р а т у р а

1. Кучерук І.М., Дущенко В.П., Андріанов В.М. Обробка результатів
фізичних вимірювань. Київ.: Вища школа, 1981. – 216 с.
2. Ганніченко Ю.І., Рехтета М.А., Клименко М.В. та ін. Методи визначення похибок та математична обробка результатів фізичних вимірювань. Миколаїв: МДУ ім. В.О. Сухомлинського, 2007. – 48 с.
3. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. Л.: Наука, 1985. – 112 с.

З а в д а н н я д о л а б о р а т о р н о ї р о б о т и

Таблиця 2

1 варіант		2 варіант		3 варіант		4 варіант		5 варіант	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
1	2	2	2	1	1	1	1	1	2
2	3	3	4	3	4	2	2	4	3
4	5	4	5	4	7	4	5	5	5
5	7	5	8	5	8	5	8	6	6
7	9	6	9	6	9	6	9	7	7

6 варіант		7 варіант		8 варіант		9 варіант		10 варіант	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2	4	3	4	4	3	3	4	3
4	7	5	6	6	5	6	5	7	6
5	8	6	7	7	6	7	8	8	7
8	9	7	8	8	7	8	9	9	8

11 варіант		12 варіант		13 варіант		14 варіант		15 варіант	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
1	2	2	2	1	1	1	2	2	2
2	3	3	4	2	4	2	3	3	3
7	5	7	5	6	7	5	6	6	5
8	7	8	8	8	8	8	7	8	6
9	9	9	9	9	9	9	8	9	7

16 варіант		17 варіант		18 варіант		19 варіант		20 варіант	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
2	1	1	1	1	2	1	2	1	2
3	2	2	3	3	4	3	3	3	3
5	7	5	4	4	5	4	5	4	6
8	8	7	5	8	6	7	8	7	7
9	9	9	6	9	7	9	9	8	8

21 варіант		22 варіант		23 варіант		24 варіант		25 варіант	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
2	2	2	1	2	2	2	2	2	2
3	3	3	2	3	3	4	4	4	3
4	5	5	7	5	6	5	5	6	5
7	6	7	8	8	7	7	6	7	8
8	7	8	9	9	8	8	7	8	9

Лабораторна робота № 3

Побудова графіків в програмі Excel

Теоретичні відомості

Діаграми є засобом наочного подання даних і полегшують виконання порівнянь, виявлення закономірностей і тенденцій даних. Наприклад, замість аналізу декількох стовпчиків чисел можна, глянувши на діаграму, дізнатися, зменшуються або зростають обсяги продажів або як залежить одна фізична величина від іншої.

Діаграму можна створити на окремому аркуші або помістити на лист із даними. Діаграму можна опублікувати на веб-сторінці, переслати електронною поштою, копіювати та імпортувати в інші програми.

Microsoft Excel підтримує різні типи діаграм, дозволяючи представити дані у найбільш зрозумілому вигляді. Створюючи діаграму за допомогою «Мастера диаграмм», або використовуючи команду «Тип диаграммы» для зміни існуючої діаграми, можна легко вибрати потрібний тип в списку типів діаграм.

В Microsoft Excel можна створити такі типи діаграм:

- гістограми;
- лінійчаті;
- графіки;
- кругові;
- точкові;
- діаграма з областями;
- кільцеві діаграми;
- пелюсткові;
- поверхневі;
- бульбашкові;
- біржові;
- циліндричні та інші діаграми.

Зауваження:

- У кожного стандартного типу діаграми є кілька підтипів. Щоб побачити, як виглядатиме діаграма, виберіть будь-який підтип діаграми, а потім натисніть і утримуйте кнопку «Просмотр результата».
- Вельми несподівано, але діаграма з назвою «график» виявляється непридатною для побудови фізичних експериментальних графіків. Для обробки та представлення результатів фізичних вимірювань використовується точкова діаграма.

Точкова діаграма показує відносини між чисельними значеннями в кількох рядах даних або відображає дві групи чисел як один ряд даних з координатами x і y. Точкові діаграми, які зазвичай використовуються для експериментальних даних, діляться на такі види:

- точкова діаграма;
- точкова діаграма із значеннями, з'єднаними згладжуючими лініями.

