Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського

О.С. Булгакова, В.О. Поздєєв

МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ТА ПРОЦЕСІВ ЕКОНОМІКИ

Навчально-методичной посібник

Миколаїв

2017

УДК 004.94
ББК 65.050.9(4Укр)030.4

Булгакова О.С. Поздєєв В.О.. МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ТА ПРОЦЕСІВ ЕКОНОМІКИ: Навчально-методичний посібник. – М.: Вид-во МНУ ім. В.О.Сухомлинського, 2017. – 364 с. Бібліогр.

Навчально-методичний посібник відповідає курсу «Моделювання складних систем та процесів», «Математична економіка» для студентів спеціальностей «Прикладна математика», «Інформатика», «Комп'ютерні науки». Навчальний посібник знайомить студентів з основними положеннями моделювання систем і методами аналізу моделей. Відмінною особливістю змісту посібника є більша увага математичній стороні питання, ніж економічній інтерпретації моделей. У посібник включені такі розділи як методи оптимізації та ігрові методи. Також у посібнику детально розглянуті динамічні моделі економіки та математичні основи теорії управління системами.

Рецензенти:

Атаманюк І.П. , доктор технічних наук, професор, професор кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету.

Валькман Ю.Р., доктор технічних наук, професор, професор кафедри математичних методів системного аналізу Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Рекомендовано до друку Вченою радою Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського (протокол №9 від 15 травня 2017р.)

З м і с т

ВСТУП

На думку авторів, розвиток будь-якої галузі знань (дисципліни) включає два послідовних етапи. Перший етап носить якісний, описовий характер. На цьому етапі вивчення відбувається опис об'єктів, дається якісний аналіз внутрішніх механізмів явищ, проводиться їх класифікація за тими чи іншими ознаками.

Другий етап характеризується аналізом досліджуваних явищ з кількісної сторони. Тут широко використовуються математичні моделі. На першому етапі розвитку, як бачимо, знаходяться такі дисципліни як ботаніка, історія, психологія і т.д.

Проте сьогодні неможливо уявити собі фізику і особливо механіку без математичних моделей, математичних теорій. Фізика використовує математику як основний інструмент у побудові своїх теорій. Механіка (гідромеханіка, механіка твердого тіла, що деформується, механіка суцільних середовищ) по суті, стала розділом математики (математичної фізики). Всі видатні вчені-механіки були одночасно і сильними математиками. Таким чином, можна сказати, що такі розділи знань як фізика і механіка знаходяться на другому етапі свого розвитку. Саме цей факт дозволив німецькому філософу Е. Канту сказати: «Наука лише остільки наука, оскільки в неї входить математика».

Економіка, як область (розділ) науки, сьогодні, образно кажучи, однією ногою стоїть ще на першому етапі, а другою крокує в другий етап. Свідченням цього якраз є введення навчального курсу «Математична економіка». Тут мається на увазі математичне моделювання економічних систем, економічних процесів. Звичайно, взагалі кажучи, математичні моделі економічних систем повинні були б стати органічною (основною) частиною всього курсу економіки. Однак сьогодні економісти старої школи ще не готові стати математиками (як фізики і механіки). Цьому є ряд причин: старі традиції, складність економіки як об'єкта математичного моделювання, недостатня математична підготовка економістів. Враховуючи останню обставину, автори даного посібника велику увагу приділили математичній стороні.

Розділ 1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

1.1. Економічна система як об'єкт математичного моделювання

1.1.1. Поняття системи

Система – це безліч елементів, взаємозалежних один з одним і функціонуючих для досягнення визначеної мети.

Кожен *елемент* системи може бути також системою, яка по відношенню до вихідної системи є підлеглою – підсистемою.

У свою чергу, кожна система може становити елемент більш складної системи. *Середовищем* даної системи називається система, що складається з елементів, які не належать даній системі. Об'єднання системи і середовища називають *системою – універсум.*

Під *зв'язками* між елементами системи розуміють канали передачі інформації. Під елементами системи розуміють деякі об'єкти, які, певним чином, переробляють вхідну інформацію.

Система, що функціонує в середовищі, має з нею зв'язки у вигляді вхідних, вихідних параметрів і зовнішніх збурень, як правило тих, що заважають досягненню системою мети.

Системи можна класифікувати:

- за ступенем складності;
- за природою поведінки;
- з урахуванням тимчасового фактора.

Під *категорією складності* розуміється кількість елементів, які складають систему, і зв'язків між елементами. За ступенем складності умовно системи можна розділити на:

- прості, що мають мало елементів і зв'язків;
- складні, що мають багато внутрішніх зв'язків;
- надскладні (багато елементів і багато зв'язків).

За другим критерієм (*природі поведінки*) системи поділяються на:

- детерміновані;
- імовірнісні.

У науковій практиці під *детермінованими* явищами розуміються такі, які за однакових умов приводять до одного результату. Явища, які при повторенні в однакових умовах дають різноманітні результати, називають *випадковими* або *ймовірнісними*.

По відношенню до тимчасового фактору системи є:

- *статистичними*, де процеси (перетворення) в елементах не залежать від часу
- *динамічними*, де характеристики змінюються в часі.

Прості детерміновані системи: розміщення верстатів у цеху, розклад занять, сімейний бюджет.

Складні детерміновані системи: телевізор, комп'ютер, шахи.

Приклади простих імовірнісних систем – лотерея, статистичний контроль деталей.

Складні ймовірнісні системи: система-диспетчер руху літаків великого аеропорту, системи матеріально-технічного постачання на великому підприємстві, наприклад, суднобудівному.

Надскладні ймовірнісні системи: суспільство, економіка країн, людський мозок.

1.1.2. Особливості економічних систем

Мета функціонування економічних систем – забезпечення суспільства (кожного члена суспільства) предметами споживання для:

- підтримки життєвого тонусу (продукти харчування, одяг і т.д.);
- створення умов для відпочинку та комфорту;
- інформаційного забезпечення;

– пересування;

– створення безпеки для життя.

Для досягнення зазначеної мети економічні системи повинні займатися питаннями:

– виробництва товарів;

– накопиченням, розподілом, споживанням товарів;

– рухом товарів, їх обміном;

– генерацією ресурсів (сировини, робочої сили, капіталу).

Елементами економічної системи з точки зору категорії складності є:

– домашнє господарство

– фірма;

– велике підприємство;

– галузі;

– економіка країни.

З точки зору категорії функціональної приналежності кожен названий елемент системи виступає як:

– виробник;

– продавець;

– накопичувач багатства;

– інвестор;

– споживач;

– покупець.

Основною формою організації економічної взаємодії елементів економічної системи є *ринок*, де відбувається обмін (купівля - продаж) різними товарами.

Економічна система характеризується:

– великою кількістю елементів і зв'язків;

– різноманітністю функціональних ролей кожного елемента;
– ієрархічною структурою;
– змінністю характеристик у часі;
– стохастичним (імовірнісним) характером явищ;
– труднощами обліку людського фактора (психологічні, соціальні явища).

Все сказане приводить до труднощів або неможливості експериментального вивчення економічної системи. Нагадаємо, що методичною основою експерименту, як методу дослідження, є повторюваність результатів як на безлічі однотипних об'єктів, так і на безлічі повторень на різних відрізках часу для одного об'єкта.

Таким чином, основним методом дослідження економічних систем слід визнати метод моделювання.

1.1.3. Поняття моделі та моделювання

Саме слово «модель» походить від латинського слова "modelium", що означає: міра, образ, спосіб. В даний час термін «модель» широко використовується в різних сферах людської діяльності і має безліч значень. Це деякий зразок для наслідування в моді, це і промисловий зразок при випуску нового виду товару.

В області наукового пізнання «модель» - це такий матеріальний або абстрактний об'єкт, який у процесі пізнавальної діяльності заміщає сам досліджуваний об'єкт-оригінал так, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про оригінал.

Зауважимо, що всі наші наукові уявлення про навколишній реальний світ є моделі цього світу.

Модель - це деяким чином ідеалізований об'єкт, де збережені лише основні властивості і відкинуті другорядні. Таким чином, точність і складність моделі - це два протилежних фактора.

Моделювання - це процес побудови, вивчення і застосування моделей для отримання нової інформації. Слід виділити цілі і задачі моделювання, як способу вивчення об'єкта-оригіналу. *Фундаментальна мета* моделювання - пізнання навколишнього реального світу.

Прикладними цілями моделювання економічних систем служать:

- прогнозування розвитку економічних процесів у фірмі, галузі, країні, світі;
- оптимізація процесу економічного розвитку для отримання деякого виграшу (максимум виробленої продукції, мінімум витрат, мінімум терміну окупності капіталовкладень і т.д.).

Завдання, які вирішуються в процесі моделювання, наступні:

- аналіз системи, розкладання її на елементи, формалізація елементів;
- визначення зв'язків між елементами;
- виявлення вхідних і вихідних параметрів;
- розробка моделі об'єкта;
- дослідження моделі;
- виявлення нових результатів;
- перевірка отриманих результатів, уточнення моделі при необхідності.

Класифікація моделей в економіці:

1. за природою моделей:	–фізичні; –математичні;
2. за ступенем охоплення:	–мікроекономічні;; – макроекономічні;
3. по відношенню до тимчасового фактору:	–статичні; –динамічні;
4. за природою поведінки:	–детерміновані;

–імовірнісні;

5. за функціональною ознакою: – модель виробника, споживача;
– модель співробітництва і конкуренції фірм;
– глобальні моделі виробництва, накопичення, споживання.

Об'єктом нашої уваги надалі є математичні моделі економічних систем. *Математична модель* - це система математичних рівнянь, що описують поведінку економічної системи або її елемента, а також початкові і граничні умови. Відмітимо, що початкові умови описують стан моделі в момент часу $t = 0$, а граничні умови описують взаємодію розглянутої системи із середовищем.

У свою чергу можлива наступна класифікація математичних моделей:

– лінійна і нелінійна моделі;
– дискретна і безперервна;
– системи диференціальних або алгебраїчних рівнянь;
– детермінована або імовірнісна моделі.

1.1.4. Методологічні основи математичного моделювання

При побудові математичних моделей складних систем різної фізичної природи, у тому числі економічних систем, рекомендується використовувати методологічні принципи, наприклад, наведені в [8]:

1. *Принцип теоретичної обґрунтованості застосовуваних математичних рівнянь.*

Використовувані математичні рівняння повинні відображати (описувати) закони фундаментального характеру або достатньо перевірені на практиці емпіричні залежності. Як приклад з області математичного моделювання економічних систем наведемо широко застосовувану виробничу функцію Кобба - Дугласа. Можна сказати, що структура даної виробничої функції неодноразово перевірена практиками, зручна і наближається по суті до закону фундаментального характеру, хоча і є емпіричною.

2. *Принцип локальності в описі складних систем.*

При розробці математичної моделі складної системи остання розбивається на підсистеми або елементи, доступні явному фізичному розумінню і математичному опису.

Моделі довгострокового прогнозування розглядаються в більш коротких відрізках часу. Потім відбувається стиковка (об'єднання) локальних математичних моделей в загальну систему, як по структурному, так і тимчасовому фактору.

3. *Принцип достатньої апроксимації.*

Принцип полягає в прагненні до простоти і ясності в побудові математичної моделі. При цьому слід прагнути, з одного боку, до зменшення числа параметрів, з іншого боку - до спрощення математичних конструкцій. Однак це спрощення повинно зберігати суть модельованої системи. При спрощенні (зливанні води) потрібно «не вихлюпнути дитину з ванни». Цей принцип відповідає відомому підходу «бритви Оккама». Оккам (1285 – 1349) – англійський філософ, логік, монах викладав в Оксфорді. За Оккамом, поняття, що не зводяться до інтуїтивного знання і не піддаються перевірці досвідом, мають бути видалені з науки: «сутності не варто множити без необхідності». Дійсно, не слід вважати, що чим більше факторів враховує модель, тим вона дає кращі результати. Зайві складність і громіздкість моделі ускладнюють процес її дослідження і знижують точність результатів. Необхідно розміряти реальні можливості (результат), одержувані від моделі, і витрати на її реалізацію

4. *Принцип універсальності.*

Принцип полягає в тому, що математична модель повинна дозволяти досліджувати досить велике коло завдань. Одним з важливих переваг моделі є потенційна можливість їх використання для вирішення різноцільових проблем.

5. *Принцип здійснення.*

Принцип здійснення в даному випадку означає можливість отримання рішення поставленої математичної задачі, яка є математичною моделлю деякої економічної системи. Так, в математичному моделюванні важливе значення має наявність необхідного математичного апарату для опису системи і потім одержання рішення. Необхідно, по можливості, прагнути до створення математичної моделі, що належить до класу достатньо вивчених математичних задач.

Однак можлива ситуація, коли математична модель проблеми призводить до появи нового розділу математики. Так, потреби розвитку економіки як науки сприяли розвитку таких розділів математики як лінійне програмування, теорія ігор, функціональний аналіз.

6. *Принцип оцінки достовірності отриманих результатів.*

Достовірність результатів математичного моделювання досягається:

- коректністю математичної постановки завдання;
- проведенням строгих математичних перетворень;
- приведенням доказів існування та єдиності розв'язку задачі;
- оцінкою точності отримання наближеного розв'язку;

– тотожним збігом асимптот нового, більш загального розв'язку з відомими приватними класичними розв'язками завдання;
– можливістю пояснення фізичності розв'язку;
– задовільним збігом результатів теорії з практичними результатами.

1.1.5. Короткий історичний огляд розвитку економіко-математичного моделювання

Застосування математичних методів в економіці має тривалу історію і проходило двома шляхами. Це шляхи: створення економетрики, як науки, що досліджує кількісні закономірності і зв'язки в економіці методами статистики, і створення теорії економічних процесів на основі математичних моделей. Ми зупинимося на короткому огляді математичного моделювання в економіці.

Прийнято вважати, що математичне моделювання як метод аналізу макроекономічних процесів уперше застосовано лейб-медиком короля Людовика XV доктором Ф. Кене, який в 1758 р. в роботі «Економічна таблиця» зробив спробу кількісного опису національної економіки.

Родоначальником математичної школи в буржуазній політичній економіці вважається французький вчений О. Курно (1801-1877). У його праці «Дослідження математичних принципів теорії багатства», опублікованій у Франції в 1838 р. вперше використані кількісні методи аналізу конкуренції при різних ринкових ситуаціях. У книзі У. Джевоная «Короткий опис загальної математичної теорії політичної економії» (1862) викладена одна з перших версій теорії корисності. Видатними представниками математичної школи є Г. Госсен (1810-1859) в Німеччині, В. Джевонс (1835-1882) в Англії, Л. Вальрас (1834-1910) в Швейцарії, Г. Кассель (1866-1944) у Швеції, Ф . Еджворт (1845-1926) в Англії, В. Парето (1848-1923) в Італії, В. Дмитрієв (1868-1913) в Росії. Однак родоначальники математичної школи розглядали математичні моделі не як елементи економічної теорії, а лише як ілюстрації економічних положень.

У XX столітті математичні методи моделювання застосовувались дуже широко, з їх використанням виконані практично всі роботи, удостоєні Нобелівської премії з економіки (Д. Хікс, Р Солоу, В. Леонтьев, П. Самуельсон та ін.) У 1928 р. Ч. Кобб і П. Дуглас на основі даних по обробній промисловості США за період 1899-1922 рр.. представили емпіричну виробничу функцію у вигляді: $P = 1{,}01 \cdot L^{0{,}75} \cdot K^{0{,}25}$, де P – розрахунковий індекс виробництва, K – індекс основного капіталу, L – індекс зайнятості.

В. Рамсей запропонував спрощену модель довгострокового зростання економіки. У 1923 р. Джон фон Нейман виклав основи багатосекторної моделі розширюючої економіки.

У 1936 р. опублікована праця Д.М. Кейнса «Загальна теорія зайнятості, відсотка і грошей». У модельному відношенні важливе значення має «мультиплікатор» введений Кейнсом, який послужив основою ряду макроекономічних моделей. Кейнсоманськими моделями економічного зростання з'явилися спрощення моделі Р. Харрода (1939) і Е. Домара (1946).

Значну роль у розробці моделей зіграв Р. Солоу. У 1956 р. він запропонував замкнуту просту модель розвитку макроекономічної системи. В якості основного аналітичного інструменту в ній використаний апарат виробничої функції.

Незважаючи на відомі труднощі післяжовтневого періоду, економічні науки на основі математичного підходу розвивалися і в Росії. Так, Е.Е. Слуцьким проведено аналіз моделі поведінки споживачів, зроблено відкриття Н.Д. Кондратьєвим довгих хвиль в економіці, Л.В. Конторовичем розвинений метод для вирішення завдань лінійного програмування.

Справедливості заради слід зауважити, що модель економічної динаміки капіталістичного господарства, мабуть, вперше була запропонована в 1954 р. Н.Д. Кондратьєвим (1892-1938). У моделі були використані рівняння динаміки капіталу, принцип двосекторного виробництва (засобів виробництва і засобів споживача), запропоновано диференціальний запис виробничої функції у вигляді: $Y = \frac{\partial Y}{\partial K} K + \frac{\partial Y}{\partial L} L$, K, Y – ресурси капіталу і праці (у наших позначеннях). Однак ці результати були опубліковані, як бачимо, лише в 1989 р.

Основні перепони, що стоять на шляху розвитку формалізованих (математичних) методів у соціально-економічних науках в СРСР, носили суб'єктивний характер. П.П.Капіца ще в 1959 р. зауважив, розмірковуючи про розвиток суспільних наук у середні століття: «Зараз існує велика різноманітність державних структур, які визнають за істину тільки те в суспільних науках, що доводить доцільність цих структур». Труднощі (опір) використання математичних методів при аналізі суспільно-економічних проблем зустрічалися і в інших країнах. Так в 1890-х роках проти використання Л. Вальрасом математичних моделей в курсі політичної економіки виступало переважна більшість його колег по Лозаннському університету. Вибаченням цьому явищу можуть послугувати слова Бертрана Рассела: «Багато людей ненавидять абстракції, я вважаю, головним чином через труднощі необхідного інтелектуального зусилля, але так як вони не бажають визнавати цю причину, вони винаходять безліч інших...». За словами Дж. Кейнса, «практики, які вважають себе абсолютно несхильними інтелектуальним впливам, звичайно є рабами ідей якого-небудь економіста минулого».

У роботі Г.Б. Клейнера «Економіко-математичне моделювання та економічна теорія» /Економіка і математичні методи, 2001, том 37, №3, с.11-126/ представлена класифікація фахівців в області економіки, як психологічних типажів, і їх уявлення про роль різних складових економічного життя.

№ з/п	Уявлення про роль теорії, політики, практики в економіці			Психологічна особистість економіста
	Теорія	**Політика**	**Госп. практика**	
1	Значима	Незначуща	Незначуща	Фаталіст
2	Незначуща	Значима	Незначуща	Волюнтарист
3	Незначуща	Незначуща	Значима	Емпірик
4	Незначуща	Значима	Незначуща	Догматик
5	Значима	Незначуща	Значима	Ідеаліст
6	Незначуща	Значима	Значима	Прагматик
7	Значима	Значима	Значима	Реаліст

Зовсім різне ставлення фахівців до математичного моделювання економіки (ММЕ). На думку ряду фахівців ММЕ:

– це частина економічної теорії;
– це ілюстрація до теоретичних положень;
– це прикладна математика.

1.2. Моделювання сфери споживання

1.2.1. Основні поняття і визначення поведінки споживача

Розглянемо модель економічної поведінки *споживача*, який на ринку відіграє роль *покупця*. Під окремим споживачем будемо розуміти як фізичну особу, що прийшла на ринок за покупками (придбанням товару), так і юридичну особу (фермер, фірма, підприємство). Кожен споживач приймає рішення (вирішує задачу) придбання (покупки) деяких товарів, виходячи зі своєї системи *уподобань*.

Під *товаром* будемо розуміти як деякі продукти, вироби, так і різні блага та послуги, наявні на ринку в наявності і призначенні для продажу. Система уподобань у кожного споживача (категорії споживачів) може бути своя. Вона включає в себе як вибір товарів першої необхідності, так і вибір предметів розкоші. Під *товарами першої необхідності* будемо розуміти товари, що забезпечують життєдіяльність споживача, а необхідна кількість їх обмежена. *Предмети розкоші* служать для задоволення почуття задоволеності, насолоди і їх ніколи не буває багато. Кожен товар має свою *ціну*, яка тут буде вважатися заданою і постійною, тобто ціну визначає ринок.

Будемо вважати, що споживач розпоряджається доходом Q, який він повністю витрачає на придбання товару. Тому дохід дорівнюватиме *повній вартості* придбаних товарів *P*. Проблема раціональної поведінки споживача на ринку товарів полягає у вирішенні питання про те, які товари і в якій кількості він може придбати при його заданому доході і заданих цінах на товар. Математична модель поведінки споживача на ринку при купівлі товарів називається *моделлю споживчого вибору*.

У загальному випадку нехай є *n* різного виду товарів. Кількість *i*-того товару позначимо через x_i $(i = 1,2,...,n)$. Набір товарів, який купується на ринку відразу або протягом відрізка часу будемо розглядати як кошик, в якому лежать ці товари у відповідній кількості. Тривалість відрізка часу наповнення кошика визначена доходом за цей період. *Набір товарів* в кошику (споживчий набір) позначається і розглядається як *n*-мірний вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Множина всіх товарів, представлених в наборі, називається *простором товарів*. Для простоти часто будемо розглядати набір з двох товарів.

$$x = (x_1, x_2),$$

де x_1 – кількість одиниць одного товару;

x_2 – кількість одиниць іншого товару.

Кожен товар на ринку має свою ціну.Ціна одиниці i-го товару p_i. Всі ціни $p_i>0$, тобто додатні числа. Тоді вектор цін представлений як $P=(p_1, p_2,...,p_n)$.

У нашому випадку весь дохід споживача Q йде на придбання товару загальною вартістю P.

$$Q = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i = P.$$

Складаючи набір $x=(x_1, x_2,...,x_n)$ на суму $P=Q$, споживач здійснює свій вибір, виходячи зі своєї системи переваг.

Вважається, що про кожен товар споживач може сказати, що він переважніше іншого (товару). Відношення переваг *транзитивне*, тобто якщо набір товарів $A=(a_1,a_2)$ переважніше $B=(b_1,b_2)$, а набір B переважніше набору $C=(c_1,c_2)$, то набір A переважніше набору С. Однак система переваг є лише якісною оцінкою привабливості даного набору товару для споживача. Для математичного моделювання необхідно ввести кількісну оцінку.

1.2.2. Функція корисності та її властивості

В якості кількісної оцінки привабливості визначеного набору (x_1, x_2) на множині споживчих товарів приймається деяка функція $u=u(x_1, x_2,...,x_n)$ для n товарів або $u=u(x_1, x_2)$ для 2-х товарів називається *функцією корисності*.

Функція корисності представляється різними математичними (алгебраїчними) конструкціями (виразами). Найбільш часто використовуються функції виду

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta};$$

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}}{[x_1 + (\beta - \alpha)]^{\beta}};$$

$$u(x_1, x_2) = \log \frac{(x_1 - b_1)^{\alpha_1}}{(x_2 - b_2)^{\alpha_2}};$$

$$u(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{12} x_1 x_2;$$

$$u(x_1, x_2) = (x_1 - a_1)^{\alpha} \cdot (x_2 - b_2)^{\beta},$$

де $\alpha, \beta, a_1, a_2, b_1, b_2, b_{11}, b_{12}, b_{22}$ – постійні.

Відзначимо, що в окремому випадку функція корисності може збігатися з ціною набору споживчого кошика $u(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$.

В роботі [19] проф. Ястремським А.І. розглянута оригінальна функція корисності, що містить дві різні змінні - споживаний товар *x*, витрати праці для придбання товару *y*

$$u(x, y) = (x - a)^{\alpha} \cdot (b - y)^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

де a – мінімальна кількість товару (благ),

b – максимальний рівень витрат.

Розглянемо деякі загальні властивості функції корисності.

1. Кожен споживач має, взагалі кажучи, свою функцію корисності, але, якщо набір *A* переважніше набору *B*, то

$$u(A) > u(B) \qquad \text{при } A > B.$$

2. Зростання споживання (придбання) одного товару в наборі при сталості споживання іншого веде до зростання споживчої оцінки функції корисності

$$u(x_{12}, x_2) > u(x_{11}, x_2) \quad \text{при } x_{12} > x_{11},$$

$$u(x_1, x_{22}) > u(x_1, x_{21}) \quad \text{при } x_{22} > x_{21}.$$

3. Назвемо граничною корисністю товару частинні похідні

$$M_1 u(x_1, x_2) = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = u_1';$$

$$M_2 u(x_1, x_2) = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = u'_2 .$$

Зауважимо, що $u'_1 > 0$ і $u'_2 > 0$.

4. Відповідно до закону граничної корисності гранична корисність кожного товару зменшиться, якщо обсяг його споживання зростає:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = u''_{11} > 0 \qquad \text{при } u'_1 > 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = u''_{22} > 0 \qquad \text{при } u'_2 > 0.$$

5. Гранична корисність кожного товару збільшується, якщо зростає кількість іншого товару

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u''_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = u''_{21} > 0 .$$

Однак, ця властивість при моделюванні виконується не завжди.

Лінія, що з'єднує споживчі набори (x_1, x_2), що мають один і той же рівень задоволення потреб споживача, називається *лінією (кривої) байдужості*. Лінія байдужості відповідає постійному значенню функції корисності $u(x_1, x_2) = u_0 = const$. Множини ліній байдужості утворюють карту байдужості (Рис.1.1).

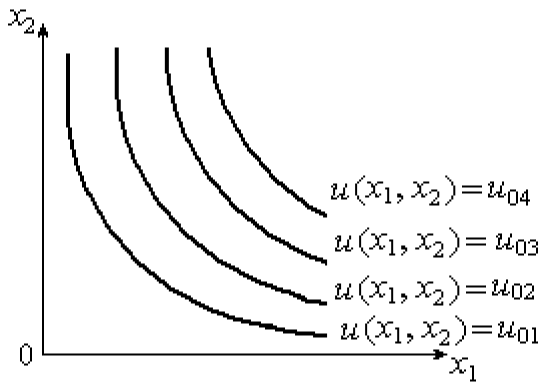


Рис. 1.1. – Схема карти ліній байдужості (u_{04}> u_{03}> u_{02}> u_{01}).