Приклад: Для побудови діаграми для даних наведених у таблиці треба виконати такі дії: Вставка → Диаграмма → Точечная → (далі виконувати дії згідно інструкцій «Мастера диаграмм»).

X	Y
1	10
2	30
3	50
4	70

Можна створювати користувальницькі типи діаграм, змінюючи стандартні або вбудовані нестандартні типи діаграм. Ці нестандартні типи діаграм можна використовувати спільно з іншими користувачами. Наприклад, якщо один і той же заголовок повинен з'являтися в усіх діаграмах даної організації, можна створити діаграму з цим заголовком, зберегти діаграму як нестандартний тип діаграми, визначений користувачем, а потім відкрити доступ співробітникам для використання її як шаблону.

Завдання до лабораторної роботи

Вивчити можливості програми Excel для побудови графіків (діаграм) і апроксимації експериментальних даних лінійною функцією.

В програмі Excel побудувати графіки за даними лабораторної роботи №2. Здійснити форматування графіків.

Провести лінію тренда, отримати параметри прямої та порівняти їх з результатами лабораторної роботи №2.

Результати роботи представити на захист в паперовому та електронному вигляді. Для паперового звіту достатньо надрукувати лист з таблицею та діаграмою. Файл повинен мати вигляд прізвище.xls, тобто зберігати файл потрібно в форматі Excel 97-2003. Файли з розширенням xlsx не перевіряються.

На діаграмі бажано знищіти або перейменувати легенду —●— Ряд 1, яку програма Excel вставляє автоматично.

Заливку області побудови діаграми бажано зробити світлого кольору, а точки та лінію тренда виконати контрастним кольором.

Порядок виконання роботи

1. Завантажити або набрати данні задачі на листі книги Microsoft Excel.
2. Створити точкову діаграму без лінії будь-яким відомим вам способом.
3. Провести форматування діаграми (назва листа, колір фону, вид діаграми, шкали, шрифт, числові формати значень на осях, розмір, колір та форма точок, наявність ліній, лінії сітки).
4. Провести апроксимацію побудованої графічної залежності лінійною функцією. Для цього необхідно добавити на діаграму лінію тренду з висвітленням формули, яка описує цю функцію, та значення величини достовірності апроксимації.

Контрольні питання

1. Що таке похибка вимірювання? Які бувають види похибок?
2. Для чого вимірювання фізичної величини проводять декілька разів?
3. Що таке апроксимація?
4. Який основний принцип апроксимації за методом найменших квадратів?
5. Скільки точок треба мати на графіку для проведення апроксимації?
6. Як на діаграмі показати похибки по осі x або по осі y?

Лабораторна робота № 4

Нелінійна апроксимація

Теоретичні відомості

Програма EXCEL широко використовується в офісній діяльності та для розв’язування простих фізичних задач, але вона має обмежені можливості. Пакет ORIGIN здатний полегшити обробку результатів фізичних вимірювань та підготовку ілюстрацій в самих складних випадках.

Розглянемо апроксимацію нелінійних залежностей чисельними методами на прикладі. Залежність пройденого шляху при вільному падінні тіла описується формулою $S = \frac{gt^2}{2}$. Результати експериментальних вимірювань наведено в таблиці 1. Знайдемо значення прискорення вільного падіння з цих експериментальних даних.

Таблиця 1.

t, c	S, м
1	4,91
3	44,12
5	122,55
7	240,55
9	397,08

Помістить значення t і S у таблицю вікна даних пакету ORIGIN і побудуйте точковий графік. В пакеті ORIGIN є дуже багато власних функцій для апроксимації різних залежностей, але навіть в тому випадку, коли потрібна функція відсутня можна добавити її в пакет. Перед початком апроксимації необхідно зробити вікно графіка активним, тобто назва графіка (наприклад Graf 1 повинна бути на синьому фоні, а не на сірому).

Для створення власної функції виконайте: **Analysis → Non-linear Curve Fit…** (Аналіз → Підгонка нелінійною кривою). Відкриється вікно, в якому виконайте: **Function → New** (Створити нову функцію). В полі **Name** (ім’я) можна ввести назву нашої функції (необов’язково). В полі **Number of Parameters** (кількість параметрів) вводять кількість параметрів (в нашому випадку параметр один g). В полі **Parameter Names** (ім’я параметрів) можна замість запропонованого P1 ввести g. Для цього поставте галочку у полі **User Defined Param. Names** (ім’я параметра визначає користувач). В полі **Independent Var** та **Dependent Var** (незалежна та залежна змінна) можна ввести літери t і S або залишити запропоновані програмою x і y. В полі Form (форма) вибрати **Equations** (рівняння) і у великому полі набрати необхідну формулу у вигляді: **y = P1*x^2/2** якщо ви нічого не змінювали, або у вигляді **S = g*t^2/2** , якщо ви вводили свої позначення. Натисніть кнопку **Save** (зберегти) для запису вашої функції у пакет (необов'язково).

Для проведення апроксимації виконайте: **Action → Fit**. У новому вікні натисніть **Active Dataset** (використовувати активний набір даних). Відкриється вікно **Fitting Session** (процес підгонки). В полі **Vary?** (змінна?) повинна стояти галочка, а в поле Value (значення) введіть початкове значення параметра (наприклад одиницю). Натискуйте клавішу **1 Iter.** (одна ітерація) або **10 Iter.** (десять ітерацій) і спостерігайте як змінюються значення параметра та похибки. Коли значення перестають змінюватися апроксимацію закінчено, натисніть кнопку **Done** (виконано) та прочитайте значення параметра (в нашому прикладі це прискорення вільного падіння) та достовірності апроксимації у журналі **Results Log**. Результати апроксимації виводяться також у віконце на графіку, а точки графіка з'єднує апроксимуюча крива.

Порядок виконання роботи

1. За даними таблиці 2 побудуйте точковий графік експериментальної залежності. Відформатуйте його належним чином.
2. Створіть в пакеті ORIGIN потрібну вам формулу.
3. Проведіть апроксимацію експериментальної залежності.
4. Результати збережіть у форматі варXX.opj, де XX номер вашого
   варіанту.
5. Оформіть лист звіту та роздрукуйте його.

Контрольні питання

1. Як вищенаведений приклад розв'язати засобами програми Microsoft Excel?
2. Чи можна завдання вашого варіанту розв'язати засобами програми Microsoft Excel?
3. Поясніть значення слова Fitting?
4. Що таке ітерація?

Л і т е р а т у р а

1. Кучерук І.М., Дущенко В.П., Андріанов В.М. Обробка результатів
   фізичних вимірювань. Київ.: Вища школа, 1981. – 216 с.
2. Ганніченко Ю.І., Рехтета М.А., Клименко М.В. та ін. Методи визначення похибок та математична обробка результатів фізичних вимірювань. Миколаїв: МДУ ім. В.О. Сухомлинського, 2007. – 48 с.
3. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. Л.: Наука, 1985. – 112 с.

З а в д а н н я д о л а б о р а т о р н о ї р о б о т и

1 варіант. Знайдіть прискорення руху тіла (початкова швидкість $\upsilon_0 = 0$).

2 варіант. Знайти постійну Стефана-Больцмана. E – випромінювальна здатність АЧТ тіла ($Вт/м^2 \cdot К$).

3 варіант. Знайти універсальну газову сталу в ізотермічному процесі $T = 273K$ для одного моля ідеального газу.

4 варіант. Визначте постійну k з результатів вимірювання потенціалу точкового заряду $1\, нКл$ в залежності від відстані.

5 варіант. Два заряди по $2\, нКл$ кожний взаємодіють у вакуумі. Знайти сталу k.

6 варіант. Знайти універсальну газову сталу в ізотермічному процесі $T = 300K$ для одного моля ідеального газу.

7 варіант. Знайти фокусну відстань збиральної лінзи. a – відстань від предмета до лінзи, b – відстань від лінзи до зображення.

8 варіант. Знайти електричну сталу з вимірювань ємності C плоского конденсатора в залежності від відстані між обкладками.

10 варіант. Знайти постійну Планка з вимірювань короткохвильової границі гальмівного рентгенівського спектру (відомі сталі: $c = 3 \cdot 10^8\ м/с$, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл$).

11 варіант. Знайти оптичну силу збиральної лінзи: a – відстань від предмета до лінзи, b – відстань від лінзи до зображення.