З визначення лінії байдужості маємо

$$du(x_1,x_2)=u_1'dx_1+u_2'dx_2=0,$$

звідки випливає рівність

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{u_1'}{u_2'}<0.$$

Іншими словами, функція $x_2=x_2(x_1)$ уздовж кривої байдужості є функція спадна

$$\frac{d\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{dx_1}=-\left[\frac{u_{11}''u_2'-u_1'u_{21}''}{(u_2')^2}\right]>0.$$

Крива байдужості завжди опукла вниз, тобто

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\operatorname{tg}\varphi,$$

де φ –кут нахилу дотичної до кривої $x_2(x_1)$.

Так як $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\approx\frac{dx_2}{dx_1}$, то $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\approx-\frac{u_1'}{u_2'}$.

Наприклад: $u(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2$;

$$p_1x_1+p_2x_2=Q.$$

Отримуємо систему:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x_2}{x_1}=\frac{p_1}{p_2}\\&p_1x_1+p_2x_2=Q\end{aligned}\right\},$$

з якої знайдемо, що

$$p_1x_1=p_2x_2=\frac{Q}{2}\text{ або }x_1=\frac{Q}{2p_1};\quad x_2=\frac{Q}{2p_2}.$$

У цьому випадку витрата на кожен товар становить половину доходу споживача.

Функції $x_1=x_1(p_1,p_2,Q)$; $x_2=x_2(p_1,p_2,Q)$ *називаються функціями попиту* на товари. Функція попиту має властивість *інваріантності* (незалежності) по відношенню до пропорційної зміни цін і доходу:

$$x_1(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda Q) = x_1(p_1, p_2, Q);$$
$$x_2(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda Q) = x_2(p_1, p_2, Q),$$

де $\lambda = \text{const}$.

1.2.3. Оптимізація вибору споживача для моделі Р. Стоуна.

Розглянемо завдання оптимізації вибору споживача для набору з n товарів. У даному випадку цільовою функцією є функція корисності $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$. Відповідний вектор цін має вигляд:

$$P = (p_1, p_2, ..., p_n).$$

Дохід споживача Q:

$$Q = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n = px.$$

Знайдемо оптимальний набір товарів $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, для якого досягається $\max u(x_1, ..., x_n)$.

Задачу вирішуємо за допомогою методу Лагранжа. Запишемо відповідну функцію Лагранжа

$$\Phi(x, \lambda) = u(x) + \lambda(px - Q) \ .$$

Необхідна умова досягнення локального екстремуму - рівність нулю частинних похідних функції Лагранжа

$$\begin{cases} \Phi'_x = u'_{x_i} + \lambda p_i = 0 \\ \Phi'_\lambda = px - Q = 0 \end{cases} \quad \text{для всіх } i = 1, ..., n.$$

Звідси випливає, що в точці локальної рівноваги для всіх i, j – в точці $x^\circ = (x^\circ{}_1, x^\circ{}_2, ..., x^\circ{}_n)$ – виконується рівність

$$\frac{u'_i}{u'_j} = \frac{p_i}{p_j}, \ \text{де} \ \ i, j = 1, 2, ..., n.$$

Таким чином, в точці оптимуму x° відношення граничних корисностей двох благ (товарів) дорівнює відношенню їх ринкових цін. Конкретизуємо вид функції корисності таким загальним видом, званим *функцією Р. Стоуна*

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i} \quad \text{або}$$

$$u(x) = (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdot (x_2 - a_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x_i - a_i)^{\alpha_i} \cdot \ldots \cdot (x_n - a_n)^{\alpha_n},$$

де a_i –мінімально необхідну кількість товару i-го блага, яке обов'язково купується і не є предметом вибору. Коефіцієнти $\alpha_i > 0$ показують відносну цінність (важливість) товарів (благ) для споживача.

Тоді $Q_0 = \sum_i p_i a_i$ – кількість грошей, необхідна для придбання обов'язкового набору.

У випадку функції корисності Р. Стоуна маємо

$$u'_i = \frac{\alpha_i}{(x_i - a_i)} (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdot (x_2 - a_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x_i - a_i)^{\alpha_i} \cdot \ldots \cdot (x_n - a_n)^{\alpha_n} =$$

$$= \frac{\alpha_i}{(x_i - a_i)} u(x);$$

$$\Phi'_{x_i} = u'_{x_i} + \lambda p_i = \frac{\alpha_i}{(x_i - a_i)} + \lambda p_i = 0.$$

Тепер знайдемо кількість i-го товару в наборі

$$x_i = a_i - \frac{\alpha_i u(x)}{\lambda p_i} \quad \text{або}$$

$$p_i x_i = a_i p_i - \frac{\alpha_i}{\lambda} u(x).$$

Підсумуємо вартості товарів і отримаємо

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i - \frac{u(x)}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i .$$

Врахуємо, що

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = Q; \quad \sum_{i=1}^{n} p_i a_i = Q_0$$

і знайдемо

$$\frac{u(x)}{\lambda} = -\frac{(Q - Q_0)}{\sum \alpha_i}.$$

Тепер знайдемо функцію *i*-го товару

$$x_i = a_i - \frac{\alpha_i}{p_i} \cdot \frac{u(x)}{\lambda} = a_i - \frac{\alpha_i}{\sum \alpha_i} \cdot \frac{(Q - Q_0)}{p_i}.$$

В окремому випадку, якщо $a_i = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$, то $x_i = \dfrac{Q}{np_i}$,

де дохід ділиться на *n* рівних частин і становить попит на *i*-тий товар.

1.2.4. Оптимізація набору з товару першої необхідності і товару - предмета розкоші

Розглянемо функцію корисності вибору у вигляді [3]

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_1^a \cdot x_2^{b-a}}{(x_1 + b - a)^b},$$

де a, b – постійні;

x_1 – кількість товару першої необхідності;

x_2 – кількість предметів розкоші.

Вибір товарів відбувається при бюджетному обмеженні

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \le Q.$$

Вирішимо задачу оптимального набору товарів споживачам, що визначається досягненням $\max u(x_1, x_2)$.

Складемо функцію Лагранжа

$$\Phi(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - Q).$$

Знайдемо її перші частинні похідні і прирівняємо їх до нуля

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1' = u_1' + \lambda p_1 = 0; \\ &\Phi_2' = u_2' + \lambda p_2 = 0; \\ &\Phi_\lambda' = p_1 x_1 + p_2 x_2 - Q = 0, \end{aligned}\right\}$$

де

$$u_1' = x_2^{b-a}\left[a x_1^{a-1}(x_1 + b - a)^b - b x_1^a (x_1 + b - a)^{b-a}\right] = u(x_1, x_2)\frac{(x_1 - a)(a - b)}{x_1(x_1 + b - a)};$$

$$u_2' = x_1^a (x_1 + b - a)^{-b} \cdot x_2{}^{b-a}\,\frac{b-a}{x_2} = u(x_1, x_2)\frac{b-a}{x_2}.$$

Підставляючи вирази для u_1' і u_2' в умови досягнення $\max u$, одержуємо

$$\left.\begin{aligned} &p_1 x_1 = \frac{u}{\lambda} \cdot \frac{(b-a)(x_1 - a)}{(x_{1-a} + b)}; \\ &p_2 x_2 = -\frac{u}{\lambda}(b-a); \\ &p_1 x_1 + p_2 x_2 = Q. \end{aligned}\right\}$$

Складаючи перші дві рівності, одержуємо співвідношення

$$\frac{u}{\lambda} \cdot \frac{b(b-a)}{[x_1 - (b-a)]} = -Q,$$

звідки знайдемо

$$x_1 = -(b-a)\left[1 + \frac{b}{Q} \cdot \frac{u}{\lambda}\right].$$

Із другої і третьої рівності системи знайдемо величину

$$\frac{u}{\lambda} = \frac{Q - p_1 x_1}{b-a},$$

підставляючи яку у вираз для x_1, отримуємо кількість першого товару

$$x_1 = \frac{aQ}{Q+bp_1}.$$

Тепер знайдемо кількість другого товару в споживчому наборі

$$x_2 = \frac{Q-p_1x_1}{p_2} = \frac{Q}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{aQ}{Q+bp_1}\right) = \frac{Q[Q+p_1(b-a)]}{(Q+bp_1)p_2}.$$

Зауважимо, що функція $x_1(p_1Q) = \frac{aQ}{Q+bp_1}$, є типовою *функцією попиту для товару першої необхідності*, а функція $x_2(p_2Q) = \frac{Q[Q+p_1(b-a)]}{(Q+bp_1)p_2}$ є типовою *функцією попиту для предметів розкоші.*

Дійсно, знайдемо границі функцій попиту при зростанні доходу Q

$$\lim_{Q\to\infty} x_1(p_1,Q) = \lim_{Q\to\infty} x_1\left(\frac{aQ}{Q+bp_1}\right) = a = \text{const};$$

$$\lim_{Q\to\infty} x_2(p_2,Q) = \lim_{Q\to\infty} x_1 \frac{Q[Q+p_1(b-a)]}{[Q+p_1b]p_2} = \frac{1}{p_2}\lim_{Q\to\infty} Q \to \infty.$$

Тепер знайдемо границі функцій попиту при прямуванні ціни до нуля

$$\lim_{p_1\to 0} x_1(p_1,Q) = \lim_{p_1\to 0} x_1\left(\frac{aQ}{Q+bp_1}\right) = a = \text{const};$$

$$\lim_{p_2\to 0} x_2(p_2,Q) = \lim_{p_2\to 0} x_1 \frac{Q[Q+p_1(b-a)]}{[Q+p_1b]p_2} \to \infty.$$

В обох випадках границя попиту для першого товару прямує до кінцевого числа, що характерно для попиту товару першої необхідності. Границя попиту другого товару прямує до нескінченності, що характерно для попиту предметів розкоші.

1.2.5. Взаємозамінність товарів у наборі. Ефект компенсації

Розглянемо випадок (задачу) про компенсування зміни ціни на один товар в наборі з двох видів товару. При компенсованій зміні ціни товару вважаємо, що одночасно відбувається зростання доходу, що дозволяє споживачеві підтримувати колишній рівень добробуту. З точки зору математичної моделі при цьому функція корисності зберігає своє значення, наприклад, $u = u_0 = \text{const}$.

Вважаємо, що споживач вирішив завдання оптимізації набору з двох товарів для функції корисності

$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, де $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$;

$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ при $Q = p_1 x_1 + p_2 x_2$.

Розв'язок завдання має вже відомий нам вигляд

$$x_1(p_1, Q) = \frac{Q}{2p_1};$$

$$x_2(p_2, Q) = \frac{Q}{2p_2};$$

$$u(x_1, x_2) = u_0 = \frac{Q}{4p_1 p_2}.$$

Далі допустимо, що змінилася ціна одного товару, і нові ціни мають вигляд

$$\overline{p}_1 = kp_1, \quad \overline{p}_2 = p_2,$$

де $p_1,\ p_2$ – старі ціни;

$\overline{p}_1,\ \overline{p}_2$ – нові ціни.

Поставимо задачу про компенсацію шляхом збільшення витрати $\overline{Q} = Q + \Delta Q$ і визначення нового набору товарів $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ при збереженні значення функції корисності

$$u(x_1, x_2) = u(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = u_0.$$

Остання рівність в даному випадку буде мати вигляд

$$x_1 \cdot x_2 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2,$$

де $\bar{x}_1 = \dfrac{\overline{Q}}{2\bar{p}_1} = \dfrac{\overline{Q}}{2kp_1}$;

$$\bar{x}_2 = \frac{\overline{Q}}{2\bar{p}_2} = \frac{\overline{Q}}{2p_2}.$$

Тоді

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 = \frac{\overline{Q}^2}{4\bar{p}_1\bar{p}_2} = \frac{\overline{Q}^2}{4kp_1p_2}.$$

З рівності $x_1 \cdot x_2 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$ слідує

$$\frac{\overline{Q}^2}{4\bar{p}_1\bar{p}_2 k} = \frac{Q^2}{4p_1p_2},$$

Звідки знайдемо дохід, що змінився $\overline{Q}$ $\overline{Q}^2 = kQ^2$ або $\overline{Q} = Q\sqrt{k}$, а значить, знайдемо зміну доходу

$$\Delta Q = \overline{Q} - Q = Q\left(\sqrt{k} - 1\right).$$

Тепер можна знайти складові нового набору товарів

$$\bar{x}_1 = \frac{\overline{Q}}{2\bar{p}_1} = \frac{Q\sqrt{k}}{2kp_1} = \frac{1}{\sqrt{k}} x_1 = \frac{\sqrt{k}}{k} x_1;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\overline{Q}}{2\bar{p}_2} = \frac{Q\sqrt{k}}{2p_2} = \sqrt{k} \cdot x_2$$

або у змінах кількості товарів

$$\Delta x_1 = \bar{x}_1 - x_1 = x_1\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - 1\right) = -\frac{\sqrt{k} - 1}{\sqrt{k}} \cdot x_1 < 0;$$

$$\Delta x_2 = \bar{x}_2 - x_2 = x_2\left(\sqrt{k} - 1\right) > 0.$$

Розглянемо завдання компенсації в більш загальному випадку

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2},$$

$$Q = p_1x_1 + p_2x_2.$$

Оптимізуючи набір для заданих значень Q, p_1, p_2, одержуємо

$$x_1(p_1, Q) = \frac{Q}{p_1(1 + \alpha_2/\alpha_1)};$$

$$x_2(p_2, Q) = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \cdot \frac{Q}{p_2(1 + \alpha_2/\alpha_1)}.$$

Зауважимо, що при $\alpha_2 = \alpha_1$, маємо

$$x_1(p_1, Q) = \frac{Q}{2p_1};$$

$$x_2(p_2, Q) = \frac{Q}{2p_2},$$

що збігається з результатами попереднього випадку.

Для змінених значень $\overline{Q}, \overline{p}_1, \overline{p}_2$, де $\overline{p}_1 = kp_1$, $\overline{p}_2 = p_2$, отримуємо складові нового набору $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$

$$\overline{x}_1 = \frac{\overline{Q}}{\overline{p}_1(1 + \alpha_2/\alpha_1)} = \frac{\overline{Q}}{kp_1(1 + \alpha_2/\alpha_1)};$$

$$\overline{x}_2 = \frac{\overline{Q}}{\overline{p}_2(1 + \alpha_2/\alpha_1)} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\overline{Q}}{p_2(1 + \alpha_2/\alpha_1)} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

В силу сталості величини функції корисності

$$u(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = u(x_1, x_2) = u_0,$$

Одержуємо

$$\overline{x}_1^{\alpha_1} \cdot \overline{x}_2^{\alpha_2} = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2}$$

або

$$\left(\frac{\overline{x}_1}{x_1}\right)^{\alpha_1} = \left(\frac{\overline{x}_2}{x_2}\right)^{\alpha_2}.$$

Тепер знайдемо

$$\frac{\overline{x}_1}{x_1} = \left[\frac{\overline{Q}}{\overline{p}_1(1 + \alpha_2/\alpha_1)}\right] \Bigg/ \left[\frac{Q}{p_1(1 + \alpha_2/\alpha_1)}\right] = \frac{\overline{Q}}{kQ};$$

$$\frac{\overline{x}_2}{x_2}=\left[\frac{\overline{Q}}{p_2\left(1+\alpha_2/\alpha_1\right)}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]\Bigg/\left[\frac{Q}{\overline{p}_2\left(1+\alpha_2/\alpha_1\right)}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]=\frac{Q}{\overline{Q}}.$$

Підставляючи знайдені співвідношення в рівність $\left(\frac{\overline{x}_1}{x_1}\right)^{\alpha_1}=\left(\frac{\overline{x}_2}{x_2}\right)^{\alpha_2}$

, одержуємо, що

$$\left(\frac{\overline{Q}}{Q}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}=k^{\alpha_1}.$$

З останнього співвідношення знайдемо новий дохід

$$Q=k^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}\cdot Q;$$

$$\Delta Q=\overline{Q}-Q=Q\left[k^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}-1\right].$$

А тепер знайдемо і складові нового набору товарів.

$$\overline{x}_1=\frac{\overline{Q}}{\overline{p}_1\left(1+\alpha_2/\alpha_1\right)}=k^{-\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\right)}\cdot x_1;$$

$$\overline{x}_2=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\frac{\overline{Q}}{\overline{p}_2\left(1+\alpha_2/\alpha_1\right)}=k^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}\cdot x_2.$$

Тоді

$$\Delta x_1=\overline{x}_1-x_1=\left[k^{-\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\right)}-1\right]\cdot x_1;$$

$$\Delta x_2=\overline{x}_2-x_2=\left[k^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}-1\right]\cdot x_2.$$

У випадку $\alpha_2+\alpha_1=1$ отримуємо

$$\overline{Q}=k^{\alpha_1}\cdot Q;\ \ \Delta Q=\left(k^{\alpha_1}-1\right)\cdot Q;$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{k^{\alpha_2}} \cdot x_1; \quad \Delta x_1 = \left(\frac{1}{k^{\alpha_2}} - 1\right) \cdot x_1 = \left(k^{\alpha_1 - 1} - 1\right) \cdot x_1;$$

$$\bar{x}_2 = k^{\alpha_1} \cdot x_2; \quad \Delta x_2 = \left(k^{\alpha_1} - 1\right) \cdot x_2 = \left(k^{\alpha_1} - 1\right) \cdot x_2.$$

Завдання для самоперевірки та контролю засвоєння знань.

Розрахувати споживчий кошик із двох товарів (x_1, x_2) з вектором цін $p = (p_1, p_2)$ за функцією корисності $u(x_1, x_2) = \dfrac{1}{b_1(a_1 - x_1)^2 + b_2(a_2 - x_2)^2}$ і функції витрат $Q = p_1 x_1 + p_2 x_2$ при $\max u$.

Відповідь:

$$x_1 = a_1 + \frac{p_1\left(Q - (a_1 p_1 + a_2 p_2)\right)}{2b_1\left(\dfrac{p_1^2}{2b_1} + \dfrac{p_2^2}{2b_2}\right)};$$

$$x_2 = a_2 + \frac{p_2\left(Q - (a_1 p_1 + a_2 p_2)\right)}{2b_2\left(\dfrac{p_1^2}{2b_1} + \dfrac{p_2^2}{2b_2}\right)}.$$

1.3. Моделювання поведінки виробника товару

1.3.1. Основні поняття виробничої системи

У ринковій економіці існують три основних учасника: споживач (покупець), виробник товарів (послуг) і посередник між ними - продавець (торговець). Однак у методології математичного моделювання прийнято, що функції продавця зазвичай виконує сам споживач. Тому будемо розглядати ринок двох учасників: виробник і споживач. Тут розглянемо модель поведінки виробника товару.

Роль виробника товарів полягає в ухваленні рішення (вирішення завдання) про виробництво (випуск) товарів та реалізації виробленої продукції, виходячи з умови отримання *виробником максимального прибутку*. Виробник повинен зрозуміти (розрахувати або вгадати), що хоче споживач, і задовольнити його потреби.

Схематично виробничу систему (рис.1.2) можна зобразити як об'єкт, на вході якого фігурує вектор витрат

$$x = x(x_1, x_2, x_3),$$

де x_1, x_2, x_3 – ресурси;

x_1 – основний капітал;

x_2 – трудові ресурси;

x_3 – сировинні ресурси.

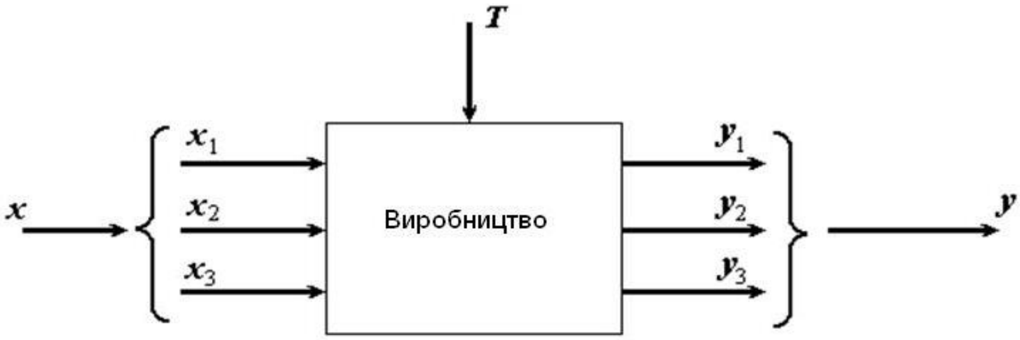


Рис.1.2 – Схема виробничої системи

На виході системи фігурує вектор випуску продукції $y = y(y_1, y_2, y_3)$, де y_1, y_2, y_3 - види продукції, що випускається. Крім того, виробництво продукції визначається величиною T - технологією виробництва. Звичайно в якості складових вектора витрат використовується дві величини:

– обсяг фондів у вартісному вираженні $(x_1 = K)$;
– обсяг трудових ресурсів $(x_2 = L)$ також у вартісному вираженні.

Крім того, передбачається, що y - випуск продукції у вартісному чи натуральному вираженні.

Найчастіше ціни на ресурси (K, L) вводяться у явному вигляді. Тоді функція витрат має вигляд

$$Q = p_1 K + p_2 L,$$

де p_1 – ціна першого ресурсу;

p_2 – ціна другого ресурсу.

Природно вважати, що обсяг виробничої продукції y при заданій технології T залежить від витрат $x(Q)$.

1.3.2. Виробнича функція та її властивості

У найзагальнішому вигляді виробнича функція виражає залежність обсягу випущеної (виробленої) продукції від обсягів використовуваних ресурсів

$$y = y(x),$$

де x – обсяг витрат;

y – обсяг продукції.

Приклад: $y = ax^b$, де a,b –параметри.

Графік кривої $y = ax^b$ наведено на рис. 1.3.

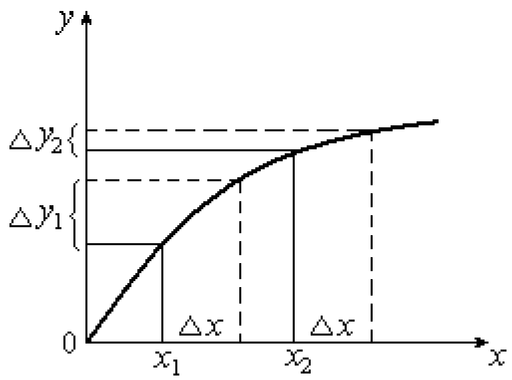


Рис.1.3 – Типова крива виробничої функції

Залежність $y = ax^b$ (рис.1.3) добре відображає <u>*закон спадної ефективності*</u> - додаткові витрати Δx з ростом x $(x_2 > x_1)$ дають все менший приріст продукції $(\Delta y_2 < \Delta y_1)$. Дійсно, маємо $\Delta y = ab \cdot x^{b-1} \cdot \Delta x$,

звідки $$\Delta y_1 = ab \cdot x_1^{b-1} \cdot \Delta x;$$

$$\Delta y_2 = ab \cdot x_2^{b-1} \cdot \Delta x.$$

Знайдемо відношення $\Delta y_2 / \Delta y_1 = (x_2 / x_1)^{b-1} = (x_1 / x_2)^{1-b}$

При $b<1$ и $x_2 > x_1$, отримуємо $\Delta y_2 < \Delta y_1$.

Виробнича функція однієї змінної $y = y(x)$ називається <u>*однофакторною*</u>. Виробнича функція декількох змінних $y = y(x_1,...,x_n)$ називається <u>*багатофакторною*</u>. Зазвичай розглядається виробнича функція двох змінних

$$y = y(K, L),$$

де *К* – обсяг використовуваного основного капіталу;

L – жива праця у вартісному вираженні.

Виробнича функція називається <u>*статичною*</u>, якщо x_1, x_2, y не залежать від часу, і <u>*динамічною*</u>, якщо вони залежать від часу t.

За своїм математичним виглядом виробнича функція може бути лінійною і нелінійною:

$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ – лінійна функція;

$y = a_0 x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2}$ – нелінійна функція.

Якщо в останньому поданні припускати, що

$$y = y_0 + y_1 = y_0\left(1 + y_1/y_0\right);$$

$$x_1 = x_{01} + x_{11} = x_{01}\left(1 + x_{11}/x_{01}\right);$$

$$x_2 = x_{02} + x_{12} = x_{02}\left(1 + x_{12}/x_{02}\right),$$

де $y_1/y_0 <<1$; $x_{11}/x_{01} <<1$; $x_{12}/x_{02} <<1$, а $y = a_0 x_{01}^{a_1} \cdot x_{02}^{a_2}$,

то використовуючи розкладання в ряди Тейлора і залишаючи лінійні члени, отримуємо

$$y_1 \approx y_0 + \left(a_1 \frac{y_0}{x_{01}}\right) \cdot x_{11} + \left(a_2 \frac{y_0}{x_{02}}\right) \cdot x_{12},$$

тобто отримуємо лінійну функцію.

Розглянемо деякі формальні властивості виробничої функції.

1. $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$ и $y \geq 0$. Ресурси та обсяг випуску продукції мають тільки позитивні значення.

2. $y(0,0) = y(0, x_2) = y(x_1, 0) = 0$. Без ресурсів немає випуску продукції.

3. $\left\{\begin{array}{ll} \text{При} \quad x_1 = \text{const} & \dfrac{\partial y}{\partial x_2} > 0; \\ \text{при} \quad x_2 = \text{const} & \dfrac{\partial y}{\partial x_1} > 0 \end{array}\right\}$. З ростом витрат одного ресурсу і при постійному значенні іншого обсяг випуску зростає.

4. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i} \leq 0; \quad i = 1, 2$. Закон спадної ефективності.