12 варіант. Знайдіть прискорення руху тіла (початкова швидкість $\upsilon_0 = 0$).

13 варіант. Знайти постійну Стефана-Больцмана. E – випромінювальна здатність АЧТ тіла ($Вт/м^2 \cdot К$).

14 варіант. Визначте постійну k з результатів вимірювання потенціалу точкового заряду $3\,нКл$ в залежності від відстані.

15 варіант. Два заряди по $8\,нКл$ кожний взаємодіють у вакуумі. Знайти сталу k.

16 варіант. Знайти універсальну газову сталу в ізотермічному процесі $T = 273K$ для одного моля ідеального газу.

17 варіант. Знайти фокусну відстань збиральної лінзи. a – відстань від предмета до лінзи, b – відстань від лінзи до зображення.

18 варіант. Знайти електричну сталу з вимірювань ємності C плоского конденсатора в залежності від відстані між обкладками.

19 варіант. Знайти прискорення вільного падіння.

20 варіант. Знайти постійну Планка з вимірювань короткохвильової границі гальмівного рентгенівського спектру (відомі сталі: $c = 3 \cdot 10^8\ м/с$, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл$).

21 варіант. Знайти оптичну силу збиральної лінзи: a – відстань від предмета до лінзи, b – відстань від лінзи до зображення.

22. Знайти прискорення вільного падіння.

1 варіант		2 варіант		3 варіант		4 варіант		5 варіант		6 варіант	
S, м	v, м/с	T, K	E	v, л	p, кПа	r, см	φ, В	r, мм	F, мН	v, л	p, кПа
1	2,5	375	1120	10	226,80	1,0	894	1,0	36,000	30	83,2
4	4,9	400	1450	13	174,54	1,2	750	1,1	30,000	39	64,0
8	6,9	425	1852	17	133,45	1,5	593	1,2	24,800	51	48,9
14	9,2	450	2325	24	94,53	2,1	429	1,4	18,400	72	34,5
19	10,7	475	2889	33	68,76	3,2	279	1,7	12,500	99	25,2
24	12,0	500	3544	45	50,41	4,1	219	2,3	6,770	135	18,6
28	13,0	525	4303	57	39,80	5,3	171	3,5	2,940	171	14,6
34	14,2	550	5189	70	32,42	6,7	134	5,0	1,450	210	11,9
40	15,5	575	6208	84	27,00	8,0	112	7,0	0,735	252	9,8
46	16,6	600	7348	99	22,88	9,1	99	9,0	0,444	297	8,4

7 варіант		8 варіант		9 варіант		10 варіант		11 варіант		12 варіант	
a, см	b, см	d, мм	C, пФ			U, кВ	λ, A°	a, см	b, см	S, м	v, м/с
12,0	60,1	1,0	159,0			10	1,243	26,00	600,00	2	4,5
12,4	51,7	1,2	132,7			12	1,037	26,50	499,74	5	7,1
13,0	43,3	1,4	113,9			16	0,777	27,70	246,50	9	9,5
14,0	35,1	1,6	99,4			24	0,517	34,10	93,68	14	11,8
17,0	24,3	2,1	75,9			41	0,303	49,80	51,10	20	14,1
23,0	17,7	3,0	53,2			68	0,183	76,40	37,13	25	15,8
32,0	14,5	4,0	39,7			95	0,131	101,20	33,20	31	17,6

43,0	13,1	5,0	31,9			130	0,096	130,00	31,02	36	19,0
55,0	12,2	7,0	22,8			170	0,073	170,50	29,03	41	20,2
70,0	11,7	9,0	17,6			200	0,062	199,70	28,57	47	21,7

13 варіант		14 варіант		15 варіант		16 варіант		17 варіант		18 варіант	
T, K	E	r, см	φ, В	r, см	F, Н	v, л	p, кПа	a, см	b, см	d, мм	C, пФ
670	11425	10	270	5,0	0,2204	10	226,80	7,0	41,8	1,1	804,5
720	15237	11	245	5,4	0,1925	13	174,54	7,2	36,1	1,3	670,5
770	19897	13	208	6,0	0,1700	17	133,45	7,5	28,4	1,5	590,0
820	25590	18	150	6,8	0,1212	24	94,53	8,0	24,6	1,8	491,7
870	32483	29	93	8,1	0,0872	33	68,76	9,3	16,1	2,4	368,8
920	40691	42	64	10,3	0,0545	45	50,41	13,2	10,8	3,1	285,5
970	50108	54	50	14,0	0,0298	57	39,80	18,9	8,5	4,2	210,7
1020	61373	66	41	18,0	0,0174	70	32,42	24,7	8,1	5,4	163,9
1070	74584	81	34	21,5	0,0122	84	27,00	30,1	7,3	6,7	132,1
1120	89219	90	30	25,0	0,0093	99	22,88	35,6	7,1	8,0	110,6