5. $y(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^q y(x_1, x_2)$ – властивість однорідності виробничої функції.

Множина точок (лінія рівня) $y(x_1, x_2) = y_0 = \text{const}$ називається <u>*ізоквантой*</u> виробничої функції. Рівняння ізокванти можна записати у вигляді

$$x_2 = x_2(x_1, y_0).$$

Нехай $y = f(x) = f(x_1, x_2)$. Тоді вводяться характеристики:

$A_i = \dfrac{f(x)}{x_i}$ $(i = 1, 2)$ називається <u>*середньою продуктивністю*</u> i-го ресурсу;

$M_i = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2)$ називається <u>*граничною*</u> <u>*(маргінальною)*</u> <u>*продуктивністю.*</u>

За означенням ізокванти $y(x_1, x_2) = y_0 = \text{const}$ маємо

$$d\,y = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} d\,x_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} d\,x_2 = 0 \,.$$

Звідки

$$d\,x_j = -\frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} d\,x_i \;\; (i,\ j = 1,2)$$

або

$$\frac{d\,x_j}{d\,x_i} = -\frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}}.$$

Знайдемо граничну норму заміни одного ресурсу іншим

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} \;\; (j \neq i).$$

Нагадаємо, що еластичністю функції $y = y(x)$ по y називається вираз $F_x(y) = \dfrac{xy'(x)}{y(x)}$, де $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Тоді еластичності деяких елементарних функцій будуть мати вигляд

$$E_x\left(x^{\alpha}\right) = \alpha;$$

$$E_x\left(a^{x}\right) = x \ln a;$$

$$E_x\left(e^{x}\right) = x;$$

$$E_x(ax+b) = \frac{1}{1+\dfrac{b}{ax}};$$

$$E_x(a \ln(bx)) = \frac{1}{\ln(bx)}.$$

Якщо є дві функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$, то

$$E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v);$$

$$E_x(u/v) = E_x(u) - E_x(v);$$

$$E_x(u+v) = \frac{uE_x(u) + vE_x(v)}{u+v}.$$

Еластичність виробничої функції $y(x_1, x_2)$ по ресурсах

$$E_{x_1}(y) = \frac{x_1}{y}\frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_1} = E_1;$$

$$E_{x_2}(y) = \frac{x_2}{y}\frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_2} = E_2;$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{x_1 \cdot y_1'}{x_2 \cdot y_2'}, \text{ де } y_1' = \frac{\partial y}{\partial x_1}; \;\; y_2' = \frac{\partial y}{\partial x_2}.$$

Тепер граничну норму заміни ресурсів можна представити у вигляді

$$R_{1,2} = \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{x_2}{x_1}; \;\; R_{2,1} = \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{x_1}{x_2}.$$

Приклад: якщо $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, то

$$R_{1,2} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{x_2}{x_1}; \;\; R_{2,1} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{x_1}{x_2}.$$

1.3.3. Виробнича функція Кобба-Дугласа

Виробнича функція Кобба-Дугласа названа за іменами двох американських економістів, що запропонували її в 1929 році у вигляді

$$Y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2},$$

де $a_1 + a_2 = 1$.

Зазвичай у практичних додатках $x_1 = K$, $x_2 = L$. Тоді

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}, \quad a_1 + a_2 = 1,$$

де K – обсяг використовуваного основного капіталу,

L – витрати живої праці.

Простий фізичний зміст мають відносні величини:

$y_L = \dfrac{Y}{L}$ – продуктивність праці;

$y_K = \dfrac{Y}{K}$ – продуктивність капіталу;

$k = \dfrac{K}{L}$ – капіталоозброєнність праці;

K/Y, L/Y – капіталомісткість, трудомісткість випуску.

Тепер виробничу функцію Кобба-Дугласа можна записати у вигляді

$$y = a_0 k^{a_1}, \ \left(y = Y/L\right).$$

Дійсно, знайдемо

$$\frac{Y}{L} = a_0 K^{a_1} L^{a_2 - 1} = a_0 \left(\frac{K}{L}\right)^{a_1},$$

$$\left(\frac{Y}{L}\right) = a_0 \left(\frac{K}{L}\right)^{a_1}, \text{ але } \frac{Y}{L} = y, \ \frac{K}{K} = k.$$

Тоді $y = a_0 k^{a_1}$.

Середні продуктивності по ресурсах

$$A_1 = \frac{Y}{x_1} = \frac{Y}{K} = a_0 \left(\frac{L}{K}\right)^{a_2};$$

$$A_2 = \frac{Y}{x_2} = \frac{Y}{L} = a_0 \left(\frac{K}{L}\right)^{a_1}.$$

Граничні продуктивності по ресурсах

$$M_1 = Y_1' = a_1 A_1;$$

$$M_2 = Y_2' = a_2 A_2.$$

Приватні еластичності випуску по ресурсах

$$E_i = \frac{x_i}{Y(x)} \frac{\partial Y(x)}{\partial x_i} = \frac{M_i}{A_i} \quad (i = 1,2);$$

$$E_1 = \frac{M_1}{A_1} = a_1; \quad E_2 = \frac{M_2}{A_2} = a_2.$$

Еластичність виробництва

$$E = E_1 + E_2 = a_1 + a_2 = 1.$$

Гранична норма заміни одного ресурсу іншим

$$R_{12} = \frac{a_1}{a_2}\frac{L}{K}; \;\; R_{21} = \frac{a_2}{a_1}\frac{K}{L}.$$

Перевіримо виконання властивості однорідності для виробничої функції Кобба-Дугласа. Маємо функцію

$$Y(K,L) = a_0 K^{a_1} L^{a_2}, \quad a_1 + a_2 = 0.$$

Знайдемо

$$Y(\lambda K, \lambda L) = a_0 (\lambda K)^{a_1} (\lambda L)^{a_2} = a_0 \lambda^{a_1 + a_2} K^{a_1} L^{a_2} = a_0 \lambda K^{a_1} L^{a_2} = \lambda Y(K,L).$$

Отже,

$$Y(\lambda K, \lambda L) = \lambda Y(K,L).$$

Отримаємо рівняння ізокванти. Маємо

$$y_0 = a_0 K^{a_1} L^{a_2} = const.$$

Знайдемо $K = K(L, x_0)$

$$K = \left(\frac{Y_0}{a_0 L^{a_2}}\right)^{\frac{1}{a_1}} = \left(\frac{Y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{a_1}} \frac{1}{L^{\frac{a_2}{a_1}}}.$$

Позначимо $\left(\frac{Y_0}{a_0}\right)^{\frac{1}{a_1}} = b_0$, $\frac{a_2}{a_1} = \beta_0$, $\left\{\begin{matrix} a_2 = a_1, & \beta_0 = 1 \\ a_2 = 2a_1, & \beta_0 = 2 \\ a_2 = 3a_1, & \beta_0 = 3 \end{matrix}\right\}$.

Тоді

$$K(L, Y_0) = b_0 L^{-\beta_0}.$$

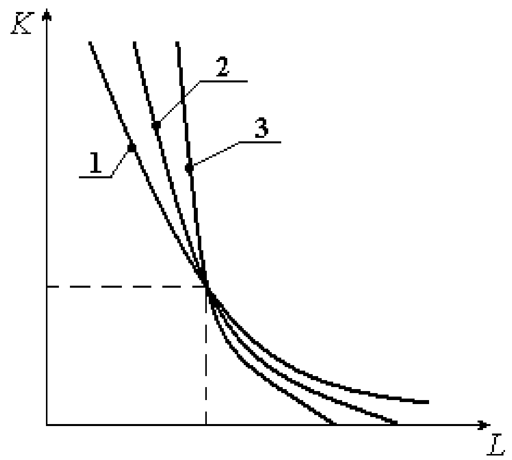


Рис.1.4 – Ізокванти виробничої функції Кобба-Дугласа

$$1-\beta_0=1;\quad 2-\beta_0=2;\quad 3-\beta_0=3$$

Знайдемо похідну

$$\frac{dK(L)}{dL}=-\frac{a_2}{a_1}\left(\frac{Y_0}{a_0L}\right)^{\frac{1}{a_1}}<0.$$

Тоді рівняння ізокванти можна представити у вигляді

$$\frac{K}{L}=-\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\frac{dK}{dL}\ \text{або}\ \frac{dK}{dL}=-\frac{a_2}{a_1}\frac{K}{L}.$$

У конструкції (поданні) виробничої функції Кобба-Дугласа врахуємо вплив науково-технічного прогресу на технологію виробництва, вважаючи

$$a_0=A_0e^{\gamma_0 t},$$

де γ_0 – показник (темп) приросту продукції,

A_0 – постійна.

Тоді отримуємо

$$Y(t)=A_0e^{\gamma_0 t}\cdot K^{a_1}(t)L^{a_2}(t),\quad a_1+a_2=1.$$

Прологарифмуємо обидві частини рівності

$$\ln Y=\ln A_0+\gamma_0 t+a_1\ln K+a_2\ln L.$$

Знайдемо повний диференціал приросту продукції

$$d(\ln Y) = \gamma_0 dt + a_1 d(\ln K) + a_2 d(\ln L);$$

$$\frac{dY}{Y} = \gamma_0 dt + a_1 \frac{dK}{K} + a_2 \frac{dL}{L}.$$

Поділимо всі члени рівності на dt

$$\frac{Y_t'}{Y} = a_1 \frac{K_t'}{K} + a_2 \frac{L_t'}{L} + \gamma_0.$$

Вважаємо, що $\frac{Y_t'}{Y} = y_0$, $\frac{K_t'}{K} = k_0$, $\frac{L_t'}{L} = l_0$, де y_0, k_0, l_0 – постійні величини. Тоді отримуємо рівняння

$$y_0 = a_1 k_0 + a_2 l_0 + \gamma_0,$$

яке називається рівнянням Кобба-Дугласа в *темповому* записі.

Зауважимо, що в даному випадку виробнича функція Кобба-Дугласа описує стаціонарний процес зростання (розвитку) виробничої системи. Йому відповідає алгебраїчне рівняння темпового запису. Тому дану математичну модель виробничої системи слід вважати перехідною від статичної моделі до динамічної. Такі процеси називаються *квазістатичними.* При цьому маємо

$$Y(t) = Y_0 e^{y_0 t};$$

$$K(t) = K_0 e^{k_0 t};$$

$$L(t) = L_0 e^{l_0 t},$$

де $y_0 = a_1 k_0 + a_2 l_0 + \gamma_0$, $Y_0 = Y(0)$, $K_0 = K(0)$, $L_0 = L(0)$.

Виробнича функція Кобба-Дугласа може бути записана в диференціальній формі

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dK}{dt} K + \frac{dL}{dt} L,$$

де $K(t), L(t)$ – функції достатнього широкого класу.

1.3.4. Теорія фірми. Завдання оптимізації виробництва

Назвемо <u>*доходом*</u> (виручкою) фірми на певному часовому періоді добуток загального обсягу Y продукції, що випускається фірмою, на ринкову ціну цієї продукції p_0, тобто

$$R = p_0 Y .$$

<u>*Витрати*</u> фірми - виплати фірми за той же період часу, які включають усі види витрат

$$Q = p_1 K + p_2 L ,$$

де p_1, p_2 – ціни на основні ресурси.

<u>*Прибуток*</u> фірми - різниця між отриманим доходом фірми і витратами виробництва

$$W = R - Q ,$$

$$W = p_0 Y(K, L) - (p_1 K + p_2 L),$$

де $Y(K, L)$ – виробнича функція фірми.

У теорії фірми прийнято вважати, що, як правило, фірма на ринкові ціни (p_0, p_1, p_2) впливати не може.

Основна мета фірми - максимізація прибутку шляхом раціонального розподілу використовуваних ресурсів (K, L). Проте у ряді випадків можуть виникати інші завдання:

- отримання max обсягу продукції, наприклад, при держзамовленні;
- досягнення min витрат при заданому обсязі продукції.

Множина точок (лінія) рівня $Q = Q_0 = \text{const}$ називається ізокостною. Рівняння ізокости

$$Q_0 = p_1 K + p_2 L = \text{const}$$

або

$$K(Q_0, L) = \frac{Q_0 - p_2 L}{p_1}.$$

Задача 1.1. Знайти max прибутку без обмеження витрат.

$$W(K,L) = p_0 Y(K,L) - Q(K,L) = p_0 a_0 K^{a_1} L^{a_2} - p_1 K - p_2 L.$$

Для знаходження точки екстремуму знайдемо частинні похідні $\frac{\partial W}{\partial K}, \frac{\partial W}{\partial L}$ і прирівняємо їх до нуля.

$$\frac{\partial W}{\partial K} = p_0 a_0 a_1 K^{a_1 - 1} L^{a_2} - p_1 = 0;$$

$$\frac{\partial W}{\partial L} = p_0 a_0 a_2 K^{a_1} L^{a_2 - 1} - p_2 = 0$$

або, враховуючи, що $a_1 - 1 = -a_2$, $a_2 - 1 = -a_1$, отримуємо

$$\left. \begin{aligned} p_0 a_0 a_1 \left(\frac{L}{K}\right)^{a_2} &= p_1 \\ p_0 a_0 a_2 \left(\frac{K}{L}\right)^{a_1} &= p_2 \end{aligned} \right\},$$

звідки отримуємо співвідношення ресурсів

$$\frac{L}{K} = \frac{p_1 a_2}{p_2 a_1}.$$

При цьому витрати і дохід складуть

$$Q_0 = p_1 K + p_2 L = p_1 K + p_2 \frac{p_1 a_2}{p_2 a_1} K = p_1 \frac{K}{a_1};$$

$$W_0 = \frac{p_1 K}{a_1} \left[\frac{p_0}{p_2} a_0 a_2 \left(\frac{p_2 a_1}{p_1 a_2} \right)^{a_1} - 1 \right] = Q_0 \left[p_0 a_0 \left(\frac{a_2}{p_2} \right)^{a_2} \left(\frac{a_1}{p_1} \right)^{a_1} - 1 \right].$$

Задача 1.2. Знайти max прибутку при обмеженні витратної частини

$$W(K,L) = p_0 Y(K,L) - Q_0,$$

де $Q_0 = p_1 K + p_2 L = \text{const}$, $Y(K,L) = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$.

Складемо функцію Лагранжа

$$\Phi(L,K,\lambda)= p_0Y(K,L)+\lambda(Q-(p_1K+p_2L));$$

або

$$\Phi(L,K,\lambda)= p_0a_0K^{a_1}L^{a_2}+\lambda(Q-(p_1K+p_2L)).$$

Для вирішення завдання знайдемо частинні похідні Φ'_K, Φ'_L, Φ'_λ і прирівняємо їх до нуля

$$\left.\begin{aligned} &p_0a_0a_1\left(\frac{L}{K}\right)^{a_2}-\lambda p_1=0;\\ &p_0a_0a_2\left(\frac{K}{L}\right)^{a_1}-\lambda p_2=0;\\ &Q_0-(p_1K+p_2L)=0. \end{aligned}\right\}$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знайдемо

$$L=\frac{a_2}{p_2}Q_0;\;\; K=\frac{a_1}{p_1}Q_0;$$

$$W_0(K,L)= p_0a_0\left(\frac{a_1}{p_1}Q_0\right)^{a_1}\left(\frac{a_2}{p_2}Q_0\right)^{a_2}-Q_0=Q_0\left[p_0a_0\left(\frac{a_1}{p_1}Q_0\right)^{a_1}\left(\frac{a_2}{p_2}Q_0\right)^{a_2}-1\right]$$

Задача 1.3. Знайти min витрат при обмеженні обсягу виробництва

$$Q(P,K)= p_1K+p_2L;$$

$$a_0K^{a_1}L^{a_2}\le Y_0=\text{const};\; a_1+a_2=1.$$

Складемо функцію Лагранжа

$$\Phi(L,K,\lambda)=(p_1K+p_2L)+\lambda p_0\left(Y_0-a_0K^{a_1}L^{a_2}\right)$$

і знайдемо її частинні похідні по K,L,λ

$$\Phi'_K=p_1-\lambda p_0a_0a_1\left(\frac{L_0}{K_0}\right)^{a_2}=0;$$

$$\Phi'_L = p_2 - \lambda p_0 a_0 a_2 \left(\frac{L_0}{K_0} \right)^{a_1} = 0;$$

$$\Phi'_\lambda = y_0 - a_0 K_0^{a_1} L_0^{a_2} = 0.$$

Отримана система рівнянь зводиться до системи

$$\left. \begin{array}{l} Y_0 = a_0 K_0^{a_1} L_0^{a_2} \\ \dfrac{L_0}{K_0} = \dfrac{p_1 a_2}{p_2 a_1} \end{array} \right\},$$

де L_0, K_0 –оптимальні значення ресурсів, які знайдемо у вигляді

$$K_0 = \frac{Y_0}{a_0} \cdot \left(\frac{p_2 a_1}{p_1 a_2} \right)^{a_2};$$

$$L_0 = \frac{Y_0}{a_0} \cdot \left(\frac{p_1 a_2}{p_2 a_1} \right)^{a_1};$$

$$Q_0 = \frac{Y_0}{a_0} \cdot \left(\frac{p_2}{a_2} \right)^{a_2} \left(\frac{p_1}{a_1} \right)^{a_1}.$$

1.3.5. Оптимізація роботи фірми щодо цільової функції Ястремського

Вище при оптимізації роботи фірми нами в якості цільової функції використовувалася функція прибутку

$$W = R - Q,$$

де R – дохід фірми;

Q –витрати.

Розглянемо, слідуючи [19], цільову функцію іншого виду

$$V = (R - a)^\alpha (b - Q)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

де a –мінімальний дохід;

b – допустимі витрати,

так що $R \geq a,\ 0 \leq Q \leq b$.

Крім того, припустимо що $R \geq Q$, або для визначеності вимагатимемо $R = cQ$, де $c \geq 1$.

Знайдемо значення R, Q, що визначають $\max V$.

Отримуємо цільову функцію, як функцію витрат

$$V = [R(Q) - a]^{\alpha} (b - Q)^{1-\alpha} = (cQ - a)^{\alpha} (b - Q)^{1-\alpha}.$$

Знайдемо похідну $V'_Q = \dfrac{dV}{dQ}$ і прирівняємо її до нуля, отримаємо

$$\frac{dV}{dQ} = \alpha c (cQ - a)^{\alpha-1} (b - Q)^{1-\alpha} - (cQ - a)^{\alpha} (1-\alpha)(b - Q)^{-\alpha} =$$

$$= (cQ - a)^{\alpha} (b - Q)^{1-\alpha} \left[\frac{\alpha c}{cQ - a} - \frac{1-\alpha}{b - Q} \right] = V(Q) \left[\frac{\alpha c}{cQ - a} - \frac{1-\alpha}{b - Q} \right] = 0.$$

Звідки знаходимо

$$Q_0 = \alpha b + (1-\alpha) a/c;$$

$$R_0 = cQ_0 = \alpha bc + (1-\alpha) a.$$

Тоді

$$V_0 = (R_0 - a)^{\alpha} (b - Q_0)^{1-\alpha} = (1-\alpha)(b - a/c) \left(\frac{\alpha c}{1-\alpha} \right)^{\alpha}.$$

Прибуток фірми визначиться як

$$W = R_0 - Q_0 = (c-1) Q_0 = \frac{c-1}{c} R_0 = \left(\frac{c-1}{c} \right) (\alpha bc + (1-\alpha) a).$$

Розглянемо більш складну залежність $R = R(Q)$

$$R = eQ^{\beta} \quad \text{и} \quad \frac{dR}{dQ} = e\beta Q^{\beta-1}.$$

Тоді

$$V = \left[cQ^{\beta} - \alpha \right]^{\alpha} \cdot (b - a)^{1-\alpha},$$

$$\frac{dV}{dQ} = \alpha c\beta Q^{\beta-1} \cdot \left(cQ^{\beta} - a\right)^{\alpha-1} (b - Q)^{1-\alpha} - \left[cQ^{\beta} - a\right]^{\alpha} (1-\alpha)(b-Q)^{-\alpha} =$$

$$= V(Q)\left[\frac{\alpha c\beta Q^{\beta-1}}{cQ^{\beta} - a} - \frac{1-\alpha}{b-Q}\right] = 0.$$

Далі приймаємо $\beta = 2$. Тоді умова оптимальності

$$\frac{2\alpha cQ}{cQ^2 - a} - \frac{1-\alpha}{b-Q} = 0.$$

Звідки знаходимо

$$Q = \left(\frac{\alpha b}{1+\alpha}\right)\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{\left(1-\alpha^2\right)a}{(\alpha b)^2 c}}\right].$$

Так як завжди $Q > 0$, то вибираємо знак $\oplus$, отримуємо

$$Q_0 = \left(\frac{\alpha b}{1+\alpha}\right)\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{\left(1-\alpha^2\right)a}{(\alpha b)^2 c}}\right];$$

$$R_0 = cQ_0^2;$$

$$W_0 = R_0 - Q_0 = Q_0(cQ_0 - 1).$$

1.3.6. Про дію податку на ціну товару

Одним із методів непрямого управління виробництвом (виробничої системою) з боку держави є податки. Податки бувають двох типів: податки на прибуток і податки на дохід.

Розглянемо дію податку на прибуток. У цьому випадку держава відраховує до бюджету суму у вигляді податку на прибуток виробника, рівну

$$W \cdot S = (P_0 Y - Q) \cdot S,$$

де W – прибуток виробника товарів;

S – відсоток відрахування.

Тоді виробник товарів матиме прибуток

$$W \cdot (1-S) = (P_0 Y - Q) \cdot (1-S).$$

Припустимо, що виробник товару може підняти ціну на товар, прагнучи зберегти прибуток на попередньому рівні, не збільшуючи обсяг виробництва і витрат

$$(\overline{P}_0 Y - Q) \cdot (1-S) = P_0 Y - Q,$$

де $\overline{P}_0$ – нова ціна,

P_0 – стара ціна.

Тоді нова ціна знайдеться як

$$\overline{P}_0 = \frac{P_0 Y - Q}{Y(1-S)},$$

а величина зростання ціни на товар

$$\Delta P_0 = \overline{P}_0 - P_0 = \frac{P_0 Y - Q}{Y} \cdot \frac{S}{1-S} = P_0\left(1 - \frac{Q}{P_0 Y}\right) \cdot \frac{S}{1-S}.$$

Знайдемо відносне зростання ціни

$$\delta P_0 = \frac{\Delta \overline{P}_0}{P_0} = \frac{P_0 Y - Q}{P_0 Y} \cdot \frac{S}{1-S} = \left(1 - \frac{Q}{P_0 Y}\right) \cdot \frac{S}{1-S}.$$

Дія податку на дохід. У цьому випадку держава бере до бюджету суму

$$R \cdot S = P_0 Y \cdot S,$$

а підприємець (виробник товару) отримує дохід

$$W = P_0 Y \cdot (1-S) - Q.$$

Для того, щоб зберегти дохід, підприємець піднімає ціну на товар

$$W = \overline{P}_0 Y \cdot (1-S) - Q = P_0 Y - Q = \text{const}.$$

Звідки знаходимо нову ціну

$$\overline{P}_0 = P_0 \frac{1}{(1-S)}.$$

Збільшення ціни складе

$$\Delta P_0 = \overline{P}_0 - P_0 = P_0 \frac{S}{1-S}.$$

Відносне зростання ціни на товар

$$\delta P_0 = \frac{\Delta P_0}{P_0} = \frac{S}{1-S}.$$

Порівняємо вплив податків на зростання цін, виходячи з того, що держава в обох випадках бажає отримати однаковий внесок у бюджет.

Нехай $\overline{P}_{0_1}$, S_1 – нова ціна і відсоток податку в першому випадку; $\overline{P}_{0_2}$, S_2 – нова ціна і відсоток податку в другому випадку. Тоді сума відраховується до бюджету в першому випадку $\left(\overline{P}_{0_1} Y - Q\right) S_1$ і $\overline{P}_{0_2} Y S_2$ у другому випадку.

$$\left(\overline{P}_{0_1} Y - Q\right) S_1 = \overline{P}_{0_2} Y \cdot S_2,$$

де $\overline{P}_{0_1} = \dfrac{P_0 Y - Q S_1}{Y\left(1 - S_1\right)}$;

$$\overline{P}_{0_2} = P_0 \frac{1}{1 - S_1}$$

або

$$\left(\frac{P_0 Y - Q S_1}{1 - S_1} - Q\right) \cdot S_1 = \frac{P_0 Y - S_2}{1 - S_2};$$

$$\left(P_0 Y - Q\right) \cdot \frac{S_1}{1 - S_1} = P_0 Y \frac{S_2}{1 - S_2}.$$

Зростання ціни в першому випадку, і в другому випадку

$$\Delta \overline{P}_{0_1} = \overline{P}_{0_1} - P_0 = P_0 \left(1 - \frac{Q}{P_0 Y}\right) \frac{S_1}{1 - S_1};$$

$$\Delta \overline{P}_{0_2} = \overline{P}_{0_2} - P_0 = P_0 \frac{S_2}{1 - S_2}.$$

Таким чином, в обох випадках покупець однаково «страждає», так як зростання цін однакове.

1.3.7. Вплив податку на виробництво товару

Зробимо наступні припущення:

– виробник не може впливати на ціни як ресурсів, так і виробленого товару;
– виробник не може понести більші витрати;
– виробник бажає зберегти прибуток.

Маємо

$$p_1K + p_2L = Q_0 = \text{const},$$

де p_1, p_2 – постійні.

Виробництво товару описується виробничою функцією

$$Y = a_0K^{a_1}L^{a_2}, \ \ a_1 + a_2 = 1.$$

Прибуток виробника визначається як

$$W = (P_0Y - Q_0)\cdot(1 - S) = W_0 = \text{const}.$$

З умови сталості витрат маємо

$$dQ = p_1dK + p_2dL = 0.$$

З умови сталості прибутку маємо

$$dW = P_0dY\cdot(1 - S) - (P_0Y - Q_0)dS = 0.$$

В свою чергу

$$dY = Y\left(a_1\frac{dK}{K} + a_2\frac{dL}{L}\right).$$

Таким чином, маємо систему

$$\frac{dY}{Y} = a_1\frac{dK}{K} + a_2\frac{dL}{L} = a_1\frac{dK}{K} + (1 - a_1)\frac{dL}{L};$$

$$p_1K\frac{dK}{K} + p_2L\frac{dL}{L} = 0;$$

$$\frac{dY}{Y}=\left(\frac{p_0Y-Q_0}{p_0Y}\right)\frac{dS}{1-S_0}.$$

Позначаючи відносні зміни параметрів як $\delta Y=\frac{dY}{Y_0}$, $\delta S=\frac{dS}{1-S_0}$, $\delta K=\frac{dK}{K_0}$, $\delta L=\frac{dL}{L_0}$ і вважаючи їх досить малими, отримуємо

$$\delta Y=\left(1-\frac{Q_0}{p_0Y_0}\right)\delta S;$$

$$\delta K=\delta Y\left[a_1-(1-a_1)\frac{p_1K_0}{p_2L_0}\right]^{-1}=\delta Y\left[a_1-(1-a_1)\frac{p_1K_0}{Q_0-p_1K_0}\right]^{-1}=$$

$$=\delta Y\cdot\frac{Q_0-p_1K_0}{a_1Q_0-p_1K_0};$$

$$\delta L=-\left(\frac{p_1K_0}{p_2L_0}\right)\delta K=\left(\frac{Q_0-p_1L_0}{p_2L_0}\right)\cdot\left(\frac{p_2L_0}{a_2Q_0-p_2L_0}\right)\delta Y=\delta Y\cdot\frac{Q_0-p_2L_0}{a_2Q_0-p_2L_0}.$$

Таким чином, при підвищенні податку може бути зростання виробництва (випуск товару) за рахунок перерозподілу використання ресурсів.

1.4. Взаємодія об'єктів економічної системи на ринку товарів

1.4.1. Загальна постановка задачі про взаємодію двох фірм на ринку одного товару

Розглянемо загальну постановку задачі про взаємодію двох фірм на ринку одного товару. Вважаємо, що кожна з двох фірм ($i=1,2$) виробляє один і той же товар. Вироблений фірмами товар надходить на загальний ринок. Обсяг випуску товару i-тою фірмою Y_i визначений відповідною виробничою функцією

$$Y_i(K_i, L_i) = a_{0_i} K_i^{a_{1_i}} L_i^{a_{2_i}},$$

де $a_{1_i} + a_{2_i} = 1$;

K_i, L_i – ресурси, використовувані i -ою фірмою.

Загальний випуск товару двома фірмами

$$Y = Y_1 + Y_2.$$

Доходи кожної фірми

$$P_i = p_0 Y_i,$$

де p_0 – вартість одиниці продукції на ринку, яка залежить від загального випуску.

$$p_0(Y) = a_0 - b_0 Y = a_0 - b_0(Y_1 + Y_2).$$

Кожна фірма несе відповідні витрати

$$Q_i = p_1 K_i + p_2 L_i,$$

де p_1, p_2 –. ціни ресурсів, які в загальному випадку залежать від величини споживаних ресурсів.

$$p_1 = a_1 + b_1 K = a_1 + b_1(K_1 + K_2);$$

$$p_2 = a_2 + b_2 L = a_2 + b_2(L_1 + L_2).$$

Кожна фірма матиме прибуток

$$W_i = R_i - Q_i$$

або

$$W_1 = P_0(Y) \cdot Y_1 - [p_1(K) \cdot K_1 + p_2(L) \cdot L_1];$$

$$W_2 = P_0(Y) \cdot Y_2 - [p_1(K) \cdot K_2 + p_2(L) \cdot L_2].$$

Назвемо стратегією i -ої фірми вибір K_i, L_i, Y_i. Однак, як видно із записаних рівнянь для визначення оптимальної стратегії кожною фірмою, їй необхідно знати стратегію іншої фірми. Іншими словами

$$Y_1 = Y_1(K_1, L_1, K_2\, L_2, Y_2);$$

$$Y_2 = Y_2(K_2, L_2, K_1\, L_1, Y_1).$$

Кожна фірма при виборі своєї стратегії прагне до максимуму свого прибутку W_i

$$W_i = P_0(Y)\cdot Y_i(K_i, L_i) - \left[p_1(K)\cdot K_i + p_2(L)\cdot L_i\right].$$

Розв'язок завдання будемо шукати методом Лагранжа. Для визначеності розв'язку задачі оптимізації проведемо для 1-ої фірми ($i=1$).

Запишемо функцію Лагранжа

$$\Phi_i = P_0(Y_1, Y_2)\cdot Y_i - \left[p_1(K_1, K_2)\cdot K_1 + p_2(L_1, L_2)\cdot L_1\right] + \lambda\left[a_{01}K_1^{a_{11}}L_1^{a_{21}} - Y_1\right]$$

Знайдемо відповідні частинні похідні від функції Лагранжа і прирівняємо їх до нуля

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial Y_1} = P_0(Y_1, Y_2) - Y_1\left(\frac{\partial P_0}{\partial Y_1} + \frac{\partial P_0}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial Y_1}\right) - \lambda = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial K_1} = -P_1(K_1, K_2) - K_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial K_1} + \frac{\partial P_1}{\partial K_2}\frac{\partial K_2}{\partial K_1}\right) + \lambda\frac{\partial Y_1}{\partial K_1} = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial L_1} = -P_2(L_1, L_2) - L_1\left(\frac{\partial P_2}{\partial L_1} + \frac{\partial P_2}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial L_1}\right) + \lambda\frac{\partial Y_1}{\partial L_1} = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \lambda} = a_{01}K_1^{a_{11}}L_1^{a_{21}} - Y_1 = 0,$$

де, в свою чергу

$$\frac{\partial Y_1}{\partial K_1} = a_{11}\left(\frac{Y_1}{K_1}\right);$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial L_1} = a_{21}\left(\frac{Y_1}{L_1}\right).$$

Виключаючи параметр λ з отриманої вище системи, отримуємо рівняння для визначення стратегії 1-ої фірми

$$\left[P_0(Y_1, Y_2) + Y_1\left(\frac{\partial P_0}{\partial Y_1} + \frac{\partial P_0}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial Y_1}\right)\right]a_{11}\frac{Y_1}{K_1} = P_1 + K_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial K_1} + \frac{\partial P_1}{\partial K_2}\cdot\frac{\partial K_2}{\partial K_1}\right);$$

$$\left[P_0(Y_1,Y_2)+Y_1\left(\frac{\partial P_0}{\partial Y_1}+\frac{\partial P_0}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial Y_1}\right)\right]a_{21}\frac{Y_1}{L_1}=P_2+L_1\left(\frac{\partial P_2}{\partial L_1}+\frac{\partial P_2}{\partial L_2}\cdot\frac{\partial L_2}{\partial L_1}\right);$$

$$Y_1=a_{01}K_1^{a_{11}}L_1^{a_{21}},$$

де

$$P_0+Y_1\left(\frac{\partial P_0}{\partial Y_1}+\frac{\partial P_0}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial Y_1}\right)=a_0-b_0\left(Y_2+Y_1\frac{\partial Y_2}{\partial Y_1}\right);$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial K_1}+\frac{\partial P_1}{\partial K_2}\frac{\partial K_2}{\partial Y_1}=b_1\left(1+\frac{\partial K_2}{\partial K_1}\right);$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial L_1}+\frac{\partial P_2}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial L_1}=b_2\left(1+\frac{\partial L_2}{\partial L_1}\right).$$

Тепер перші два рівняння приведемо до вигляду

$$\left[a_0-b_0\left(Y_2+Y_1\frac{\partial Y_2}{\partial Y_1}\right)\right]a_{11}Y_1=P_1K_1+K_1^2b_1\left(1+\frac{\partial K_2}{\partial K_1}\right);$$

$$\left[a_0-b_0\left(Y_2+Y_1\frac{\partial Y_2}{\partial Y_1}\right)\right]a_{21}Y_1=P_2L_1+L_1^2b_2\left(1+\frac{\partial L_2}{\partial L_1}\right).$$

Складаючи по частинах отриманні рівняння, знайдемо

$$\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{P_1K_1+K_1^2b_1\left(1+\dfrac{\partial K_2}{\partial K_1}\right)}{P_2L_1+L_1^2b_2\left(1+\dfrac{\partial L_2}{\partial L_1}\right)}.$$

Подальший розв’язок системи в загальному випадку викликає значні труднощі. Але вже тут видно, що вибір стратегії 1-ї фірми (розв’язок системи) вимагає знання величини $\frac{\partial K_2}{\partial K_1}$; $\frac{\partial L_2}{\partial L_1}$; $\frac{\partial Y_2}{\partial Y_1}$; Y_2, які, взагалі кажучи, невідомі заздалегідь.

1.4.2. Співпраця та конкуренція двох фірм. Спрощені моделі

Розглянемо спрощений варіант завдання взаємодії двох фірм на ринку одного товару. Нехай витрати фірм визначаться виразом

$$Q_i = d + cY_i, \quad i = 1, 2.$$

Ціна продукції на ринку

$$P_0(Y) = a - bY = a - b(Y_1 + Y_2).$$

Тоді вирази для прибутку приймуть вигляд

$$W_i = R_0(Y) \cdot Y_i - Q_i$$

або

$$W_i = bY_i\left[Y_0 - (Y_1 + Y_2)\right] - d_i,$$

де $Y_0 = \dfrac{a - c}{b}$.

Умова отримання максимального прибутку, наприклад, для 1-ої фірми має вигляд

$$\frac{\partial W_1}{\partial Y_1} = b\left[Y_0 - (Y_1 + Y_2) - Y_1\left(1 + \frac{\partial Y_2}{\partial Y_1}\right)\right] = 0$$

або

$$(Y_1 + Y_2) + Y_1\left(1 + \frac{\partial Y_2}{\partial Y_1}\right) = Y_0.$$

Звідки знаходимо випуск товару, максимізований прибуток

$$Y_1^* = \frac{Y_0 - Y_2}{2 + \dfrac{dY_2}{dY_1}}.$$

Аналогічно знайдемо стратегію 2-ої фірми

$$Y_2^* = \frac{Y_0 - Y_1}{2 + \dfrac{dY_1}{dY_2}}.$$

Різні припущення однієї фірми щодо дій іншої дають різні стратегії 1-ої фірми [5, 9]

1. Стратегія Курно

$$Y_1^K = Y_2^K = \frac{Y_0}{3};$$

$$Y^K = Y_1^K + Y_2^K = \frac{2}{3}Y_0;$$

$$P_0^K = a - bY^K = a - b\frac{2}{3}Y_0.$$

2. Стратегія рівноваги за Стакельбергом

$$Y_1^S = \frac{1}{2}Y_0; \quad Y_2^S = \frac{Y_0}{4}; \quad Y^S = \frac{3}{4}Y_0; \quad P_0^S = a - \frac{3}{4}bY_0.$$

3. Стратегія нерівноваги Стакельберга

$$Y_1^S = Y_2^S = \frac{2}{5}Y_0; \quad Y^S = \frac{4}{5}Y_0; \quad P^S = a - b\frac{4}{5}Y_0.$$

4. Стратегія монополії

$$Y_1^M = Y_2^M = \frac{Y_0}{4}; \quad Y^M = \frac{Y_0}{2}; \quad P^M = a - b\frac{Y_0}{2}.$$

На закінчення відзначимо, що рівняння

$$(Y_1 + Y_2) + Y_1\left(1 + \frac{dY_2}{dY_1}\right) = Y_0$$

має ще один формальний розв'язок.

Припускаючи, що $Y_1 + Y_2 = Y$, $1 + \frac{dY_2}{dY_1} = \frac{d(Y_2 + Y_1)}{dY_1} = \frac{dY}{dY_1}$,

отримуємо $Y - Y_0 = -Y_1 \frac{d(Y - Y_0)}{dY_1}$.

Інтегруючи отримане диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними, отримуємо

$$Y_1(Y - Y_0) = Y_0^2$$

або

$$Y_1^2 + Y_1(Y_2 - Y_0) - Y_0^2 = 0.$$

Звідки знайдемо

$$Y_1 = \sqrt{Y_0^2 + \left(\frac{Y_2 - Y_0}{2}\right)^2} - \left(\frac{Y_2 - Y_0}{2}\right).$$

Або у відносних величинах

$$\frac{Y_1}{Y_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{Y_2}{Y_0} - 1\right)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{Y_2}{Y_0} - 1\right).$$

Стратегія другої фірми визначиться як

$$\frac{Y_2}{Y_0} = 1 + \frac{1}{Y_1/Y_0} - \frac{Y_1}{Y_0}.$$

1.4.3. Попит і пропозиція на ринку одного товару

Споживачі, бажаючі придбати товар, і виробники (продавці), які постачають товар для продажу, зустрічаються на ринку. Взаємодія споживачів і продавців на ринку відбувається через механізм цін.

<u>*Попит*</u> - залежність кількості товару, що купується на ринку, від ціни. Нехай $D(p)$ - кількість товару, що купується на ринку за одиницю часу при ціні P за одиницю товару (англійською “demand” - попит). $D(p)$ - функція попиту. **<u>Аксіома попиту</u> - із зростанням ціни попит на товар зменшується.**

В якості математичного подання функція попиту звичайно приймається у вигляді

а) $D(p) = a - bp$;

б) $D(p) = 1/p$;

в) $D(p) = \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$.

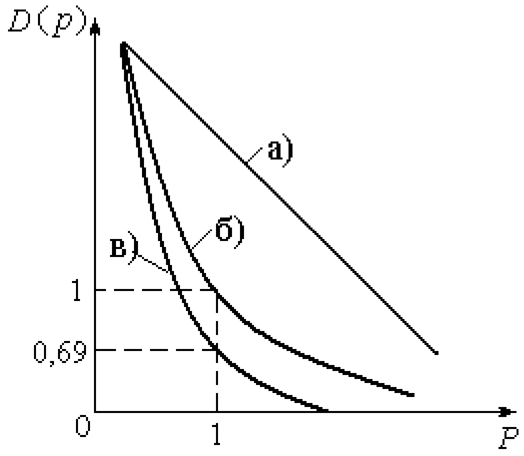


Рис.1.5 – Криві функції попиту

Пропозиція - залежність кількості товару, що поставляється від ціни, що склалася на ринку (англійською "supply" - пропозиція).

$S(p)$ - функція пропозиції. **Аксіома пропозиції** - **функція пропозиції зростає з ростом ціни.**

Для функції пропозиції $S(p)$ зазвичай використовуються наступні представлення

а) $S(p) = -c + dp$;

б) $S(p) = p^{\alpha}$, де $\alpha \leq 1$;

в) $S(p) = \ln(1 + p)$.

Рівновага на ринку одного товару виражається рівністю

$$D(p^*) = S(p^*),$$

де p^* – рівноважна ціна на ринку.

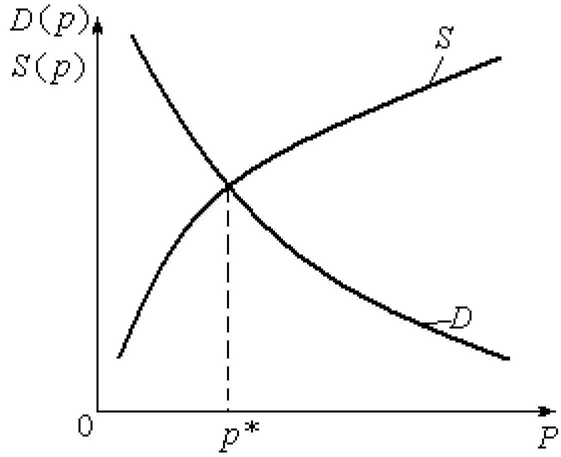


Рис.1.6 – Типові функції попиту та пропозиції

Якщо $D(p)=a-bp$ і $S(p)=-c+dp$, то рівноважна ціна $p^*=\dfrac{a+c}{b+d}$, а $D(p^*)=S(p^*)=\dfrac{ad-cb}{b+d}$.

1.4.4. Моделі встановлення рівноважної ціни на ринку

Існує ряд моделей встановлення рівноважної ціни на ринку.

Найбільш відомими є наступні:

– павутиноподібна модель;

– модель Еванса з безперервним часом.

Сутність павутиноподібної моделі видно на рис.1.7. Рис. 1.7,а відповідає випадку нелінійних функцій попиту та пропозиції, на рис. 1.7,б - випадок лінійних функцій.

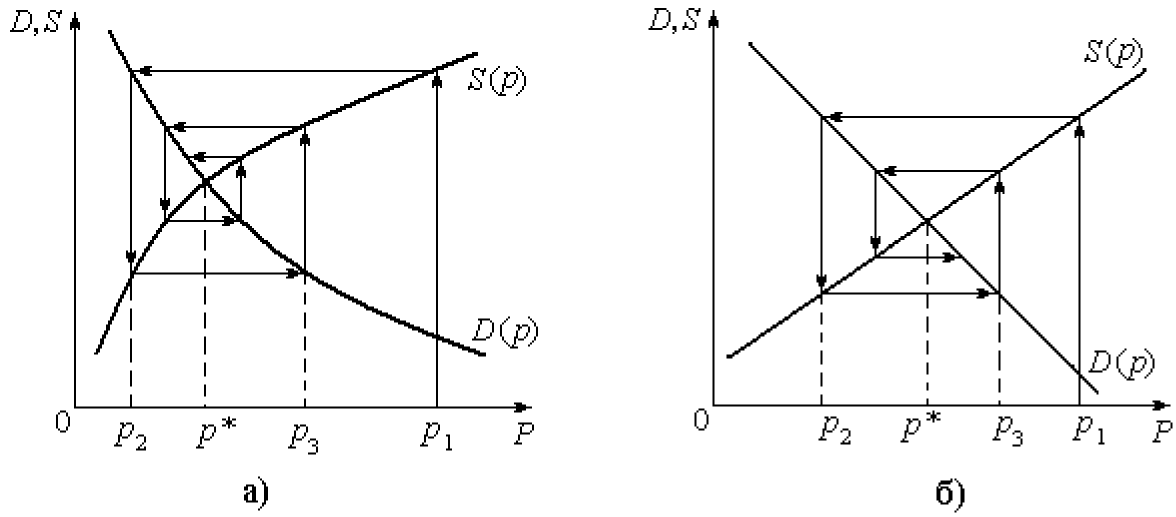


Рис. 1.7 – Схема павутиноподібної моделі встановлення рівноважної ціни: p_1 – початкова ціна; p^* – рівноважна ціна

Умови збіжності процесу в нелінійному випадку: $S(p)$ - опукла крива, $D(p)$ - увігнута крива.

В лінійному випадку $\left.\begin{aligned} D(p) &= a - bp; \\ S(p) &= -c + dp \end{aligned}\right\}$ для встановленого процесу необхідне виконання умови $d < b$. Іншими словами, умова збіжності процесу в загальному випадку:

$$S'(p) > D'(p),$$

де $S'(p) = \dfrac{dS(p)}{dp}$; $D'(p) = \dfrac{dD(p)}{dp}$.

У моделі Еванса вводиться припущення, що при $D(p) = a - bp$; $S(p) = -c + dp$ зміна ціни пропорційна перевищенню попиту над пропозицією

$$\Delta P = (D - S)\Delta t.$$

Тоді динаміка встановлення ціни описується диференціальним рівнянням

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -(b+d)p + (a+c) \\ P(0) &= p_1 \end{aligned}\right\}.$$

Розв'язок задачі Коші має вигляд

$$P(t) = p_1 e^{-(b+d)t} + \frac{a+c}{b+d} \cdot \left[1 - e^{-(b+d)t}\right].$$

Знайдемо границі:

$P(0) = p_1$ – початкова умова виконуваності;

$P(\infty) = \dfrac{a+c}{b+d} = p_*$ – рівноважна ціна.

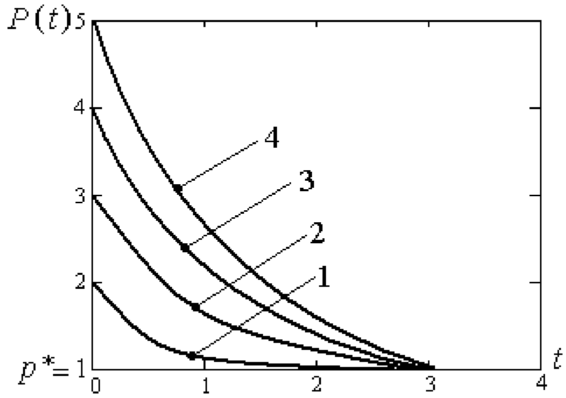


Рис.1.8,а) – Перехідний процес до рівноважної ціни при $S(p)=p$; $D(p)=1/4$;
1–$p(0)=2$; 2–$p(0)=3$; 2–$p(0)=4$; 4–$p(0)=5$

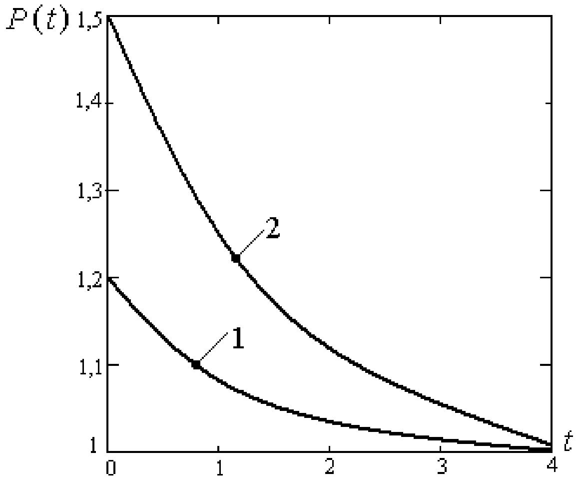


Рис.1.8,б) – Перехідний процес до рівноважної ціни при $S(p) = \sqrt{p}$; $D(p) = 1/\sqrt{p}$; 1–$p(0)=1,2$; 2–$p(0)=1,5$

У разі нелінійних функцій $S(p)$ і $D(p)$ зробимо так. Представимо розкладаннями в ряд Тейлора ці функції в околиці точки $p = p^*$ (рівноважної ціни)

$$D(p) = D(p^*) + D'(p^*)(p - p^*) + \ldots;$$

$$S(p) = S(p^*) + S'(p^*)(p - p^*) + \ldots,$$

де $D'\left(p^*\right)=\left.\frac{dD(p)}{dp}\right|_{p=p^*}$, $S'\left(p^*\right)=\left.\frac{dS(p)}{dp}\right|_{p=p^*}$.

Зауважимо, що значення p^* поки залишається невідомим. Тоді

$$D(p)-S(p)=\left\{\left[D\left(p^*\right)-S\left(p^*\right)\right]-\left[D'\left(p^*\right)-S'\left(p^*\right)\right]p^*\right\}+\left[D'\left(p^*\right)-S'\left(p^*\right)\right]p.$$

Якщо позначити

$$D'\left(p^*\right)-S'\left(p^*\right)=-b+d;$$

$$D\left(p^*\right)-S\left(p^*\right)-\left[D'\left(p^*\right)-S'\left(p^*\right)\right]p^*=a+c,$$

то

$$P(t)=p_1e^{-(b+d)t}+\frac{a+c}{b+d}\cdot\left[1-e^{-(b+d)t}\right],$$

а

$$p^*=\frac{a+c}{b+d}=\frac{D\left(p^*\right)-S\left(p^*\right)-\left[D'\left(p^*\right)-S'\left(p^*\right)\right]p^*}{-\left[D'\left(p^*\right)-S'\left(p^*\right)\right]}=\frac{D\left(p^*\right)-S\left(p^*\right)}{D'\left(p^*\right)-S'\left(p^*\right)}+p^*,$$

і $S\left(p^*\right)>D\left(p^*\right)$. Тоді

$$\frac{a+c}{b+d}=p^*.$$

Таким чином, якщо $\left|\frac{p_1-p^*}{p^*}\right|<<1$, то можлива лінеаризація функцій $S(p)$ і $D(p)$. Із розв'язку $S\left(p^*\right)=D\left(p^*\right)$ знаходимо рівноважну ціну p^*. Потім знаходимо

$$b+d=D'\left(p^*\right)-S'\left(p^*\right);$$

$$a+c=-\left[D'\left(p^*\right)-S'\left(p^*\right)\right]p^*.$$

Важливо знайти час перехідного процесу $T_{\text{пр}}$ отримання рівноважної ціни p^*. Вважаємо, що [16, 17]

$$\left|\frac{P(0)-P(\infty)}{P\left(T_{\text{пр}}\right)-P(\infty)}\right|=e,$$

де $e = 2{,}718$; $P(0) = p_1$; $P(\infty) = p_*$ – рівноважна ціна.

Тоді з рівняння динаміки ціни отримуємо

$$P(T_{\text{пр}}) = (p_1 - p^*)e^{-\beta T_{\text{пр}}} + p^*,$$

де $\beta = b + d$.

Остаточно знаходимо представлення для часу встановлення ціни на ринку

$$T_{\text{пр}} = 1/\beta = 1/(b+d) = -\left[D'(p^*) - S'(p^*)\right]^{-1}$$

або

$$T_{\text{пр}} = -\left[\frac{d\left(D(p^*) - S(p^*)\right)}{dp^*}\right]^{-1} = \left[\frac{d\left(S(p^*) - D(p^*)\right)}{dp^*}\right]^{-1}.$$

1.5. Математичне моделювання динаміки виробництва при введенні ресурсів по відомим законам

1.5.1. Модель зростання виробництва з накладенням коливань

Серед допустимих законів динаміки (поведінки у часі) виробничої системи в рамках функції Кобба-Дугласа добре вивчені стаціонарний закон і закон експоненціального зростання. Тут розглянемо клас допустимих законів.

Запишемо виробничу функцію Кобба-Дугласа у вигляді

$$Y(t) = a_0 e^{\gamma t} K^{a_1}(t) \cdot L^{a_2}(t),$$

де $a_1 + a_2 = 1$; t – час; K, L – ресурси;

Y – обсяг виробництва товарів.