19 варіант		20 варіант		21 варіант		22 варіант		23 варіант		24 варіант	
t, c	S, м	U, кВ	λ, Aº	a, см	b, см	t, c	S, м				
1,0	4,8	20	0,621	18,0	224,5	1	4,9				
1,4	9,7	24	0,518	18,9	141,5	2	19,6				
1,9	17,6	32	0,388	21,7	71,13	3	44,1				
2,6	33,2	48	0,259	31,2	35,89	4	78,4				
3,3	53,5	82	0,151	41,8	27,11	5	122,6				
4,0	78,2	136	0,091	55,3	23,03	6	176,4				
4,8	112,9	190	0,065	71,8	21,78	7	240,1				
5,6	153,1	260	0,048	88,4	20,54	8	313,6				
6,3	195,0	340	0,037	103,6	20,86	9	396,9				
7,0	239,5	500	0,025	118,5	19,39	10	489,1				

Лабораторна робота № 5

Кореляційний аналіз

Теоретичні відомості

При вивченні реальних процесів з'ясовується, що існують фізичні величини, які, з одного боку, явно не пов'язані однозначною функціональною залежністю, але, з іншого боку, вони не є і абсолютно незалежними. Це означає, що при одному і тому ж значенні змінної X в експериментах виходять різні значення змінної Y, причому їх розкид значно перевищує похибку вимірювання Y. У той же час середні значення Y регулярно збільшуються чи зменшуються з ростом X. Подібні величини називаються корельованими, або кажуть, що ці величини X і Y пов'язані між собою статистичною залежністю. Аналіз статистичних зв'язків є в цілому складним завданням і виконується методами математичної статистики.

Кореляційним зв'язком називають найважливіший окремий випадок статистичного зв'язку коли різним значенням однієї змінної відповідають різні середні значення іншої. Зі зміною значення ознаки X закономірно змінюється середнє значення ознаки Y; в той час як в кожному окремому випадку значення ознаки Y (з різними ймовірностями) може приймати безліч різних значень.

Різноманітні випадки кореляційних залежностей можуть мати різні напрямки. А саме, коли даному ряду значень X відповідають зростаючі значення Y, спостерігають прямий напрямок кореляції; коли даному ряду значень X відповідають спадні значення Y, йдеться про зворотну кореляцію. Отже, кореляція характеризується ступенем (силою), формою та напрямком. Ці характеристики вивчає кореляційний аналіз.

Кореляційний аналіз – це статистичне дослідження залежності між випадковими величинами. У найпростішому випадку досліджують дві вибірки (набори даних), у загальному – їх багатовимірні комплекси.

В програмі EXCEL для розрахунку коефіцієнта лінійної кореляції існує спеціальна функція КОРРЕЛ (*массив1, массив2*), де *массив1* – діапазон клітинок зі значеннями першої випадкової величини (першого параметра), *массив2* – діапазон клітинок зі значеннями другого параметра.

П о р я д о к   в и к о н а н н я   р о б о т и

Перевірити наявність кореляції успішності двох студентів (себе та наступного в списку) і кореляції власної успішності з двох предметів згідно завданню. Для цього:

1. Набрати в програмі EXCEL бали з відомості відповідно завданню.
2. Побудувати точкові діаграми, провести лінії тренда лінійної залежності, вивести на діаграму рівняння прямої та величину достовірності апроксимації.
3. Розрахувати коефіцієнти кореляції успішності двох студентів і власної успішності з двох предметів.
4. Роздрукувати лист звіту.