Послідовно логарифмуючи і диференціюючи за часом t обидві частини рівності, отримуємо

$$y = a_1 k + a_2 l,$$

де $y = Y'/Y$; $k = K'/K$; $l = L'/L$,

$Y' = dY/dt$; $K' = dK/dt$; $L' = dL/dt$.

Розглянемо розвиток даної економічної системи в класі функцій

$$y = y_0 + y_1 \cdot \sin \omega t;$$

$$y = y_0 + y_1 \cdot \sin \omega t;$$

$$y = y_0 + y_1 \cdot \sin \omega t,$$

де $y_0, y_1, k_0, k_1, l_0, l_1, \omega$ – постійні.

Підставляючи дані залежності в рівняння $y = a_1 k + a_2 l$, отримуємо еквівалентну систему рівностей

$$y_0 = a_1 k_0 + a_2 l_0 + \gamma;$$

$$y_1 = a_1 k_1 + a_2 l_1.$$

Перша рівність є темповим записом експоненціального закону розвитку системи, а друга рівність пов'язує амплітуди гармонійних коливань параметрів системи. Знайдемо розв’язок диференціальних рівнянь

$$Y'/Y = y_0 + y_1 \cdot \sin \omega t;$$

$$K'/K = y_0 + y_1 \cdot \sin \omega t;$$

$$L'/L = y_0 + y_1 \cdot \sin \omega t.$$

Поділяючи змінні в отриманій системі рівнянь і виконуючи інтегрування, отримуємо

$$\bar{Y} = Y/Y_0 = \exp(y_0 t) \cdot \exp\left[\frac{y_1}{\omega}(1 - \cos \omega t)\right];$$

$$\bar{K} = K/K_0 = \exp(k_0 t) \cdot \exp\left[\frac{k_1}{\omega}(1 - \cos \omega t)\right];$$

$$\bar{L} = L/L_0 = \exp(k_0 t) \cdot \exp\left[\frac{l_1}{\omega}(1 - \cos \omega t)\right],$$

де Y_0, K_0, L_0 – значення параметрів при $t = 0$.

Зауважимо, що

$$\omega = 2\pi/T,$$

де T – період (відрізок часу) коливань параметрів системи.

Після нескладних алгебраїчних і тригонометричних перетворень співвідношення приймають вигляд

$$\bar{Y} = \exp(y_0 T \cdot \tau) \cdot \exp\left[\frac{y_1 T}{2\pi} \cdot \sin^2(\pi\tau)\right];$$

$$\bar{K} = \exp(k_0 T \cdot \tau) \cdot \exp\left[\frac{k_1 T}{2\pi} \cdot \sin^2(\pi\tau)\right];$$

$$\bar{L} = \exp(l_0 T \cdot \tau) \cdot \exp\left[\frac{l_1 T}{2\pi} \cdot \sin^2(\pi\tau)\right],$$

де τ – безрозмірний параметр часу $(\tau = t/T)$.

У разі виконання умов

$$\varepsilon_y = \frac{y_1 T}{2\pi} << 1;$$

$$\varepsilon_k = \frac{k_1 T}{2\pi} << 1;$$

$$\varepsilon_l = \frac{l_1 T}{2\pi} << 1,$$

отримуємо

$$\bar{Y} \approx \exp(y_0 T \cdot \tau) \cdot \left(1 + \varepsilon_y \sin^2(\pi\tau)\right);$$

$$\bar{K} \approx \exp(k_0 T \cdot \tau) \cdot \left(1 + \varepsilon_k \sin^2(\pi\tau)\right);$$

$$\bar{L} \approx \exp(l_0 T \cdot \tau) \cdot \left(1 + \varepsilon_l \sin^2(\pi\tau)\right).$$

Таким чином, динаміка виробничої економічної системи в рамках виробничої функції Кобба-Дугласа може відчувати коливання несиметричного виду на тлі експоненціального розвитку.

На рис. 1.9 приведена графічна ілюстрація закону

$$\bar{Y} = \bar{K} = \bar{L} = \exp\tau \cdot \exp\left(\beta \sin^2(\pi\tau)\right).$$

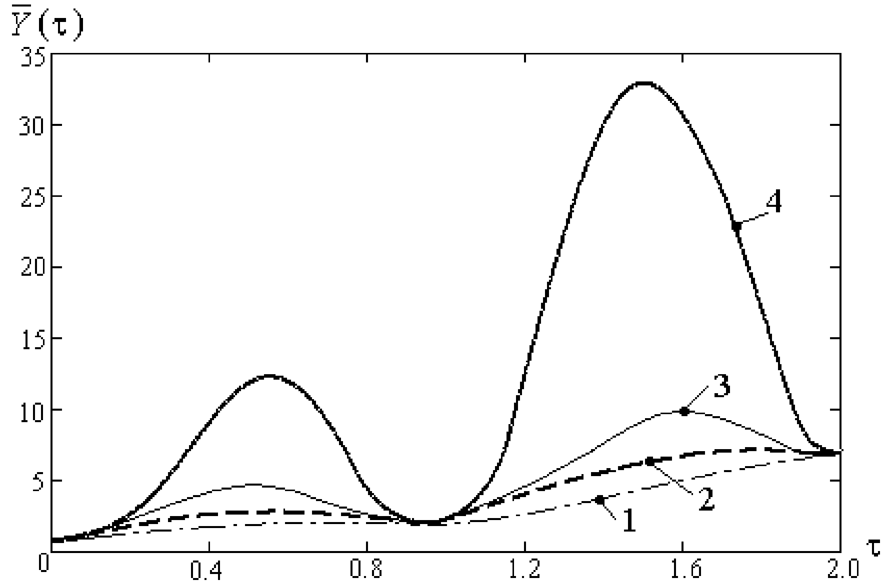


Рис.1.9 –: Динаміка зростання з положенням коливань:
1 – β = 0,2; 2 – β = 0,4; 3 – β = 0,8; 4 – β = 2,0

1.5.2. Про облік запізнювання при введенні ресурсів

Розглянемо експонентну (експоненціальну) виробничу систему, де виробництво описується виробничою функцією Кобба-Дугласа. Вважаємо, що введення ресурсів відбувається безперервно по деяким тимчасовим законам $K = K(t)$ і $L = L(t)$. Однак, швидкості введення більші або порівнянні зі швидкостями «освоєння» ресурсів системою. У цьому випадку величина виробленої продукції $Y(t)$ запізнюється в часі від часу введення ресурсів. Приймаємо

$$Y(t) = a_0 K^{a_1}(t) L^{a_2}(t),$$

де $a_1 + a_2 = 1$.

У деякий момент часу $t = 0$ має місце виконання умови

$$t = 0: \quad Y(0) = Y_0; \; K(0) = K_0; \; L(0) = L_0,$$

так що

$$Y_0 = a_0 K_0^{a_1} L_0^{a_2}, \quad a_1 + a_2 = 1.$$

Таким чином, при $t > 0$ маємо

$$Y(t) = Y_0 + Y_1(t);$$

$$K(t) = K_0 + K_1(t);$$

$$L(t) = L_0 + L_1(t).$$

Крім того, врахуємо запізнювання зміни виробництва порівняно з введенням ресурсів

$$Y_1(t) = Y_1(t - T(t)),$$

де $T(t)$ – функція запізнювання, пов'язаного з освоєнням ресурсів.

Вважаємо, що запізнювання викликано кінцевою швидкістю освоєння ресурсів, і приймаємо

$$T(t) = \left[\left(\frac{K_1(t)}{V_1}\right)^2 + \left(\frac{L_1(t)}{V_2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

де V_1, V_2 – швидкості освоєння ресурсів, які, в свою чергу, можуть бути функціями часу.

Очевидно, що $V_2 >> V_1$ і $\dfrac{L_1(t)/V_2}{K_1(t)/V_1} << 1$, тоді

$$T(t) = \frac{K_1(t)}{V_1}\sqrt{1 + \left(\left(\frac{L_1}{K_1} \cdot \frac{V_1}{V_2}\right)^2\right)} \approx \frac{K_1(t)}{V_1}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{L_1}{K_1} \cdot \frac{V_1}{V_2}\right)^2 + \ldots\right].$$

Далі для зручності вважаємо, що

$$T(t) = \frac{K_1(t)}{V_1} = \beta\frac{K_1(t)}{K_0},$$

де $\beta = \dfrac{K_0}{V_1} = \mathrm{const}$.

Перейдемо до відносних (безрозмірних) величин:

$$y_1 = Y_1/Y_0\,; \;\; k_1 = K_1/K_0\,; \;\; l_1 = L_1/L_0\,,$$

для чого виконаємо операцію

$$\frac{Y_0 + Y_1(t - T(t))}{Y_0} = \frac{a_0 (K_0 + K_1)^{a_1} (L_0 + L_1)^{a_2}}{a_0 K_0^{a_1} L_0^{a_2}}$$

і отримуємо

$$y_1(1 - \beta k_1(t)) = (1 + k_1(t))^{a_1} (1 + l_1(t))^{a_2} - 1.$$

У випадку $k_1 << 1$, $l_1 << 1$ і $\beta k_1 / t << 1$ можна цю рівність наближено записати у вигляді

$$y_1(t) = \beta k_1(t) \frac{dy_1(t)}{dt} + (a_2 l_1(t) + a_1 k_1(t)),$$

де відкинуті квадратні члени, які є малими вищого порядку малості.

Отримане вище рівняння можна записати інакше

$$\frac{dy_1}{dt} - \frac{1}{\beta k_1(t)} y_1(t) = -\left(a_1 + a_2 \frac{l_1(t)}{k_1(t)} \right) \frac{1}{\beta}.$$

При $l_1(t) = k_1(t)$ з врахуванням того, що $a_1 + a_2 = 1$ отримуємо рівняння

$$\frac{dy_1}{dt} - \frac{1}{\beta k_1} y_1 = -\frac{1}{\beta}.$$

Отримуємо розв'язок диференціальних рівнянь

$$y_1 = \exp\left[\frac{1}{\beta} \int_0^t \frac{dt}{k_1(t)} \right] \left[c - \frac{1}{\beta} \int_0^t \left(a_1 + a_2 \frac{l_1(t)}{k_1(t)} \right) \exp\left(\frac{1}{\beta} \int_0^t \frac{dt}{k_1(t)} \right) dt \right],$$

де c – постійна інтегрування ($c = y_1(0)$).

1.5.3. Загальний випадок обліку запізнювання

Повернемося до загального рівняння

$$y_1(1 - \beta k_1(t)) = (1 + k_1(t))^{a_1} (1 + l_1(t))^{a_2} - 1.$$

Для розв'язання рівняння в загальному випадку скористаємося методом нелінійного перетворення часу [15], згідно з яким зробимо заміну змінної

$$t-\beta k_1(t)=\tau,$$

де τ – змінна, яка має сенс «нового» часу. Зауважимо, що завжди $t-\beta k_1(t)\geq 0$, отже, і $\tau\geq 0$, а при $t=0$ і $\tau=0$. Тепер з цього рівняння знайдемо $t=w(\tau)$, тобто знайдемо функцію зворотну функції $\tau=\tau(t)$.

Тоді вихідне рівняння приймає вигляд

$$y_1(\tau)=\left[1+k_1(w(\tau))\right]^{a_1}\left[1+l_1(w(\tau))\right]^{a_2}-1,$$

де змінну τ можна розглядати як звичайний час t.

Щоб знайти швидкість росту продукції $\frac{dy_1(\tau)}{d\tau}$, можна продиференціювати по τ отриманий розв'язок, але можна вчинити інакше. Для простоти виведення розглянемо випадок $l_1(t)=k_1(t)$. Тоді

$$y_1(\tau)=\left[1+k_1(w(\tau))\right]^{a_1}\left[1+l_1(w(\tau))\right]^{a_2}-1=\left[1+k_1(w(\tau))\right]^{a_1}\left[1+k_1(w(\tau))\right]^{a_2}-1=$$
$$=\left[1+k_1(w(\tau))\right]^{a_1+a_2}-1=1+k_1(w(\tau))-1=k_1(w(\tau)).$$

Тобто в цьому випадку маємо

$$y_1(t-\beta k_1(t))=k_1(t),$$
$$y_1(\tau)=k_1(w(\tau)),$$

де $t-\beta k_1(t)=\tau$.

Далі отримаємо

$$\frac{dy_1(\tau)}{d\tau}=\frac{dk_1(w)}{dw}\cdot\frac{dw(\tau)}{d\tau},$$

де $\frac{dw(\tau)}{d\tau}=\left.\frac{1}{1-\beta\frac{dk_1(w)}{dw}}\right|_{w=w(\tau)}$.

Отже,

$$\frac{dy_1(\tau)}{d\tau} = \left. \frac{\dfrac{dk_1(w)}{dw}}{1 - \beta \dfrac{dk_1(w)}{dw}} \right|_{w = w(\tau)} .$$

За відсутності запізнювання $(\beta = 0)$ отримаємо

$y_1(\tau) = k_1(\tau), \qquad [y_1(t) = k_1(t)],$

$\dfrac{dy_1(\tau)}{d\tau} = \dfrac{dk_1(\tau)}{d\tau}, \quad \left[\dfrac{dy_1(t)}{dt} = \dfrac{dk_1(t)}{dt} \right].$

Отримуємо цікавий результат: при врахуванні запізнювання, але при введенні ресурсів у вигляді безперервної функції часу і $k_1(0) = 0$, швидкість росту виробництва $\dfrac{dy_1(\tau)}{d\tau}$ вище, ніж без урахування запізнювання. Однак, якщо $k_1(0) \neq 0$, то виникає «чисте» запізнювання, при якому деякий час $T = \beta k_1(0)$ виробництво не росте, хоча відбувається введення ресурсів.

Розглянемо приклад: вважаємо, що $l_1(t) = k_1(t) = b_0 \dfrac{t^2}{2}$, $\dfrac{dk_1(t)}{dt} = b_0 t$.

Знайдемо розв'язок рівняння

$$y_1(t - \beta k_1(t)) = k_1(t) \quad \text{при} \quad \beta = 1/b_0 .$$

Вважаємо $t - \beta k_1(t) = \tau$, що в нашому випадку $t - \beta \dfrac{b_0}{2} t^2 = \tau$ або $t^2 - 2t + 2\tau = 0$.

Знайдемо

$$t = w(\tau) = 1 \pm \sqrt{1 - 2\tau},$$

де слід вибрати знак «–». Тоді

$$t = w(\tau) = 1 - \sqrt{1 - 2\tau}.$$

Дійсно, при $\tau \to 0$ маємо

$$t = w(\tau) = 1 - (1 - 2\tau)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - (1 - \tau + \ldots) = \tau .$$

Отже,

$$y_1(\tau)=k_1(w(\tau))=\frac{b_0}{2}\cdot w^2(\tau)=\frac{b_0}{2}\left[1-\sqrt{1-2\tau}\right]^2=\frac{b_0}{2}\cdot 2\left[(1-\tau)-\sqrt{1-2\tau}\right]=$$
$$=b_0\left((1-\tau)-\sqrt{1-2\tau}\right);$$

$$\frac{dy_1(\tau)}{d\tau}=b_0\left(\frac{2}{\sqrt{1-2\tau}}-1\right).$$

Переходячи до звичайного (фізичного) часу t, отримуємо

$$y_1(t)=b_0\left((1-t)-\sqrt{1-2t}\right),$$
$$\frac{dy_1(t)}{dt}=b_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-2t}}-1\right).$$

Порівняємо з розв’язком без урахування запізнювання

$$y_1(t)=k_1(t)=b_0\frac{t^2}{2},$$
$$\frac{dy_1(t)}{dt}=b_0\cdot t.$$

Зауважимо, що при малих значеннях часу обидва розв'язки близькі. Дійсно,

$$y_1(t)=b_0\left((1-t)-\sqrt{1-2t}\right)=b_0\left(1-t-\left(1-t-\frac{t^2}{2}+\ldots\right)\right)\approx b_0\frac{t^2}{2}.$$

1.5.4. Запізнення в процесі перетворень інвестицій у фонди

В [5] передбачається, що інвестиції, зроблені в момент τ в обсязі $I(\tau)$, далі будуть освоюватися поступово відповідно до деякого розподілу $N(t,\tau)$, причому

$$\int_0^\infty N(t,\tau)dt=1.$$

Так як інвестиції робляться не тільки у фіксований момент часу, але, взагалі кажучи, в будь-який момент τ, то до часу t накопичиться наступний обсяг фондів

$$V(t)=\int_{-\infty}^{t} N(t,\tau)I(\tau)d\tau .$$

При $N(t,\tau)=N(t-\tau)$ маємо

$$V(t)=\int_{-\infty}^{t} N(t-\tau)I(\tau)d\tau .$$

Далі приймається показовий закон розподілу

$$N(t-\tau)=\chi e^{-\chi(t-\tau)}$$

$$\int_{\tau}^{\infty} N(t-\tau)d\tau=\int \chi e^{-\chi(t-\tau)}dt=1, \text{ то}$$

$$V(t)=\chi\int_{-\infty}^{t} e^{-\chi(t-\tau)}I(\tau)dt .$$

Після диференціювання по t отриманого співвідношення, знаходимо $\dfrac{dV}{dt}=\chi I(t)-\chi V(t)$ або $\dfrac{dV}{dt}+\chi V(t)=\chi I(t)$, що дозволяє знайти швидкість зміни фондів за відсутності втрат фондів у системі.

$$V(t)=e^{-\chi t}\left[V_0+\chi\int_{0}^{t} e^{-\chi(t-\tau)}I(t)dt\right],$$

де $V_0=V(0)$.

1.6. Замкнуті динамічні моделі економічних систем

1.6.1. Модель Харрода-Домара

Модель Харрода-Домара є найпростішим варіантом моделі мікроекономічної динаміки [5]. Модель описує динаміку доходу $Y(t)$, який розглядається як сума споживання $C(t)$ та інвестицій $I(t)$, тобто

$$Y(t)=C(t)+I(t).$$

У свою чергу, передбачається, що швидкість росту доходу пропорційна інвестиціям

$$\frac{dY(t)}{dt}=\beta I(t).$$

Спільне об'єднання системи рівнянь дає диференціальне рівняння для доходу

$$\frac{dY(t)}{dt}-\beta Y(t)=-\beta C(t),$$

де $Y(0)=Y_0$.

Розв'язок рівняння має вигляд

$$Y(t)=e^{\beta t}\left[A-\beta\int_0^t C(\tau)e^{-\beta\tau}d\tau\right],$$

де A – постійна інтегрування.

Приймаючи в розв'язку $t=0$, отримуємо $A=Y_0$.

Тоді

$$Y(t)=e^{\beta t}\left[Y_0-\beta\int_0^t C(\tau)e^{-\beta\tau}d\tau\right].$$

Прийнято [14] розглядати наступні окремі випадки завдання $C=C(t)$:

1) $C(t)=0$. Тоді розв'язок приймає вигляд

$$Y(t) = Y_0 \cdot e^{\beta t}$$

і описує експоненціальне зростання доходу.

2) $C(t) = C_0 = \text{const}$. Тоді

$$Y(t) = Y_0 \cdot e^{\beta t} + C_0\left(1 - e^{\beta t}\right) = \left(Y_0 - C_0\right)e^{\beta t} + C_0.$$

3) $C(t) = C_0 e^{\alpha t}$. Тоді

$$Y(t) = Y_0 \cdot e^{\beta t} - \frac{\beta C_0}{\alpha - \beta} e^{\beta t}\left(e^{(\alpha-\beta)t} - 1\right) = \left(Y_0 - \frac{\beta C_0}{\alpha - \beta}\right) \cdot e^{\beta t} - \frac{\beta C_0}{\alpha - \beta} e^{\alpha t}.$$

Таким чином, всі три випадки завдання $C = C(t)$ описують експоненціальне зростання доходу.

Розглянемо у випадку (3) $\alpha = \beta$. Отримуємо

$$Y(t) = Y_0 \cdot e^{\beta t} - \beta C_0 e^{\beta t} \lim_{\alpha \to \beta}\left(\frac{e^{(\alpha-\beta)t} - 1}{\alpha - \beta}\right) = Y_0 \cdot e^{\beta t} - \beta C_0 e^{\beta t} \lim_{\alpha \to \beta} \frac{1 + (\alpha - \beta)t - 1}{\alpha - \beta} =$$

$$= Y_0 \cdot e^{\beta t} - \beta C_0 e^{\beta t} t = Y_0 \cdot e^{\beta t}\left(1 - \frac{\beta C_0}{Y_0} t\right).$$

При $\beta t << 1$ маємо $Y(t) \approx Y_0 \cdot \left[1 + \beta\left(1 - \frac{C_0}{\lambda_0}\right)t + \ldots\right]$, тобто зростання $Y(t)$.

1.6.2. Спрощена модель Солоу

Вище ми розглядали моделі економічних систем, коли закони введення ресурсів у часі покладалися відомими, тобто $K = K(t)$ і $L = L(t)$. Використовуючи виробничу функцію, отримували закон випуску продукції $Y = Y(t)$.

Тут розглянемо замкнуту систему. Замкнуті динамічні моделі макроекономіки діляться на односекторні і багатосекторні. Кожен сектор виробляє один вид продукту. Модель Солоу є односекторною моделлю економічного зростання. У цій моделі економічна система розглядається як єдине ціле, виробляє один продукт V, який частково інвестується, а частково споживається

$$Y = I + C,$$

де I – інвестиції; C – споживання.

Нехай $I = \rho Y$, $C = (1-\rho)Y$, де ρ – норма накопичення.

Випуск продукції $Y = Y(t)$ визначається як основа функції

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}, \quad a_1 + a_2 = 1,$$

де K, L – ресурси (фонди і число зайнятих працею).

Темп зростання трудових ресурсів експоненціальний

$$L = L_0 e^{nt},$$

де $L_0 = L(0)$; n – темп зростання.

Зміна фондів відбувається за рахунок амортизаційних витрат A та інвестицій I, де $A = \mu K$ (μ - частка вибулих основних виробничих фондів).

Тоді $\frac{dK}{dt} = I - A$, де $K(0) = K_0$, або

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + \rho Y.$$

У первинному варіанті моделі $\mu = 0$ [5] і модель мала вигляд

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}, \quad a_1 + a_2 = 1, \quad Y(0) = Y_0;$$

$$L = L_0 e^{nt}, \quad L(0) = L_0;$$

$$\frac{dK}{dt} = \rho Y, \quad K(0) = K_0.$$

Знайдемо $Y = \frac{1}{\rho}\frac{dK}{dt}$, тоді

$$\frac{1}{\rho}\frac{dK}{dt} = a_0 K^{a_1} L^{a_2}.$$

Поділяючи змінні, отримуємо

$$\frac{dK}{K^{a_1}} = \rho a_0 L_0^{a_2} e^{nt} dt.$$

Інтегруємо отримане диференціальне рівняння

$$K = K_0 \left[1 + \frac{a_0}{n}\left(\frac{L_0}{K_0}\right)^{a_2}\left(e^{nt} - 1\right)\right]^{\frac{1}{a_2}}.$$

Тепер знайдемо випуск продукції

$$Y = Y_0 \left[1 + \frac{a_0}{n}\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{a_2}\left(e^{nt} - 1\right)\right]^{\frac{a_1}{a_2}} e^{a_2 nt},$$

Звідки отримуємо, що

$$\lim_{t\to 0} Y = Y_0,$$

$$\lim_{t\to\infty} Y = \lim_{t\to\infty} Y_0 \left(\frac{a_0}{n}\right)^{\frac{a_1}{a_2}} \left(\frac{L_0}{K_0}\right)^{a_1} e^{n\left(a_2 + \frac{a_1}{a_2}\right)t} \to \infty.$$

1.6.3. Розширена модель Солоу

Як і в спрощеному варіанті приймаємо по [5]

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}, \quad a_1 + a_2 = 1, \quad L = L_0 e^{nt};$$

$$Y = I + C,$$

$$I = \rho(1 - a)Y;$$

$$C = (1 - \rho)(1 - a)Y,$$

де a – коефіцієнт прямих витрат.

У цьому випадку $\frac{dK}{dt} = -A + I$ або $\frac{dK}{dt} = -\mu K + \rho(1 - a)Y$.

Розглянемо рівняння динаміки фондів, приймаючи $Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$.

Маємо

$$\frac{dK}{dt} + \mu K = \rho a_0 K^{a_1} L_0^{a_1} e^{a_1 nt}.$$

Для розв'язку отриманого рівняння зробимо в ньому заміну $K = e^{-\mu t} u$. Тоді отримуємо, що

$$\frac{dK}{dt} + \mu K = e^{-\mu t}\frac{du}{dt} - \mu e^{-\mu t} u + \mu e^{-\mu t} u = e^{-\mu t}\frac{du}{dt}.$$

Таким чином, знайдемо, що

$$K^{a_1} = e^{-\mu a_1 t} u^{a_1}.$$

Отже, диференціальне рівняння приймає вигляд

$$e^{-\mu t}\frac{du}{dt} = \left(\rho a_0 L_0^{a_2}\right) e^{-\mu a_1 t} \cdot e^{n a_2 t} u^{a_1}.$$

Поділяючи змінні, отримуємо

$$\frac{du}{u^{a_1}} = \left(\rho a_0 L_0^{a_2}\right) e^{(n a_2 + \mu a_2)t} dt.$$

Проінтегруємо отримане рівняння

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{u^{a_1}} = \left(\rho a_0 L_0^{a_2}\right) \int_0^t e^{(n+\mu)(1-a_1)t} dt.$$

Отримуємо

$$u = \left[K_0^{1-a_1} + \frac{\rho a_0 L_0^{1-a_1}}{(n+\mu)} \left(e^{(n+\mu)(1-a_1)t} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{1-a_1}},$$

де прийнято, що $u_0 = K_0 = K(0)$.

Повертаючись до колишньої змінної *K*, отримуємо

$$K = K_0 e^{-\mu t} \left[1 + \frac{\rho a_0}{(n+\mu)} \left(\frac{L_0}{K_0} \right)^{1-a_1} \left(e^{(n+\mu)(1-a_1)t} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{1-a_1}}.$$

Маємо:

при $t \to 0 \quad K \to K_0$,

при $t >> 0 \quad K = K_0 \left(\frac{\rho a_0}{(n+\mu)} \right)^{\frac{1}{1-a_1}} \left(\frac{L_0}{K_0} \right) e^{nt} = \left(\frac{\rho a_0}{(n+\mu)} \right)^{\frac{1}{1-a_1}} L_0 e^{nt}$.

1.6.4. Модель розвитку трьохсекторної економіки

Вище нами розглядалася динаміка односекторної економіки. Іншими словами, передбачалося виробництво продукції єдиного виду. Так як реальна макроекономіка є багатосекторною, то розгляд моделі з трьома секторами є більш наближеним до реалій. Отже, нехай у першому секторі виробляються засоби виробництва, у другому - засоби споживання. Третій, бюджетний сектор, є чисто витратним. У ньому зосереджено виробництво матеріальних і духовних чинників, необхідних для функціонування перших двох факторів: наука, просвітництво, освіта, витрати на утримання військово-промислового комплексу, охорону здоров'я [2].

Отже, нехай ρ_1-а частина продукції першого сектора Y_1 інвестується в основні фонди 1-го сектора, ρ_2-а частина продукції Y_1 - в капітал 2-го сектора, а $\rho_3 = 1 - \rho_1 - \rho_2$ - в 3-й сектор. Амортизація основних фондів у кожному секторі економіки вважається відомою і задається коефіцієнтами μ_1, μ_2, μ_3. Розподіл трудових ресурсів за секторами рівний відповідно L_1, L_2, L_3, причому

$$L_1 + L_2 + L_3 = L = \text{const}.$$

Таким чином, динаміка руху фондів (K_1, K_2, K_3) описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dK_1}{dt} = \rho_1 \cdot Y_1(K_1, L_1) - \mu_1 K_1;$$

$$\frac{dK_2}{dt} = \rho_2 \cdot Y_1(K_1, L_1) - \mu_2 K_2;$$

$$\frac{dK_3}{dt} = (1 - \rho_1 - \rho_2) \cdot Y_1(K_1, L_1) - \mu_3 K_3,$$

де виробничі функції Y_1, Y_2, Y_3 у всіх трьох секторах вважаються функціями Кобба-Дугласа

$$Y_1 = A_1 K_1^{a_1} L_1^{1-a_1},$$

$$Y_2 = A_2 K_2^{a_2} L_2^{1-a_2},$$

$$Y_3 = A_3 K_3^{a_3} L_3^{1-a_3},$$

де $A_i, a_i \ (i = 1,2,3)$ – постійні.

Вважаємо, що при $t \to \infty$ $K_1' \sim K_2' \sim K_3' \to 0$. Тоді $\mu_1 K_1 = \rho_1 \cdot Y_1$, $\mu_2 K_2 = \rho_2 \cdot Y_1$, $\mu_3 K_3 = (1 - \rho_1 - \rho_2) \cdot Y_1$.

Отримані рівності разом з виробничими функціями секторів дозволяють знайти

$$\frac{K_1}{L_1} = \left(\frac{\rho_1 A_1}{\mu_1}\right)^{\frac{1}{1-a_1}}; \quad \frac{K_2}{L_2} = \frac{\rho_2}{\mu_2} A_1 \left(\frac{\rho_1 A_1}{\mu_1}\right)^{\frac{a_1}{1-a_1}} \frac{p_1}{p_2};$$

$$\frac{K_3}{L_3} = \frac{\rho_3}{\mu_3} A_1 \left(\frac{\rho_1 A_1}{\mu_1}\right)^{\frac{a_1}{1-a_1}} \frac{\rho_1}{\rho_3} = \frac{(1 - \rho_1 - \rho_2)}{\mu_2} A_1 \left(\frac{\rho_1 A_1}{\mu_1}\right)^{\frac{a_1}{1-a_1}} \frac{p_1}{(1 - p_1 - p_2)},$$

де $p_1 = \frac{L_1}{L}$, $p_2 = \frac{L_{21}}{L}$, $p_3 = 1 - p_1 - p_2$.

Наведені співвідношення дозволяють вирішити оптимізаційну задачу розподілу ресурсів за секторами.

1.6.5. Моделі економічних циклів

Згідно [4], якщо прийняти зміни національного доходу та інвестицій у вигляді

$$\frac{dY}{dt} = I - \rho Y,$$

$$\frac{dI}{dt} = a\frac{dY}{dt} - I,$$

то записана система буде еквівалентна рівнянню гармонійного осцилятора

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + (1 + \rho - a)\frac{dY}{dt} + \rho Y = 0.$$

Інша модель циклу наведена в [18]. Вважаємо, що в деякий момент часу обсяг виробництва включає інвестиції *I*, споживання *C* і урядові дотації *G*:

$$Y = I + C + G.$$

В свою чергу $C = (1 - \rho)Y$.

Поставимо завдання з метою збалансувати економіку таким чином, щоб обсяг виробництва $Y(t)$ збігався з попитом $D(t)$, тобто

$$D(t) \equiv Y(t).$$

Однак, слід враховувати, що виробництво не може миттєво реагувати на зміну попиту, що призводить до виникнення запізнювання T. Щоб збалансувати економіку при наявності запізнювання, тут вважаємо

$$D(t) = (1 - \rho) \cdot Y(t - T) + I(t) + G_0.$$

Одночасно вважаємо, що $I(t - T) \approx I(t)$, а $Y(t - T) \approx Y(t) - T\frac{dY}{dt}$.

Тоді

$$D(t) = (1 - \rho) \cdot \left[Y(t) - T\frac{dY}{dt}\right] + I(t) + G_0 =$$

$$= Y(t) - \left\{\rho Y(t) + (1 - \rho)T\frac{dY}{dt} - I(t) - G_0\right\}.$$

З останнього виразу випливає, що умова $D(t) = Y(t)$ виконується при

$$(1-\rho)T\frac{dY}{dt}+\rho Y(t)-I(t)+G_0=0.$$

Однією з можливих стратегій в області інвестування є «принцип акселератора», згідно з яким

$$I(t)\equiv a\frac{dY}{dt},\ a>0.$$

Однак, на практиці цей принцип точно не виконується, але до нього можна наблизитися при

$$\frac{dI}{dt}=b\left(a\frac{dY}{dt}-I(t)\right),\ b>0.$$

Продиференціюємо за часом t рівняння

$$(1-\rho)T\frac{dY}{dt}+\rho Y=I(t)-G_0,$$

де $G_0=\mathrm{const}$. Отримаємо

$$(1-\rho)T\frac{d^2Y}{dt^2}+\rho\frac{dY}{dt}=\frac{dI}{dt}.$$

Враховуючи рівність

$$\frac{dI}{dt}=b\left(a\frac{dY}{dt}-I(t)\right).$$

Отримуємо

$$(1-\rho)T\frac{d^2Y}{dt^2}+\rho\frac{dY}{dt}=ab\frac{dY}{dt}-bI(t)$$

або

$$(1-\rho)T\frac{d^2Y}{dt^2}+(\rho-ab)\frac{dY}{dt}=-bI(t).$$

Отримане рівняння з урахуванням рівності $I(t)=(1-\rho)T\frac{dY}{dt}+\rho Y+G_0$ після низки перетворень приводиться до виду

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+\left[\frac{\rho-ba+(1-\rho)bT}{(1-\rho)T}\right]\frac{dy}{dt}+\left[\frac{\rho b}{(1-\rho)T}\right]y=0,$$

де $y=Y-\frac{G_0}{\rho}$.

Позначимо $k=\frac{\rho-ba+(1-\rho)bT}{(1-\rho)T}$; $\omega_0^2=\frac{\rho b}{(1-\rho)T}$.

Тоді рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+k\frac{dy}{dt}+\omega_0^2y=0.$$

Нагадаємо, що при $k=0$ и $\omega_0^2>0$ розв'язок рівняння має вигляд

$$y(t)=c_1\cos\omega_0t+c_2\sin\omega_0t,$$

що описує незгасаючі гармонійні коливання.

При $\lambda^2=k^2-u\omega_0^2>0$ маємо $y(t)=c_1\exp\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)t+c_2\exp\left(\frac{\lambda-k}{2}\right)t$;

При $\lambda^2=u\omega_0^2-k^2>0$

$$y(t)=\begin{cases}e^{-\frac{kt}{2}}\left(c_1\cos\frac{\lambda t}{2}+c_2\sin\frac{\lambda t}{2}\right), & k>0;\\ e^{\frac{kt}{2}}\left(c_1\cos\frac{\lambda t}{2}+c_2\sin\frac{\lambda t}{2}\right), & k<0.\end{cases}$$

Останній розв’язок при $k>0$ описує затухаючі коливання, а при $k<0$ - зростаючі по амплітуді коливання. Кругова приватна цих коливань

$$\omega_1=\frac{\lambda}{2}=\sqrt{\omega_0^2-(k/2)^2},$$

а період коливань

$$T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-(k/2\omega_0)^2}}.$$

Таким чином, розглянута система є коливальною. Особливу цікавість викликає розв'язок (результат), що дає коливання на тлі експоненціального зростання.

1.7. Синергетичні моделі в економіці

1.7.1. Синергетика. Основні поняття

Синергетика визначається як наука про колективні статичні і динамічні явищах в закритих і відкритих багатокомпонентних системах з кооперативною взаємодією між елементами системи [4]. Основи синергетики були закладені Германом Хакеном (1977, 1983).

Синергетика концентрує увагу дослідників на структурних особливостях просторово-часової організації систем на макрорівні. При цьому фізична природа систем не грає ролі. Синергетика дозволяє створювати теорії про те, як порядок дає початок хаосу, але в хаосі зароджується новий порядок. Це загальна властивість будь-яких еволюційних систем.

Термін «синергетика» походить від грецького слова «синергія» - сприяння, співробітництво, кооперація. «Хаос» - це одне з понять синергетики. Слід зазначити, що загальноприйнятого поняття хаосу не існує. У літературі найчастіше хаос визначається як явище, пов'язане з проявом випадковості і невизначеності в детермінованих системах. Мабуть, від слова «хаос» і виникло слово «газ». У фізиці під газом розуміється агрегатний стан речовини, де складові його молекули рухаються в різних напрямках - «хаотично». В одному кубічному сантиметрі газу міститься $\sim 0,3 \cdot 10^{20} \sim$ молекул. Однак, хаотичний рух настільки великого числа молекул народжує порядок - так тиск газу всередині судини визначається середньою кінетичною енергією молекул в одиниці об'єму газу.

Причиною виникнення хаосу в синергетиці є нелінійності систем і випадкові процеси. Нелінійності нестійких систем призводять до виникнення катастроф. Вперше термін «теорія катастроф» введений французьким топологом Р. Томі для математичного опису подій, явищ, пов'язаних з різкими стрибками і якісними змінами картини досліджуваного процесу. Як зазначалося Р. Томом, теорія катастроф базується на формуванні структурно стійких (стійко еволюціонуючих) у часі динамічних систем, що переходять в інші. Ці переходи Том назвав *катастрофами*, а їх послідовність у часі - *морфологією процесу*. Як приклад з фізики до катастроф можна віднести явища фазових переходів (зміни агрегатного стану речовини). У математиці в ролі катастроф можуть виступати сингулярності (особливості) функцій.

У синергетиці наступ катастроф зв'язується з дією *аттракторів* (attract - англ. «тяжіння»). Під аттракторами розуміється деякий граничний стан складних нелінійних систем в n - вимірному фазовому просторі. Потрапивши в область аттракторів, система «втягується» в неї і може вийти з неї лише за рахунок «потужних» зовнішніх впливів, що руйнують структуру системи. Ця обставина дозволяє вважати аттрактори областями самоорганізації системи. Процес розвитку системи з точки зору синергетики трактується як рух системи по певній траєкторії в фазовій площині під «дією» аттракторів. У фізиці незворотність явищ у природі і є прояв аттракторів. При циклічному розвитку систем незворотність проявляється як перескок на якісно новий рівень при завершенні чергового циклу.

Синергетичні моделі економічної системи описуються нестійкими нелінійними динамічними рівняннями високої розмірності. З точки зору синергетики джерела складності поведінки економічних систем знаходяться в нестійкості і нелінійності. Синергетика показує, що хаос лежить в природі будь-якої еволюційної економічної системи. Економіка без інновацій залишається в застої (стійкій рівновазі), а інноваційні поштовхи (сингулярні обурення) можуть привести до хаосу. Математика тут допомагає лише дати кількісний опис названих вище ефектів. Синергетичний підхід до моделювання викладено, наприклад, в [4].

1.7.2. Математична модель системи «хижак - жертва»

Синергетика, зокрема, має справу з кооперативною взаємодією множини підсистем, яке макроскопічно проявляється як самоорганізація. Одним з найбільш важливих принципів (цілей) самоорганізації є «виживання» підсистем, отже, і всієї системи. З точки зору математики виживання системи має моделюватися можливістю виходу на стійкі рішення (експоненціальне зростання, періодичні коливання).

Вже класичним прикладом такої системи є математична модель «хижак - жертва» (модель Лотки-Вольтеора). Ця модель описується системою диференціальних рівнянь [4, 13]

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(y_1 - y)x;$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta(x - x_1)y,$$

де α, β, x_1, y_1 – параметри;

t – час;

x, y – чисельності хижаків і жертв.

Ця система може бути записана інакше:

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 xy;$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2 y + b_2 xy.$$

Динаміка зміни популяцій хижаків і жертв відбувається наступним чином. Спочатку хижаки знищують багато тварин-жертв, тим самим підриваючи основу свого існування (поживне середовище), що призводить до зміни чисельності тварин-хижаків. В результаті зменшення хижаків починає рости поголів'я тварин-жертв. З часом (із запізненням) починають розмножуватися інтенсивно хижаки. Цей процес може стати періодичним, поки не зміняться зовнішні умови,

. Ці умови моделюються вибором коефіцієнтів a_1, a_2, b_1, b_2. Одна зміна зовнішніх умов може виглядати і як поява нових тварин або, наприклад, мисливців. Нова система може стати нестійкою, і її структура може змінитися.

Модель «хижак - жертва» застосовна для опису динаміки систем хімічно реагуючих речовин, різних біологічних систем, електронних систем. Аналогічна модель була побудована Гурвіном (1967) для опису класової боротьби робітників і капіталістів [4]. У його моделі в якості змінних були використані $y(t)$ - частка витрат на оплату праці робітників, $x(t)$ - коефіцієнт зайнятості.

У синергетиці досліджуються умови існування стійких і нестійких рішень.

1.7.3. Модель самоорганізації ринку праці

Як приклад економічної моделі самоорганізації розглянемо механізм функціонування ринку робочої сили [13].

Нехай $N_1(t)$ – загальне число фахівців, зайнятих в галузі на даний момент часу *t*; $N_2(t)$ – число потенційних робітників, які можуть бути залучені для роботи в даній галузі та які на даний момент є безробітними. Загальне число $N = N_1(t) + N_2(t) = \text{const}$ – місткість ринку робочої сили галузі. Вважаємо, що $w_1(t)dt$ – ймовірність того, що безробітний фахівець може знайти роботу за фахом за період часу *dt*, $w_2(t)dt$ – ймовірність звільнення працюючого за той же період. Тоді динаміка працюючих опишеться диференціальним рівнянням

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = N_2(t)\cdot w_1(t) - N_1(t)\cdot w_2(t),$$

де t – час у деяких відносних одиницях.

Додатково приймається, що

$$w_1(t) = K_1(N - N_1(t));$$

$$w_2(t) = K_2 N_1(t) + K_3 N_2(t),$$

де K_i $(i = 1, 2, 3)$ – коефіцієнти, які залежать від часу..

Рівняння динаміки працюючих перетворимо до вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax^2 + bx + c,$$

де $x(t) = N_1(t)/N$;

$a = \nu_1 + \nu_2 - \nu_3$;

$b = t(2\nu_1 + \nu_3)$;

$c = \nu_1$,

і, в свою чергу, $\nu_i = K_i N,\ \ i = 1, 2, 3.$

Вважаючи в отриманому рівнянні $dx/dt = 0$, знайдемо стаціонарні точки

$$x_1 = \frac{(2\nu_1 + \nu_3) - \left(\nu_3^2 + 4\nu_1\nu_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2(\nu_1 + \nu_2 - \nu_3)} = \frac{b - d}{2a};$$

$$x_2 = \frac{(2\nu_1 + \nu_3) + \left(\nu_3^2 + 4\nu_1\nu_2\right)^{\frac{1}{2}}}{2(\nu_1 + \nu_2 - \nu_3)} = \frac{b + d}{2a},$$

де $d = \left(\nu_3^2 + 4\nu_1\nu_2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Точний розв’язок диференціального рівняння через стаціонарні точки виражається наступним чином

$$x(t) = x_2 + \frac{x_2 - x_1}{\frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}\exp(-dt) - 1},$$

де $x_0 = x(0)$ – рівень зайнятості в початковий момент часу.

Для дослідження стаціонарних розв’язків на стійкість розглянемо мале обурення стаціонарного стану $\delta x(t)$

$$\frac{d\delta x(t)}{dt} = \left[2(\nu_1 + \nu_3 - \nu_2)x_i - (2\nu_1 + \nu_3)\right]\delta x(t), \quad i = 1, 2,$$

де x_i – стаціонарна точка.

Знайдемо $x(t) = \mathrm{const} \cdot \exp(\alpha_i t)$, де $\alpha_i = 2(\nu_1 + \nu_3 - \nu_2)x_i - (2\nu_1 + \nu_3)$.

При $\alpha_1 = -\alpha$ – розв’язок стійкий, $\alpha_1 = \alpha$ – розв’язок нестійкий.

Таким чином, використання синергетичної моделі динаміки ринку праці дозволяє досліджувати ринок на предмет його стійкості.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

2.1. Одноіндексні задачі лінійного програмування

Лінійне програмування (ЛП) є найбільш простим і найкраще вивченим розділом математичного програмування. **Математичне програмування** ("планування") – це розділ математики, що займається розробкою методів відшукання екстремальних значень функції, на аргументи якої накладено обмеження. Методи математичного програмування використовуються в економічних, організаційних, військових та інших системах для вирішення так званих **розподільних задач**. Розподільні задачі (РЗ) виникають у випадку, коли наявних ресурсів не вистачає для виконання кожної з намічених робіт ефективним чином і необхідно найкращим чином розподілити ресурси по роботах у відповідності з обраним критерієм оптимальності.

Характерні риси задач ЛП такі:

1) показник оптимальності L(X) являє собою ***лінійну*** функцію від елементів розв'язку $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

2) обмежувальні умови, що накладаються на можливі розв'язки, мають вигляд ***лінійних*** рівностей або нерівностей.

Загальна форма запису моделі задачі ЛП

Цільова функція (ЦФ)

$$L(X)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \to \max(\min), \tag{2.1}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le (\ge, =) b_1 \ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le (\ge, =) b_2 \ , \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le (\ge, =) b_m \ , \\ x_1, x_2, .. x_k \ge 0 \ (k \le n). \end{cases}$$

При описі реальної ситуації за допомогою лінійної моделі слід перевіряти наявність у моделі таких властивостей, як пропорційність і адитивність. **Пропорційність** означає, що внесок кожної змінної в ЦФ і загальний обсяг споживання відповідних ресурсів повинен бути ***прямо пропорційний*** величині цієї змінної **Адитивність** означає, що ЦФ і обмеження повинні представляти собою суму вкладів від різних змінних. Прикладом порушення адитивності слугує ситуація, коли збільшення збуту одного з конкуруючих видів продукції, вироблених однією фірмою, впливає на обсяг реалізації іншого.

Допустимий розв'язок – це сукупність чисел (план) $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняють обмеження задачі (2.1).

Оптимальний розв'язок – це план, при якому ЦФ приймає своє максимальне (мінімальне) значення.

Приклади розв'язання одноіндексних задач лінійного програмування

Задача 2.1

Фабрика виробляє два види фарб: перший - для зовнішніх, а другий - для внутрішніх робіт. Для виробництва фарб використовуються два інгредієнти: А і В. Максимально можливі добові запаси цих інгредієнтів складають 6 і 8 т відповідно. Відомі витрати А і В на 1 т відповідних фарб (табл. 2.1). Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу 2-го виду ніколи не перевищує попиту на фарбу 1-го виду більш, ніж на 1 т. Крім того, встановлено, що попит на фарбу 2-го виду ніколи не перевищує

2 т на добу. Оптові ціни однієї тонни фарб рівні: 3 тис. грн.. для фарби 1-го виду; 2 тис. грн.. для фарби 2-го виду.

Необхідно побудувати математичну модель, що дозволяє встановити, яку кількість фарби кожного виду треба виробляти, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним.

Таблиця 2.1

Параметри задачі про виробництво фарб

Інгредієнти	Витрата інгредієнтів, т інгр./т фарби		Запас, т інгр./добу
	Фарба 1-го виду	Фарба 2-го виду	
A	1	2	6
B	2	1	8

Розв'язок

Перш ніж побудувати математичну модель задачі, тобто записати її за допомогою математичних символів, необхідно чітко розібратися з економічною ситуацією, описаною в умові. Для цього необхідно з точки зору ***економіки***, а не математики, відповісти на наступні питання:

1) Що є ***шуканими величинами*** задачі?

2) Яка ***мета*** розв'язку? Який ***параметр*** задачі слугує критерієм ефективності (оптимальності) розв'язку, наприклад, прибуток, собівартість, час і т.д. В якому ***напрямку*** повинно змінюватися значення цього параметра (до max або до min) для досягнення найкращих результатів?

3) Які ***умови*** щодо шуканих величин і ресурсів задачі повинні бути виконані? Ці умови встановлюють, як повинні співвідноситися один з одним різні параметри задачі, наприклад, кількість ресурсу, витраченого при виробництві, і його запас на складі; кількість продукції, що

випускається, і ємність складу, де вона зберігатиметься; кількість продукції, що випускається і ринковий попит на цю продукцію і т.д.

Тільки після економічної відповіді на всі ці питання можна приступати до запису цих відповідей в ***математичному*** вигляді, тобто до запису математичної моделі.

1) Шукані величини є ***змінними*** задачі, які як правило позначаються малими латинськими літерами з індексами, наприклад, однотипні змінні зручно представляти у вигляді $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

2) Мета розв'язку записується у вигляді ***цільової функції***, що позначається, наприклад, $L(X)$. Математична формула ЦФ $L(X)$ відображає спосіб розрахунку значень параметра - критерію ефективності задачі.

3) Умови, що накладаються на змінні і ресурси задачі, записуються у вигляді системи рівностей або нерівностей, тобто ***обмежень***. Ліві і праві частини обмежень відображають спосіб отримання (розрахунок або чисельні значення з умови задачі) значень тих параметрів задачі, на які були накладені відповідні умови.

У процесі запису математичної моделі необхідно вказувати одиниці виміру змінних задачі, цільової функції і всіх обмежень.

Побудуємо модель задачі № 1, використовуючи описану методику.

Змінні задачі

У задачі № 1.01 потрібно встановити, скільки фарби кожного виду треба виробляти. Тому шуканими величинами, а значить, і змінними задачі є *добові обсяги виробництва* кожного виду фарб:

x_1 – добовий обсяг виробництва фарби 1-го виду, [т фарби / добу];

x_2 – добовий обсяг виробництва фарби 2-го виду, [т фарби / добу].

Цільова функція

В умові задачі № 1.01 сформульована мета - домогтися максимального доходу від реалізації продукції. Тобто критерієм ефективності служить параметр *добового доходу*, що має прагнути до *максимуму.* Щоб розрахувати величину добового доходу від продажу фарби обох видів, необхідно знати обсяги виробництва фарб, тобто x_1 і x_2 т фарби на добу, а також оптові ціни на фарби 1-го і 2-го видів - згідно з умовою, відповідно 3 і 2 тис. грн. за 1 т фарби. Таким чином, дохід від продажу добового обсягу виробництва фарби 1-го виду дорівнює $3x_1$ тис. грн. на добу, а від продажу фарби 2-го виду - $2x_2$ тис. грн. на добу. Тому запишемо ЦФ у вигляді суми доходу від продажу фарб 1-го і 2-го видів (при допущенні незалежності обсягів збуту кожної з фарб)

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \text{ [тис.грн./добу]},$$

$$\left[\frac{\textit{тис.грн.}}{\textit{т фарби}} \cdot \frac{\textit{т фарби}}{\textit{добу}} = \frac{\textit{тис.грн.}}{\textit{добу}}\right].$$

Обмеження

Можливі обсяги виробництва фарб x_1 і x_2 обмежуються наступними умовами:

- кількість інгредієнтів А і В, витрачених протягом доби на виробництво фарб обох видів, не може перевищувати добового запасу цих інгредієнтів на складі;
- згідно з результатами вивчення ринкового попиту добовий обсяг виробництва фарби 2-го виду може перевищувати обсяг виробництва фарби 1-го виду, але не більше, ніж на 1 т фарби;
- обсяг виробництва фарби 2-го виду не повинен перевищувати 2 т на добу, що також випливає з результатів вивчення ринків збуту;
- обсяги виробництва фарб не можуть бути від’ємними.

Таким чином, всі обмеження задачі № 1.4 діляться на 3 групи, обумовлені:

1) витратою інгредієнтів;

2) ринковим попитом на фарбу;

3) невід'ємністю обсягів виробництва.

Обмеження **по витраті** будь-якого з інгредієнтів мають наступну ***змістовну*** форму запису

$$\begin{pmatrix} \textit{Витрата конкретного інгредієнта} \\ \textit{на виробництво обох видів фарби} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \textit{Максимально можливий} \\ \textit{запас даного інгредієнта} \end{pmatrix}.$$

Запишемо ці обмеження в ***математичній*** формі.