З а в д а н н я   д о   л а б о р а т о р н о ї   р о б о т и

№	Список 132 гр.	перший студент	другий студент	перша дисципліна	друга дисципліна
a.	Бабак К.	1	10	8	1
b.	Баранов В.	2	11	8	2
c.	Білий С.	3	12	8	3
d.	Вороніна В.	4	13	8	4
e.	Гергі А.	5	18	8	5
f.	Гудзь О.	6	15	8	6
g.	Дерев`янко М.	7	16	8	7
h.	Долгорученко К.	8	17	4	1
i.	Іванець В.	9	18	4	3
j.	Капітоненко К.	10	19	4	2
k.	Коврига О.	11	20	4	3
l.	Луценко П.	12	21	4	5
m.	Михальченко І.	13	22	4	6
n.	Молодан І.	14	1	4	7
o.	Поляновський В.	15	2	4	8
p.	Продан С.	16	3	6	1
q.	П`ятков О.	17	4	6	2
r.	Рева О.	18	5	6	3
s.	Сєргєєв О.	19	6	6	4
t.	Таточенко М.	20	7	6	5
u.	Черняк С.	21	8	6	7
v.	Шах О.	22	13	6	8

К о н т р о л ь н і   п и т а н н я

1. Що таке статистичний зв'язок?
2. Що таке кореляційний зв'язок?
3. Які шляхи виникнення кореляційного зв'язку?
4. Яка мета і головні завдання кореляційного аналізу?

Л і т е р а т у р а

1. Кучерук І.М., Дущенко В.П., Андріанов В.М. Обробка результатів
   фізичних вимірювань. Київ.: Вища школа, 1981. – 216 с.
2. Ганніченко Ю.І., Рехтета М.А., Клименко М.В. та ін. Методи визначення похибок та математична обробка результатів фізичних вимірювань. Миколаїв: МДУ ім. В.О. Сухомлинського, 2007. – 48 с.
3. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. Л.: Наука, 1985. – 112 с.

Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського
механіко-математичний факультет
СЕМЕСТРОВА РЕЙТИНГОВА ВІДОМІСТЬ
2014-2015 н. р. Спеціальність Фізика*
Курс 1
за 1 навчальний семестр

№ п/п	Список 132 гр.	Назва і номер дисципліни							
		1	2	3	4	5	6	7	8
		Історія України	Іноземна мова	Аналітична геометрія та лінійна алгебра	Вікова фізіологія і валеологія	Безпека життєдіяльності	Психологія	ОТК	Вибрані задачі елементарної фізики
1	Бабак К.	65	65	70	65	65	61	66	50
2	Баранов В.	65	60	55	54	52	52	50	50
3	Білий С.	65	80	95	66	70	70	65	100
4	Вороніна В.	65	65	75	65	66	60	90	51
5	Гергі А.	65	65	70	50	65	60	50	55
6	Гудзь О.	50	50	50	50	35	50	35	40
7	Дерев`янко М.	65	56	85	65	65	65	68	55
8	Долгорученко К.	65	65	55	35	50	52	82	46

№ п/п	Прізвище, ім`я по батькові студента	Назва і номер дисципліни							
		1	2	3	4	5	6	7	8
		Історія України	Іноземна мова	Аналітична геометрія та лінійна алгебра	Вікова фізіологія і валеологія	Безпека життєдіяльності	Психологія	ОТК	Вибрані задачі елементарної фізики
9	Іванець В.								
10	Капітоненко К.	90	78	82	68	80	74	84	90
11	Коврига О.	65	56	90	65	67	74	82	92
12	Луценко П.	50	50	35	35	50	50	35	35

13	Михальченко І.	50	50	35	35	50	50	35	35
14	Молодан І.	35	35	35	35	35	50	35	35
15	Поляновський В.	65	65	68	65	52	65	68	44
16	Продан С.	65	53	55	65	35	55	37	38
17	П`ятков О.	65	67	81	67	65	57	69	55
18	Рева О.	65	54	55	61	50	50	35	46
19	Сєргєєв О.	65	50	50	56	35	51	35	38
20	Таточенко М.	74	70	92	67	81	74	71	94
21	Черняк С.	65	58	70	65	50	52	55	44
22	Шах О.	65	68	90	66	74	90	80	66

Питання для самоконтролю

1. З якою метою в експериментальних дослідженнях використовують графіки?
2. Які види графіків вам відомі?
3. Основні правила побудови графіків.
4. Що таке функціональні шкали?
5. Які особливості логарифмічної шкали? В яких випадках вона використовується?
6. Що таке апроксимація?
7. Який геометричний зміст коефіцієнтів a і b?
8. Що таке функція розподілу ймовірності?
9. При яких умовах випадкова величина підкоряється нормальному закону?
10. Яким чином використовують МНК для нелінійних залежностей?
11. Що таке похибка вимірювання? Які бувають види похибок?
12. Для чого вимірювання фізичної величини проводять декілька разів?
13. Що таке апроксимація?
14. Який основний принцип апроксимації за методом найменших квадратів?
15. Скільки точок треба мати на графіку для проведення апроксимації?
16. Як на діаграмі показати похибки по осі x або по осі y?
17. Як вищенаведений приклад розв'язати засобами програми Microsoft Excel?
18. Чи можна завдання вашого варіанту розв'язати засобами програми Microsoft Excel?
19. Поясніть значення слова Fitting?
20. Що таке ітерація?
21. Що таке статистичний зв'язок?
22. Що таке кореляційний зв'язок?
23. Які шляхи виникнення кореляційного зв'язку?
24. Яка мета і головні завдання кореляційного аналізу?

Список використаних джерел

Основні

1. Кучерук І.М., Дущенко В.П., Андріанов В.М. Обробка результатів фізичних вимірювань. Київ.: Вища школа, 1981. – 216 с.
2. Ганніченко Ю.І., Рехтета М.А., Клименко М.В. та ін. Методи визначення похибок та математична обробка результатів фізичних вимірювань. Миколаїв: МДУ ім. В.О. Сухомлинського, 2007. – 48 с.
3. Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин. Л.: Наука, 1985. – 112 с.
4. Новицький П.В., Зограф Е.Н. Оцінка похибок вимірювань. - Л.: Енергія, 1983, 380 с.
5. Електричні вимірювання неелектричних величин / / Под ред. П.В. Новицького. 5-е изд., Перераб. і доп.-Л.: Енергія, Ленінгр. відділення, 1975, 576 с.
6. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. М.: Наука, 1970. 104 с.
7. Светозаров В.В. Основы статистической обработки результатов измерений. М.: Изд-во МИФИ, 1983. 40 с.
8. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1968. 390 с.
9. Куликівський К.Р., Купер В.Я. Методи та засоби вимірювань. - М.: Вища школа, 1986.
10. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. Л.: Наука, 1974. 101 с.
11. Планування експерименту в дослідженні технологічних процесів / / К. Хартман, Е. Лецьки, В. Шефер і др.-М.: Світ, 1977, 552 с.
12. Адлер Ю.П., Маркова О.В., Грановський Ю.В. Планування експерименту при пошуку оптимальних умов. - М.: Наука, 1976, 279 с.
13. Исакова О.П., Тарасевич Ю.Ю. Обработка и визуализация данных физических экспериментов с помощью пакета Origin. Астрахань, 2007 67 с.
14. Исакова О.П., Тарасевич Ю.Ю., Юзюк Ю.И. Обработка и визуализация данных физических экспериментов с помощью пакета Origin. Анализ и обработка спектров. Учебно-методическое посо-

бие. – Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет, 2007. 76 с.

15. Бурсиан Э.В. Физические приборы. М.: Просвещение, 1984. – 271 с.
16. Дущенко В.П. Фізичний практикум. ч.2. – К.: Вища школа, 1981. – 642 с.
17. Иверонова В.И. Физический практикум. Электричество и оптика. М.: 1968. – 387 с.
18. Майсова Н.Н. Практикум по общей физике. – М.: Высшая школа, 1970. – 566 с.

Додаткові

1. Захаров В.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Теория вероятностей. М.: Наука, 1983.
2. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Анализ данных на компьютере. М.: Финансы и статистика, 1995.
3. Сквайрс Дж. Практическая физика. М.: Мир, 1971.
4. Худсон Д. Статистика для физиков. М.: Мир, 1970.
5. Енохович А.С. Справочник по физике. – М.: Просвещение, 1978. – 415 с.
6. Біленко І.І. Фізичний словник. – К.: Вища школа, 1979. – 336 с.