Ліва частина обмеження - це формула розрахунку добової витрати конкретного інгредієнта на виробництво фарб. Так з умови відома витрата інгредієнта А на виробництво 1 т фарби 1-го виду (1 т інгр. А) і 1 т фарби 2-го виду (2 т інгр. А) (див. табл.1.1). Тоді на виробництво x_1 т фарби 1-го виду та x_2 т фарби 2-го виду потрібно $1x_1 + 2x_2$ т інгр. А.

Права частина обмеження - це величина добового запасу інгредієнта на складі, наприклад, 6 т інгредієнта А на добу (див. табл.2.1). Таким чином, обмеження по витраті А має вигляд

$$1x_1 + 2x_2 \le 6 \qquad \left[\frac{\text{т інгр.А}}{\textit{т фарби}} \cdot \frac{\textit{т фарби}}{\text{добу}}\right] \le \left[\frac{\text{т інгр.А}}{\text{добу}}\right].$$

Аналогічний математичний запис обмеження по витраті В

$$2x_1 + 1x_2 \le 8 \qquad \left[\frac{\text{т інгр.В}}{\textit{т фарби}} \cdot \frac{\textit{т фарби}}{\text{добу}}\right] \le \left[\frac{\text{т інгр.В}}{\text{добу}}\right].$$

Примітка 1. Слід завжди перевіряти розмірність лівої і правої частини кожного з обмежень, оскільки їх розбіжність свідчить про принципову помилку при складанні обмежень.

Обмеження по добовому **обсягу виробництва** фарби 1-го виду в порівнянні з обсягом виробництва фарби 2-го виду має

змістовну форму

$$\begin{pmatrix} \textit{Перевищення обсягу виробництва фарби 2-го виду} \\ \text{над обсягом виробництва фарби 1-го виду} \end{pmatrix} \le \left(1 \, \frac{\textit{т} \text{ фарби}}{\text{добу}} \right)$$

і ***математичну*** форму

$$x_2 - x_1 \le 1 \quad \left[\frac{\text{т фарби}}{\text{добу}} \right] \le \left[\frac{\text{т фарби}}{\text{добу}} \right].$$

Обмеження по добовому **обсягу виробництва** фарби 1-го виду має ***змістовну*** форму

$$(\text{Попит на фарбу 1-го виду}) \le \left(2 \, \frac{\text{т фарби}}{\text{добу}} \right)$$

і ***математичну*** форму

$$x_1 \le 2 \quad \left[\frac{\text{т фарби}}{\text{добу}} \right] \le \left[\frac{\text{т фарби}}{\text{добу}} \right].$$

Невід'ємність обсягів виробництва задається як

$$x_1 \ge 0,$$
$$x_2 \ge 0 \; .$$

Таким чином, ***математична модель*** цієї задачі має вигляд

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max \; [\text{грн.}/\textit{добу}]$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \; [\text{т інгр.А/добу}], \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \; [\text{т інгр. В/добу}], \\ -x_1 + x_2 \le 1 \; [\text{т фарби/добу}], \\ \qquad\quad x_2 \le 2 \; [\text{т фарби/добу}], \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \, [\text{т фарби/добу}]. \end{cases}$$

Задача 2.2

Виконати замовлення з виробництва 32 виробів B_1 і 4 виробів B_2 взялися бригади $Б_1$ і $Б_2$. Продуктивність бригади $Б_1$ з виробництва виробів B_1 і B_2 становить відповідно 4 і 2 вироби на годину, фонд робочого часу цієї бригади 9,5 г. Продуктивність бригади $Б_2$ - відповідно 1 і 3 вироби на годину, а її фонд робочого часу - 4 г. Витрати, пов'язані з виробництвом одиниці виробу, для бригади $Б_1$ рівні відповідно 9 і 20 грн, для бригади $Б_2$ - 15 і 30 грн.

Складіть математичну модель задачі, що дозволяє знайти оптимальний обсяг випуску виробів, що забезпечує мінімальні витрати на виконання замовлення.

Розв'язок

Змінні задачі

Шуканими величинами в задачі є обсяги випуску виробів. Вироби B_1 будуть випускатися двома бригадами $Б_1$ і $Б_2$. Тому необхідно *розрізняти* кількість виробів B_1, вироблених бригадою $Б_1$, і кількість виробів B_1, вироблених бригадою $Б_2$. Аналогічно, обсяги випуску виробів B_2 бригадою $Б_1$ і бригадою $Б_2$ також є різними величинами. Внаслідок цього в даній задачі 4 змінні. Для зручності сприйняття використовуватимемо двохіндексну форму запису x_{ij} - кількість виробів B_j (j=1,2), що виготовляються бригадою $Б_i$ (i=1,2), а саме,

x_{11} – кількість виробів B_1, що виготовляються бригадою $Б_1$, [шт.];

x_{12} – кількість виробів B_2, що виготовляються бригадою $Б_1$, [шт.];

x_{21} – кількість виробів B_1, що виготовляються бригадою $Б_2$, [шт.];

x_{22} – кількість виробів B_2, що виготовляються бригадою $Б_2$, [шт.].

Примітка 2. У цій задачі немає необхідності прив'язуватися до якого-небудь тимчасового інтервалу (в задачі № 1.4 була прив'язка до доби), оскільки тут потрібно знайти не обсяг випуску за певний час, а спосіб розподілу відомої планової величини замовлення між бригадами.

Цільова функція

Метою розв’язку задачі є виконання плану з *мінімальними* витратами, тобто критерієм ефективності розв’язку служить показник *витрат на виконання всього замовлення*. Тому ЦФ повинна бути представлена формулою розрахунку цих витрат. Витрати кожної бригади на виробництво одного виробу B_1 і B_2 відомі з умови. Таким чином, ЦФ має вигляд

$$L(X) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \to \min,$$

$$\left[\frac{грн.}{шт.} \cdot шт. = грн.\right].$$

Обмеження

Можливі обсяги виробництва виробів бригадами обмежуються наступними умовами:

- загальна кількість виробів B_1, випущених обома бригадами, повинна дорівнювати 32 шт., а загальна кількість виробів B_2 - 4 шт.;
- час, виділений на роботу над даним замовленням, становить для бригади $Б_1$ - 9,5 год, а для бригади $Б_2$ - 4 год;

• обсяги виробництва виробів не можуть бути від'ємними величинами.

Таким чином, всі обмеження задачі № 1.5 діляться на 3 групи, обумовлені:

1) величиною замовлення на виробництво виробів;
2) фондами часу, виділеними бригадам;
3) невід'ємністю обсягів виробництва.

Для зручності складання обмежень запишемо вихідні дані у вигляді таблиці 1.2.

Таблиця 2.2

Вихідні дані задачі 1.5

Бригада	Продуктивність бригад, шт/год		Фонд робочого часу, год
	$Б_1$	$Б_2$	
$Б_1$	4	2	9,5
$Б_2$	1	3	4
Заказ, шт	32	4	

Обмеження за **замовленням** виробів мають наступну ***змістовну*** форму запису

$$\begin{pmatrix} \textit{к}\text{ількість виробів } В_1, \\ \textit{вироблених} \text{ бригадами } Б_1 \text{ і } Б_2 \end{pmatrix} = (32\ \text{шт.})$$

и

$$\begin{pmatrix} \textit{кількість виробів } В_2, \\ \textit{вироблених} \text{ бригадами } Б_1 \text{ і } Б_2 \end{pmatrix} = (4\ \text{шт.}).$$

Математична форма запису має вигляд

$$x_{11} + x_{21} = 32 \quad [\text{шт.}] = [\text{шт.}] \text{ і}$$

$$x_{12} + x_{22} = 4 \quad [\text{шт.}] = [\text{шт.}].$$

Обмеження за **фондами часу** має ***змістовну*** форму

$$\begin{pmatrix} \text{Загальний час витрачений бригадою Б}_1 \\ \textit{на}\text{ випуск виробів В}_1 \text{ і В}_2 \end{pmatrix} \le (9{,}5 \text{ год})$$

і

$$\begin{pmatrix} \text{Загальний час витрачений бригадою Б}_2 \\ \textit{на}\text{ випуск виробів В}_1 \text{ і В}_2 \end{pmatrix} \le (4 \text{ год}).$$

Проблема полягає в тому, що за умовою задачі прямо не задано час, який витрачають бригади на випуск одного виробу B_1 або B_2, тобто не задана трудомісткість виробництва. Але є інформація про продуктивність кожної бригади, тобто про кількість вироблених виробів на 1 год. Трудомісткість Тр і продуктивність Пр є зворотними величинами, тобто

$$Тр = \frac{1}{Пр} \quad \left[\frac{\text{год}}{\text{шт.}}\right] = \left[1 \Big/ \frac{\text{шт.}}{\text{год}}\right].$$

Тому використовуючи табл.1.2, отримуємо наступну інформацію:

$\rightarrow \frac{1}{4}$ год витрачає бригада $Б_1$ на виробництво одного виробу B_1;

$\rightarrow \frac{1}{2}$ год витрачає бригада $Б_1$ на виробництво одного виробу B_2;

$\rightarrow \frac{1}{1}$ год витрачає бригада $Б_2$ на виробництво одного виробу B_1;

$\rightarrow \frac{1}{3}$ год витрачає бригада $Б_2$ на виробництво одного виробу B_2.

Запишемо обмеження по фондах часу в ***математичному*** вигляді

$$\frac{x_{11}}{4} + \frac{x_{12}}{2} \le 9{,}5 \quad \left[\frac{год}{шт.} \cdot шт\right] \le [год]$$

і

$$\frac{x_{21}}{1} + \frac{x_{22}}{3} \le 4 \quad \left[\frac{год}{шт.} \cdot шт\right] \le [год].$$

Невід'ємність обсягів виробництва задається як

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2;\ j=1,2).$$

Таким чином, ***математична модель*** цієї задачі має вигляд

$$L(X) = 9x_{11} + 20x_{12} + 15x_{21} + 30x_{22} \to \min \ [\text{грн.}],$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 32 & [\text{шт.}], \\ x_{12} + x_{22} = 4 & [\text{шт.}], \\ \dfrac{x_{11}}{4} + \dfrac{x_{12}}{2} \leq 9{,}5 & [\textit{год}], \\ \dfrac{x_{21}}{1} + \dfrac{x_{22}}{3} \leq 4 & [\textit{год}], \\ x_{ij} \geq 0\ (i=1,2;\ j=1,2)\ [\text{шт.}]\ . \end{cases}$$

Задача 2.3.

Для пошиття одного виробу потрібно викроїти з тканини 6 деталей. На швейній фабриці були розроблені два варіанти розкрою тканини. У табл.2.3 наведені характеристики варіантів розкрою 10 $м^2$ тканини і комплектність, тобто кількість деталей певного виду, які необхідні для пошиття одного виробу. Щомісячний запас тканини для пошиття виробів даного типу становить 405 $м^2$. У найближчий місяць планується зшити 90 виробів.

Побудуйте математичну модель задачі, що дозволяє в найближчий місяць виконати план з пошиття з мінімальною кількістю відходів.

Таблиця 2.3

Характеристики варіантів розкрою відрізків тканини по 10 $м^2$

Варіант розкрою	Кількість деталей, шт./відріз						Відходи, $м^2$ /відріз
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	
1	60	0	90	40	70	90	0,5

2	80	35	20	78	15	0	0,35
Комплектність, шт./виріб	1	2	2	2	2	2	

Розв’язання

Змінні задачі

У цій задачі шукані величини явно не вказані, але сказано, що повинен бути виконаний щомісячний план з пошиття 90 виробів. Для пошиття 90 виробів на місяць потрібно розкроїти строго певну кількість деталей. Крій виробляється з відрізів тканини по $10\,м^2$ двома різними способами, які дозволяють отримати різне число деталей. Оскільки заздалегідь невідомо, скільки тканини буде розкроювати першим способом і скільки - другим, то в якості шуканих величин можна задати *кількість відрізів тканини по 10* $м^2$, розкроєних кожним із способів:

x_1 – кількість відрізів тканини по 10 $м^2$, розкроєних першим способом протягом місяця, [відріз./міс.];

x_2 – кількість відрізів тканини по 10 $м^2$, розкроєних другим способом протягом місяця, [відріз./міс.].

Цільова функція

Метою розв’язку задачі є виконання плану при мінімальній кількості відходів. Оскільки кількість виробів строго запланована (90 шт./міс.), то цей параметр не описує ЦФ, а відноситься до обмеження, невиконання якого означає, що задача не розв’язана. А критерієм ефективності виконання плану служить параметр "кількість відходів", який необхідно звести до мінімуму. Оскільки при розкрої одного відрізу (10 $м^2$) тканини по 1-му варіанту виходить 0,5 $м^2$ відходів, а по 2-му варіанту - 0,35 $м^2$ (див. табл.1.3), то загальна кількість відходів при крої (ЦФ) має вигляд

$$L(X) = 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \rightarrow \min,$$

$$\left[\frac{м^2 \text{ відх.}}{відріз.} \cdot \frac{відріз.}{міс.} = \frac{м^2 \text{ відх.}}{міс.}\right].$$

Обмеження

Кількість розкроїв тканини різними способами обмежується наступними умовами:

- повинен бути виконаний план з пошиття виробів, іншими словами, загальна кількість викроєних деталей має бути такою, щоб з неї можна було пошити 90 виробів на місяць, а саме: деталей 1-го виду повинно бути як мінімум 90 і деталей інших видів - як мінімум по 180 (див. комплектність в табл.1.3).
- витрата тканини не повинна перевищувати місячного запасу його на складі;
- кількість відрізів розкроєної тканини не може бути від’ємною.

Обмеження за **планом пошиття** пальто мають наступну ***змістовну*** форму запису

$$\left(\begin{array}{l}\text{Загальна кількість деталей №1,}\\ \text{викроєних по всім варіантам}\end{array}\right) \geq (90\text{ штук});$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Загальна кількість деталей №2,}\\ \text{викроєних по всім варіантам}\end{array}\right) \geq (180\text{ штук});$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Загальна кількість деталей№ 6,}\\ \text{викроєних по всім варіантам}\end{array}\right) \geq (180\text{ штук}).$$

Математично ці обмеження записуються у вигляді

$$60x_1 + 80x_2 \geq 90;$$

$$35x_2 \geq 180;$$

$$90x_1 + 20x_2 \geq 180;$$

$$40x_1 + 78x_2 \geq 180;$$

$$70x_1 + 15x_2 \geq 180;$$

$$90x_1 \qquad\quad \geq 180;$$

$$\left[\frac{шт.}{відріз.} \cdot \frac{відріз.}{міс.}\right] \geq \left[\frac{шт.}{міс.}\right].$$

Обмеження по **витраті тканини** має такі форми запису:

змістовну

$$\begin{pmatrix} \text{Загальна кількість ттканин} \\ \text{розкроєноїза місяць} \end{pmatrix} \leq \left(405\,\text{м}^2\right)$$

і ***математичну***

$$x_1 + x_2 \leq \frac{405}{10},$$

$$\left[\frac{\text{отрез.}}{\text{мес.}}\right] \leq \left[\frac{\text{м}^2 \cdot \text{отрез.}}{\text{мес.} \cdot \text{м}^2}\right].$$

Невід'ємність кількості розкроєних відрізів задається у вигляді

$$x_1 \geq 0,$$
$$x_2 \geq 0.$$

Таким чином, ***математична модель*** задачі №1.6 має вид

$$L(X) = 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \to \min \ [\text{м}^2 \text{ відх./міс.}],$$

$$\begin{cases} 60x_1 + 80x_2 \geq 90 \quad [\text{шт./міс.}], \\ \qquad\quad 35\text{x}_2 \geq 180 \; [\text{шт./міс.}], \\ 90x_1 + 20x_2 \geq 180 \quad [\text{шт./міс.}], \\ 40x_1 + 78x_2 \geq 180 \quad [\text{шт./міс.}], \\ 70x_1 + 15x_2 \geq 180 \quad [\text{шт./міс.}], \\ 90x_1 \qquad\quad \geq 180 \quad [\text{шт./міс.}], \\ x_1 + x_2 \leq 40{,}5 \qquad [\textit{відріз./міс.}], \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \qquad [\textit{відріз./міс.}]. \end{cases}$$

Завдання для самоперевірки та контролю засвоєння знань

Задача №1

Фірма випускає три види виробів. У процесі виробництва використовуються три технологічні операції. На рис.1. показана технологічна схема виробництва виробів

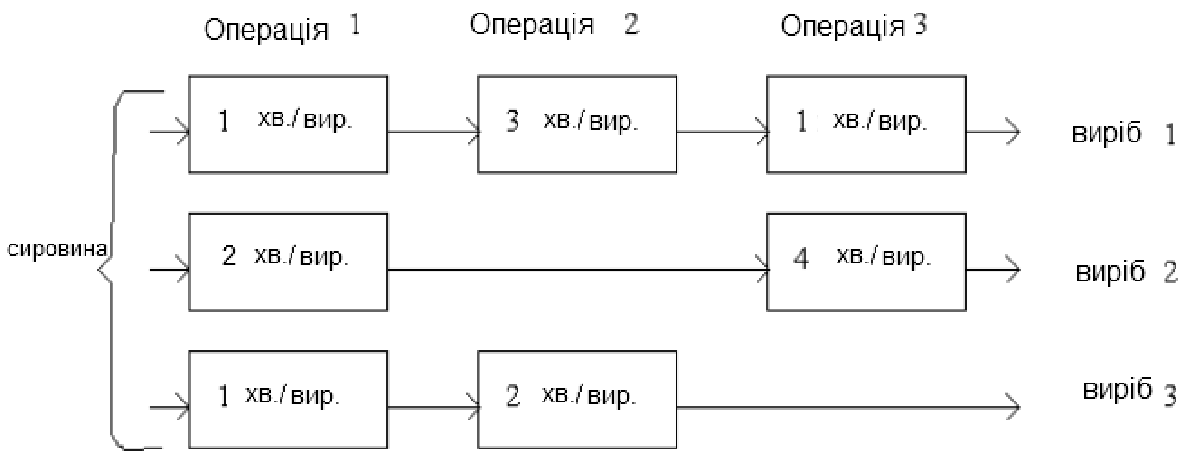


Рис.1. Технологічна схема виробництва

Фонд робочого часу обмежений наступними граничними значеннями: для першої операції - 430 хв; для другої операції - 460 хв; для третьої операції - 420 хв. Вивчення ринку збуту показало, що очікуваний прибуток від продажу одного виробу видів 1, 2 і 3 становить 3, 2 і 5 грн відповідно.

Побудуйте математичну модель, що дозволяє знайти найбільш вигідний добовий обсяг виробництва кожного виду продукції?

Задача №2

При виготовленні виробів B_1 і B_2 використовуються сталь і кольорові метали, а також токарні та фрезерні верстати. За технологічними нормами на виробництво одиниці виробу B_1 потрібно 300 і 200 верстато-годин відповідно токарного і фрезерного обладнання, а також 10 і 20 кг відповідно сталі і кольорових металів. Для виробництва одиниці виробу B_2 потрібно 400, 100, 70 і 50 відповідних одиниць тих же ресурсів.

Цех має у своєму розпорядженні 12400 і 6800 верстато-годин відповідно токарного і фрезерного обладнання і 640 і 840 кг відповідно сталі і кольорових металів. Прибуток від реалізації одиниці виробу B_1 становить 6 грн і від одиниці виробу B_2 - 16 грн.

Побудуйте математичну модель задачі, використовуючи в якості показника ефективності прибуток і враховуючи, що час роботи фрезерних верстатів повинен бути використаний повністю.

Задача №3

Для збереження нормальної життєдіяльності людина повинна на добу споживати білків не менше 120 умовних одиниць (ум. од.), Жирів - не менше 70 і вітамінів - не менше 10 ум. од. Зміст їх в кожній одиниці продуктів $П_1$ і $П_2$ дорівнює відповідно (0,2; 0,075; 0) і (0,1; 0,1; 0,1) ум. од. Вартість 1 од. продукту $П_1$ - 2 грн., $П_2$ -3 грн.

Побудуйте математичну модель задачі, що дозволяє так організувати харчування, щоб його вартість була мінімальною, а організм отримав необхідну кількість поживних речовин.

Задача №4

У районі лісового масиву є лісопильний завод і фанерна фабрика. Щоб отримати 2,5 $м^3$ комерційно реалізованих комплектів пиломатеріалів, необхідно витратити 2,5 $м^3$ ялинових і 7,5 $м^3$ ялицевих лісоматеріалів. Для приготування листів фанери по 100 $м^2$ потрібно 5 $м^3$ ялинових і 10 $м^3$ ялицевих лісоматеріалів. Лісовий масив містить 80 $м^3$ ялинових і 180 $м^3$ ялицевих лісоматеріалів.

Згідно з умовами поставок, протягом планованого періоду необхідно виробити принаймні 10 $м^3$ пиломатеріалів і 1200 $м^2$ фанери. Дохід з 1 $м^3$ пиломатеріалів складає 160 грн, А з 100 $м^2$ фанери - 600 грн.

Побудуйте математичну модель для знаходження плану виробництва, максимізуючого дохід.

Примітка. При побудові моделі слід врахувати той факт, що пиломатеріали можуть бути реалізовані тільки у вигляді неподільного комплекту розміром 2,5 $м^3$, а фанера - у вигляді неподільних листів по 100 $м^2$.

Задача № 5

З вокзалу можна відправляти щодня кур'єрські та швидкі поїзди. Місткість вагонів і готівковий парк вагонів на станції вказані в таблиці

Вихідні дані задачі №5

Характеристики парку вагонів	Тип вагону				
	Багажний	Поштовий	Плацкартний	Купейний	М'який
Число вагонів в поїзді, шт.:					
кур'єрському	1	–	5	6	3
швидкому	1	1	8	4	1
Місткість вагонів, чол.	–	–	58	40	32
Готівковий парк вагонів, шт.	12	8	81	70	27

Побудуйте математичну модель задачі, на підставі якої можна знайти таке співвідношення між числом кур'єрських і швидких поїздів, щоб число пасажирів, що відправляються щодня досягло максимуму.

*Задача №6**

Управління міським автобусним парком вирішило провести дослідження можливості більш раціональної організації своєї роботи з метою зниження інтенсивності внутрішньоміського руху. Збір та обробка необхідної інформації дозволили зробити висновок , що необхідна мінімальна кількість автобусів істотно змінюється протягом доби (рис.1) . Тривалість безперервного використання автобусів на лінії дорівнює 8 год на добу (з урахуванням необхідних витрат часу на поточний ремонт і обслуговування). Графік змін, що перекриваються представлений на рис.2

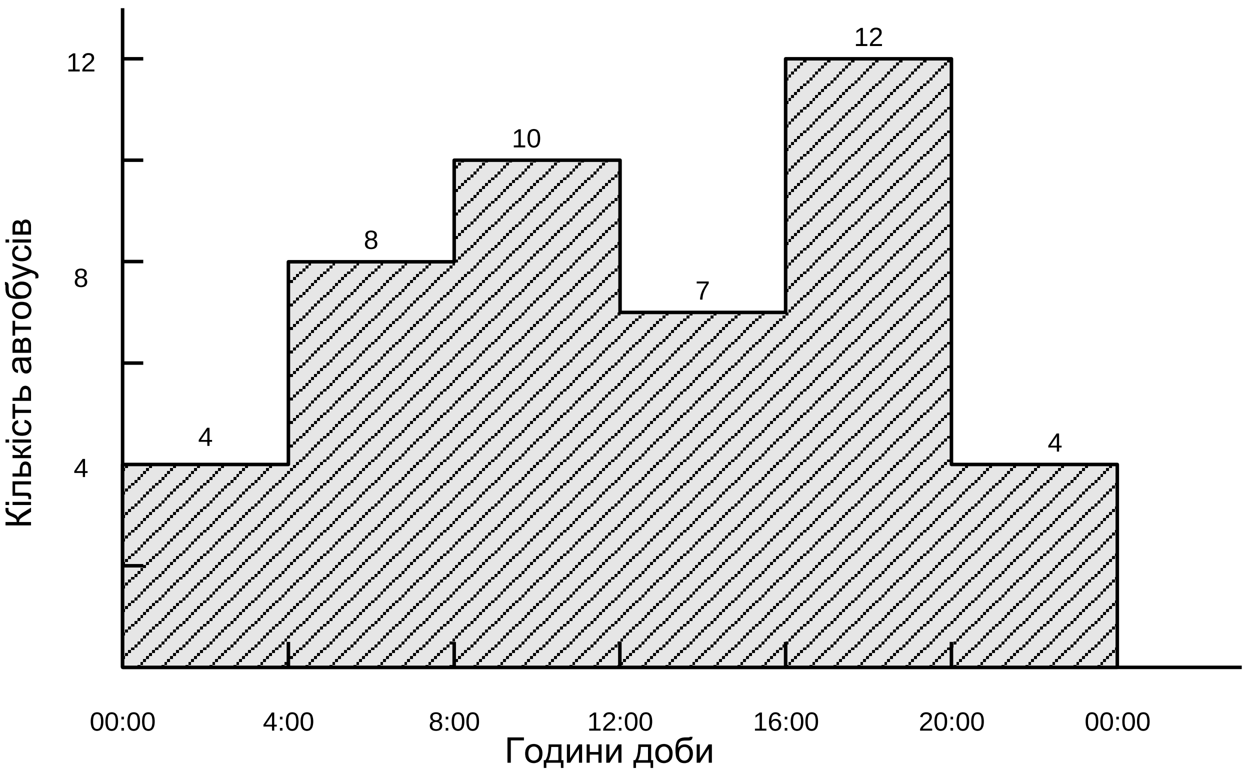


Рис.1. Мінімально необхідна кількість автобусів на лінії

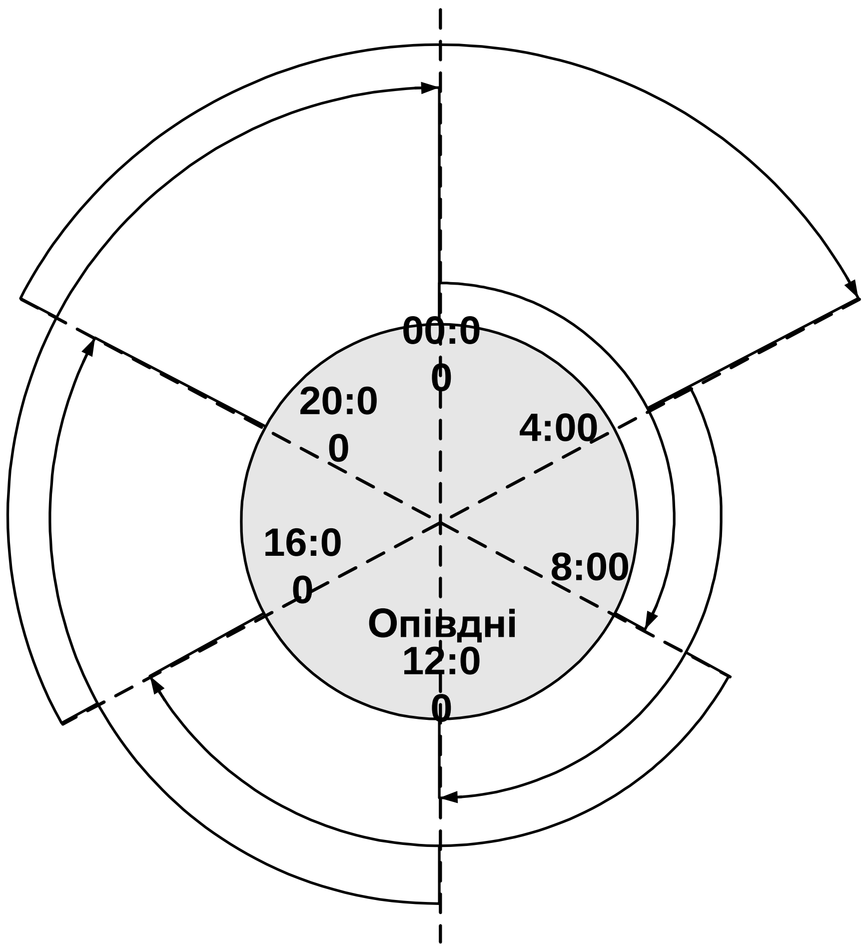


Рис.2. Графік змін, що перекриваються

Побудуйте математичну модель, що дозволяє дізнатися, яку кількість автобусів необхідно випускати на лінію в кожній із змін за умови, що загальна кількість автобусів, що виходять на лінію протягом доби, повинна бути мінімальною.

*Задача №7**

Служба постачання заводу отримала від постачальників 500 сталевих прутків довжиною 5 м. Їх необхідно розрізати на деталі А і В довжиною відповідно 2 і 1,5 м, з яких потім складаються комплекти. У кожен комплект входять 3 деталі А і 2 деталі В. Характеристики можливих варіантів розкрою прутків представлені в таблиці.

Характеристики можливих варіантів розкрою прутків

Варіант розкрою	Кількість деталей, шт./прутків		Відходи, м/пруток
	А	В	
1	2	0	1
2	1	2	0
3	0	3	0,5
Комплектність, шт./компл.	3	2	

Побудуйте математичну модель задачі, що дозволяє знайти план розкрою прутків, що максимізує кількість комплектів.

Примітка У ЦФ можуть входити не всі змінні задачі.

*Задача №8**

Мале підприємство випускає деталі А і В. Для цього воно використовує лиття, яке підлягає токарній обробці, свердлінню і шліфуванню. Продуктивність верстатного парку підприємства з обробки деталей А і В наведена в таблиці.

Припускаючи, що попит на будь-яку комбінацію деталей А і В забезпечений, побудуйте математичну модель для знаходження плану їх випуску, що максимізує прибуток.

Вихідні дані задачі №8

Станки	Продуктивність, шт./год		Вартість верстатного часу, грн./год
	А	В	
Токарні	25	40	20
Свердлильні	28	35	14
Шліфувальні	35	25	17,5
Ціна деталі, грн.:			
покупна	2	3	
продажна	5	6	

Задача №9*

Щодня в ресторані фірмовий коктейль (порція становить 0,33 л) замовляють в середньому 600 чоловік. Передбачається, що найближчим часом їх кількість збільшиться в середньому на 50 осіб. Згідно рецепту в складі коктейлю повинно бути:

- не менше 20%, але і не більше 35% спирту;
- не менше 2% цукру;
- не більше 5% домішків;
- не більше 76% води;
- не менше 7% і не більше 12% соку.

У таблиці наведені процентний склад напоїв, з яких змішується коктейль, і їх кількість, яку ресторан може щодня виділяти на приготування коктейлю.

Відсотковий склад і запаси напоїв

Напій	Спирт	Вода	Цукор	Домішки	Кількість, л/добу
Горілка	40%	57%	1%	2%	50
Вино	18%	67%	9%	6%	184
Сік	0%	88%	8%	4%	46

Побудуйте модель, на підставі якої можна буде визначити, чи вистачить ресторану наявних щоденних запасів напоїв для задоволення підвищеного попиту на коктейль.

Задача №10*

Продукція паперової фірми випускається у вигляді паперових рулонів стандартної ширини - по 20 од. ширини. За спеціальними замовленнями споживачів фірма постачає рулони і інших розмірів, для чого проводиться розрізування стандартних рулонів. Типові замовлення на рулони нестандартних розмірів наведені в таблиці.

Варіанти замовлень на рулони нестандартних розмірів

Замовлення	Ширина рулону, що вимагається, од.шир.	Кількість рулонів, що вимагається, шт.
1	5	150
2	7	200
3	9	300

Всі допустимі варіанти розрізання рулонів наведені нижче. Рисунок ілюструє 1-й варіант розкрою рулонів.

Допустимі варіанти розкрою рулонів

Ширина, що вимагається, од.шир.	Варіант розкрою рулонів						Мінімальна кі-ть рулонів, шт.
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	
5	0	2	2	4	1	0	150
7	1	1	0	0	2	0	200
9	1	0	1	0	0	2	300
Втрати, од.шир.	4	3	1	0	1	2	

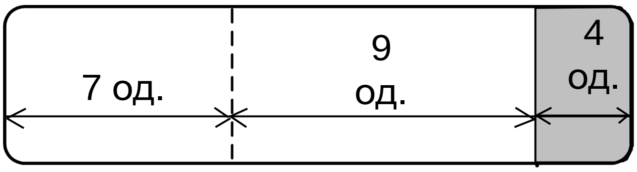


Рис. 1-й варіант розкрою рулонів

Побудуйте математичну модель, що дозволяє знайти такий план розрізання рулонів, при якому замовлення, що надійшли на нестандартні рулони задовольняються з мінімальними втратами (тобто непридатними для реалізації залишками рулонів).

Примітка. У цій задач для зручності запису моделі можна ввести змінні, які не є *шуканими* величинами.

2.2. Графічний метод розв'язку одноіндексних задач

Графічний метод досить простий і наочний для розв’язку задач ЛП з двома змінними. Він заснований на *геометричному* поданні допустимих розв’язків і ЦФ задачі.

Кожне з нерівностей задачі ЛП (2.1) визначає на координатній площині (x_1, x_2) деяку напівплощину (рис.2.1), а система нерівностей в цілому - перетин відповідних площин. Множина точок перетину даних напівплощин називається **областю допустимих розв’язків** (ОДР). ОДР завжди являє собою **опуклу** фігуру, тобто таку, що володіє наступною властивістю: якщо дві точки A і B належать цій фігурі, то і весь відрізок AB належить їй. ОДР графічно може бути представлена опуклим багатокутником, необмеженою опуклою багатокутною областю, відрізком, променем, однією точкою. У разі несумісності системи обмежень задачі (2.1) ОДР є порожнім множиною.

Примітка №2.1. Все вищесказане стосується й до випадку, коли система обмежень (2.1) включає рівності, оскільки будь-яку рівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

можна представити у вигляді системи двох нерівностей (див. рис.2.1)

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i. \end{cases}$$

ЦФ $L(X) = c_1x_1 + c_2x_2$ при фіксованому значенні $L(X) = L$ визначає на площині пряму лінію $c_1x_1 + c_2x_2 = L$. Змінюючи значення L, ми отримаємо сімейство паралельних прямих, званих **лініями рівня**.

Це пов'язано з тим, що зміна значення L спричинить зміну лише довжини відрізка, що відсікається лінією рівня на осі x_2 (початкова ордината), а кутовий коефіцієнт прямої $tg\alpha = \frac{-c_1}{c_2}$ залишиться постійним.

Тому для розв'язку буде достатньо побудувати одну з ліній рівня, довільно вибравши значення L.

Вектор $\vec{C}=(c_1;c_2)$ з координатами з коефіцієнтів ЦФ при x_1 і x_2 перпендикулярний до кожної з ліній рівня (див. рис.2.1). ***Напрямок вектора*** $\vec{C}$ ***збігається*** з напрямком ***зростання*** ЦФ, що є важливим моментом для розв'язку задач. Напрямок ***спадання*** ЦФ ***протилежний напрямку вектора*** $\vec{C}$.

Суть графічного методу полягає в наступному. У напрямку (проти напрямку) вектора $\vec{C}$ в ОДР проводиться пошук оптимальної точки $X^*=(x_1^*;x_2^*)$. Оптимальною вважається точка, через яку проходить лінія рівня L_{max} (L_{min}), що відповідає найбільшому (найменшому) значенню функції $L(X)$. Оптимальний розв'язок завжди знаходиться на границі ОДР, наприклад, в останній вершині багатокутника ОДР, через яку пройде цільова пряма, або на всій його стороні.

При пошуку оптимального розв'язку задач ЛП можливі такі ситуації: існує єдиний розв'язок задачі; існує нескінченна множина розв'язків (**альтернативний оптимум**); ЦФ не обмежена; область допустимих розв'язків - єдина точка; задача не має розв'язків.

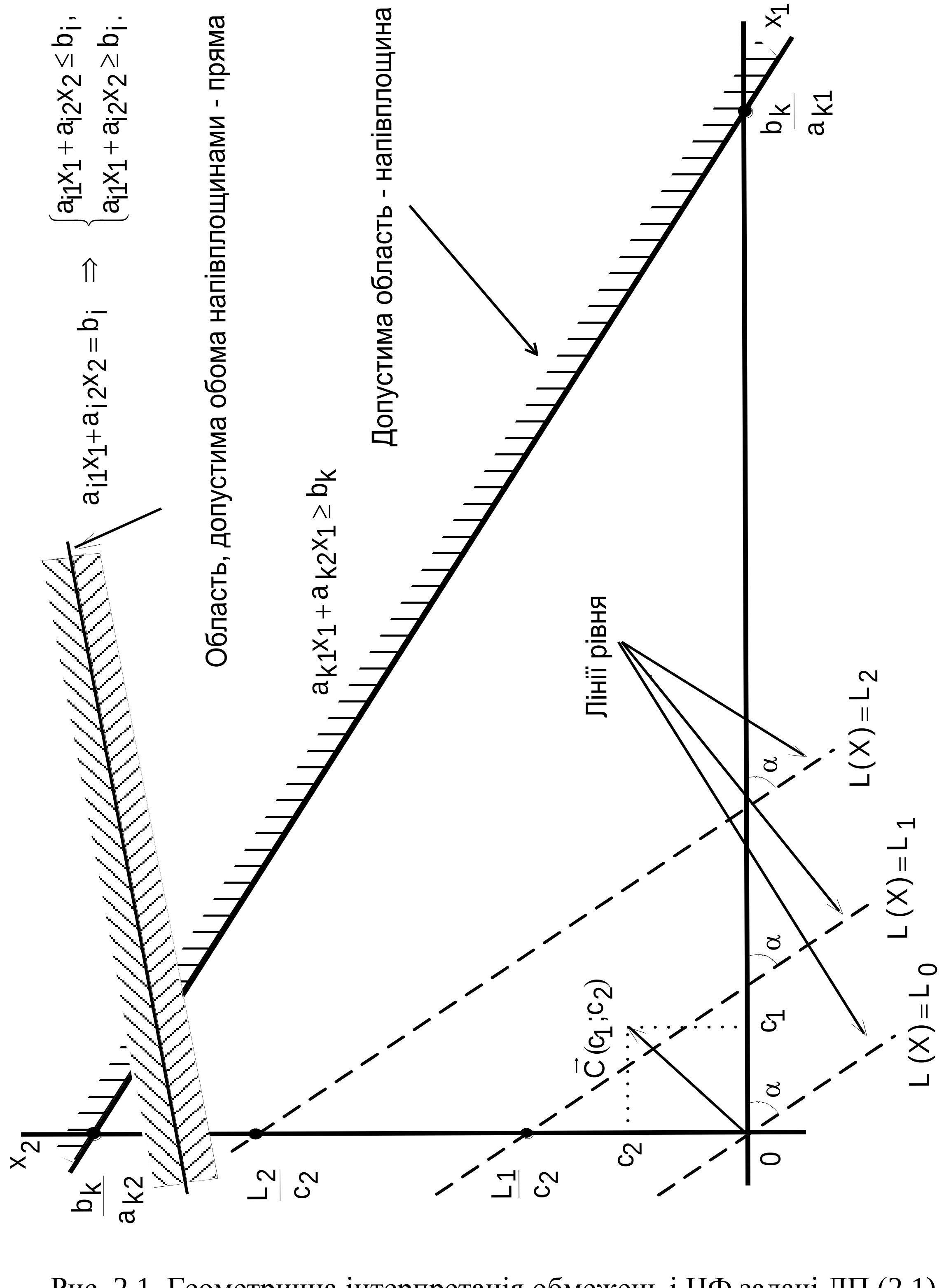


Рис. 2.1. Геометрична інтерпретація обмежень і ЦФ задачі ЛП (2.1)

<u>*Методика розв’язку задач ЛП графічним методом*</u>

I. В обмеженнях задачі (2.1) замініть знаки нерівностей на знаки точних рівностей і побудуйте відповідні прямі.

II. Знайдіть і заштрихуйте напівплощини, дозволені кожним з обмежень-нерівностей задачі (2.1). Для цього підставте в конкретну нерівність координати якої-небудь точки [наприклад, (0,0)], і перевірте істинність отриманої нерівності.

Якщо нерівність істинна,

то треба заштрихувати напівплощину, що містить дану точку;

інакше (нерівність хибна) треба заштрихувати напівплощину, що не містить дану точку.

Оскільки x_1 і x_2 повинні бути невід'ємними, то їх допустимі значення завжди будуть знаходитися вище осі x_1 і правіше осі x_2, тобто в I-му квадранті.

Обмеження-рівності дозволяють тільки ті точки, які лежать на відповідній прямій, тому виділіть на графіку такі прямі.

III. Визначте ОДР як частину площини, що належить одночасно всім дозволеним областям, і виділіть її. За відсутності ОДР задача ***не має розв’язків***, про що зробіть відповідний висновок.

IV. Якщо ОДР - не порожня множина, то побудуйте цільову пряму, тобто будь-яку з ліній рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = L$, де L - довільне число, наприклад, кратне c_1 і c_2, тобто зручне для проведення розрахунків. Спосіб побудови аналогічний побудові прямих обмежень.

V. Побудуйте вектор $\vec{C} = (c_1, c_2)$, який починається в точці (0, 0), закінчується в точці (c_1, c_2). Якщо цільова пряма і вектор $\vec{C}$ побудовані правильно, то вони будуть ***перпендикулярні***.

VI. При пошуку max ЦФ пересувайте цільову пряму ***в напрямку*** вектора $\vec{C}$, при пошуку min ЦФ - ***проти напрямку*** вектора $\vec{C}$. ***Остання*** по ходу руху вершина ОДР буде точкою max або min ЦФ. Якщо такої точки (точок) не існує, то зробіть висновок про ***необмеженість ЦФ на множині планів*** зверху (при пошуку max) або знизу (при пошуку min).

VII. Визначте координати точки max (min) ЦФ $X^* = \left(x_1^*; x_2^*\right)$ і обчисліть значення ЦФ $L\left(X^*\right)$. Для обчислення координат оптимальної точки X^* розв'яжіть систему рівнянь прямих, на перетині яких знаходиться X^*.

Задача 2.4.

Знайдемо оптимальний розв'язок задачі 2.1. про фарби, математична модель якої має вигляд

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1, & (3) \\ x_2 \le 2, & (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. & \end{cases}$$

Побудуємо прямі обмежень, для чого обчислимо координати точок перетину цих прямих з осями координат (рис.2.2).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 = 1, & (3) \\ x_2 = 2. & (4) \end{cases}$$

(1) – $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = 0, \end{cases}$ (2) – $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 8, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 0, \end{cases}$ (3) – $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 0. \end{cases}$

Пряма (4) проходить через точку $x_2 = 2$ паралельно осі x_1.

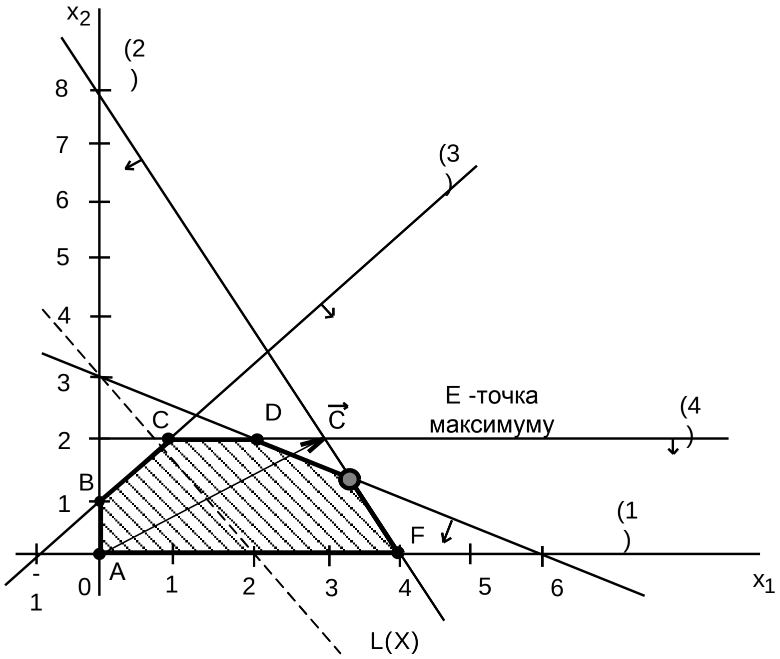


Рис.2.2. Графічний розв’язок задачі 1.1.

Визначимо ОДР. Наприклад, підставимо точку (0;0) в вихідне обмеження (3), отримаємо $0 \le 1$, що є істинною нерівністю, тому стрілкою (або штрихуванням) позначимо напівплощину, ***що містить*** точку (0;0), тобто розташовану правіше і нижче прямої (3). Аналогічно визначимо допустимі напівплощини для решти обмежень і вкажемо їх стрілками у відповідних прямих обмежень (див. рис.2.2). Загальною областю, дозволеною усіма обмеженнями, тобто ОДР є багатокутник ABCDEF.

Цільову пряму можна побудувати за рівнянням

$$3x_1 + 2x_2 = 6,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Будуємо вектор $\vec{C}$ з точки (0,0) в точку (3,2). Точка E - це остання вершина багатокутника допустимих розв'язків ABCDEF, через яку проходить цільова пряма, рухаючись ***у напрямку*** вектора $\vec{C}$. Тому E - це точка максимуму ЦФ. Визначимо координати точки E з системи рівнянь прямих обмежень (1) і (2)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (2) \end{cases} \quad x_1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3},$$

$$E\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right) \text{ [т/добу].}$$

Максимальне значення ЦФ рівне $L(E) = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 12\frac{2}{3}$ [тис. грн./добу]. Таким чином, найкращим режимом роботи фірми є щодобове виробництво фарби 1-го виду в обсязі $3\frac{1}{3}$ тис. грн. на добу т і фарби 2-го виду в обсязі $1\frac{1}{3}$ т. Дохід від продажу фарб складе $12\frac{2}{3}$ тис. грн. на добу.

Завдання для самоперевірки та контролю засвоєння знань

Варіанти задач ЛП для розв'язку графічним методом

Задача №1

$$L(X) = 4x_1 - 3x_2 \to \max (\min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ -7x_1 + 10x_2 \le 80, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача №2

$$L(X) = 2x_1 + 5x_2 \to \max (\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 4x_1 + x_2 \ge 8, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача №3

$$L(X) = x_1 + 2x_2 \to \max (\min)$$

Задача №4

$$L(X) = -2x_1 + 5x_2 \to \max (\min)$$

$$\begin{cases} -x_1+3x_2\ge 10,\\ x_1+x_2\le 6,\\ x_1+4x_2\ge 3,\\ -x_1+4x_2\le 2,\\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2\le 12,\\ x_1+2x_2=8,\\ x_1+x_2\ge 5,\\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$$

Задача №5

$$L(X)=x_1+6x_2\to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 10,\\ 3x_1-3x_2\ge 6,\\ 2x_1+3x_2\le 6,\\ 3x_1+x_2\ge 4,\\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$$

Задача №6

$$L(X)=-3x_1-2x_2\to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1-x_2\ge 3,\\ 2x_1+2x_2\ge 2,\\ x_1+x_2\ge 6,\\ -2x_1+6x_2\le 20,\\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$$

Задача №7

$$L(X)=x_1+6x_2\to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} -2x_1+12x_2\ge 8,\\ 4x_1+2x_2\le 10,\\ 3x_1-4x_2\ge 2,\\ 4x_1+5x_2\ge 8,\\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$$

Задача №8

$$L(X)=4x_1+2x_2\to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\ge 7,\\ 2x_1+x_2\ge 8,\\ -x_1+2x_2\le 6,\\ -2x_1+8x_2\ge 4,\\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$$

Задача №9

$$L(X)=3x_1+4x_2\to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2\ge 8,\\ 4x_1+4x_2\ge 18,\\ -x_1+x_2\le 1,\\ \qquad\quad x_2=2,\\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$$

2.3. Аналіз чуттєвості оптимального розв'язку одноіндексных задач лп

2.3.1. Теоретичний вступ

Неминуче коливання значень таких економічних параметрів, як ціни на продукцію та сировину, запаси сировини, попит на ринку і т.д. може призвести до неоптимальності або непридатності колишнього режиму роботи. Для обліку подібних ситуацій проводиться **аналіз чутливості**, тобто аналіз того, як можливі зміни параметрів вихідної моделі вплинуть на отриманий раніше оптимальний розв’язок задачі ЛП.

Для розв’язку задач аналізу чутливості обмеження лінійної моделі класифікуються наступним чином. **Зв’язуючим** обмеження проходять через оптимальну точку. **Незв’язуючі** обмеження не проходять через оптимальну точку. Аналогічно ресурс, що представляється зв'язуючим обмеженням, називають **дефіцитним**, а ресурс, що представляється незв'язуючим обмеженням - **недефіцитним**. Обмеження називають **надлишковим** в тому випадку , якщо його виключення не впливає на ОДР і, отже , на оптимальний розв’язок. Виділяють такі три завдання аналізу на чутливість.

1. Аналіз скорочення або збільшення ресурсів:

- на скільки можна збільшити (обмеження типу $\leq$) запас *дефіцитного* ресурсу для поліпшення оптимального значення ЦФ?
- на скільки можна зменшити (обмеження типу $\leq$) запас *недефіцитного* ресурсу при збереженні оптимального значення ЦФ?

2. Збільшення (обмеження типу $\leq$**) запасу якого з ресурсів найбільш вигідно**?

3. Аналіз зміни коефіцієнтів ЦФ: який діапазон зміни коефіцієнтів ЦФ, при якому не змінюється оптимальний розв’язок?

Можливі ситуації графічного розв'язку задач ЛП

Таблиця 2.1

№	Вид ОДР	Вид оптимального розв’язку	Примітки
1.1	Багатокутна замкнута	Єдиний розв’язок	$L(X)\to max$
1.2		Єдиний розв’язок	$L(X)\to min$
1.3		Нескінченна множина розв’язків	
2.1	Багатокутна незамкнута	ЦФ не обмежена знизу	
2.2		ЦФ не обмежена зверху	
2.3		Єдиний розв’язок	$L(X)\to max$
2.4		Нескінченна множина розв’язків	$L(X)\to min$
3.1	Промінь	Єдиний розв’язок	Кількість обмежень більша одного
3.2		ЦФ не обмежена зверху	
3.3		ЦФ не обмежена знизу	
4.1	Відрізок	Єдиний розв’язок	
4.2		Нескінченна множина розв’язків	
5	Єдина точка		Всі обмеження - нерівності
6		Розв’язків немає	**Всі обмеження - нерівності**
7		Розв’язків немає	**Всі обмеження - нерівності**
8		Розв’язків немає	Обмеження у вигляді рівностей і нерівностей

2.3.2. Методика графічного аналізу чутливості оптимального розв’язку

Перша задача аналізу на чутливість

(аналіз на чутливість до правої частини обмежень)

Проаналізуємо чутливість оптимального розв’язку задачі №1.01 про виробництво фарб. ОДР задачі №1.01 (рис.3.1) - багатокутник ABCDEF. У оптимальній точці E перетинаються прямі (1) і (2). Тому обмеження (1) і (2) є ***зв'язуючими***, а відповідні їм ресурси (інгредієнти A і B) - ***дефіцитними***.

Розглянемо економічний зміст цих понять. Точка максимуму ЦФ E відповідає добовому виробництву $3\frac{1}{3}$ т фарби 1-го виду та $1\frac{1}{3}$ т фарби 2-го виду. У виробництві фарб використовуються інгредієнти A і B. Добовий запас на складі інгредієнтів A і B - це праві частини зв'язуючих обмежень (1) і (2) (6 і 8 т інгр./добу). Згідно цим обмеженням, на виробництво в точці E витрачається

$$1\cdot 3\frac{1}{3}+2\cdot 1\frac{1}{3}=6\left[\text{т інгр.А/добу}\right]\ (1) \quad \text{і} \quad 2\cdot 3\frac{1}{3}+1\cdot 1\frac{1}{3}=8\left[\text{т інгр.В/добу}\right]\ (2).$$

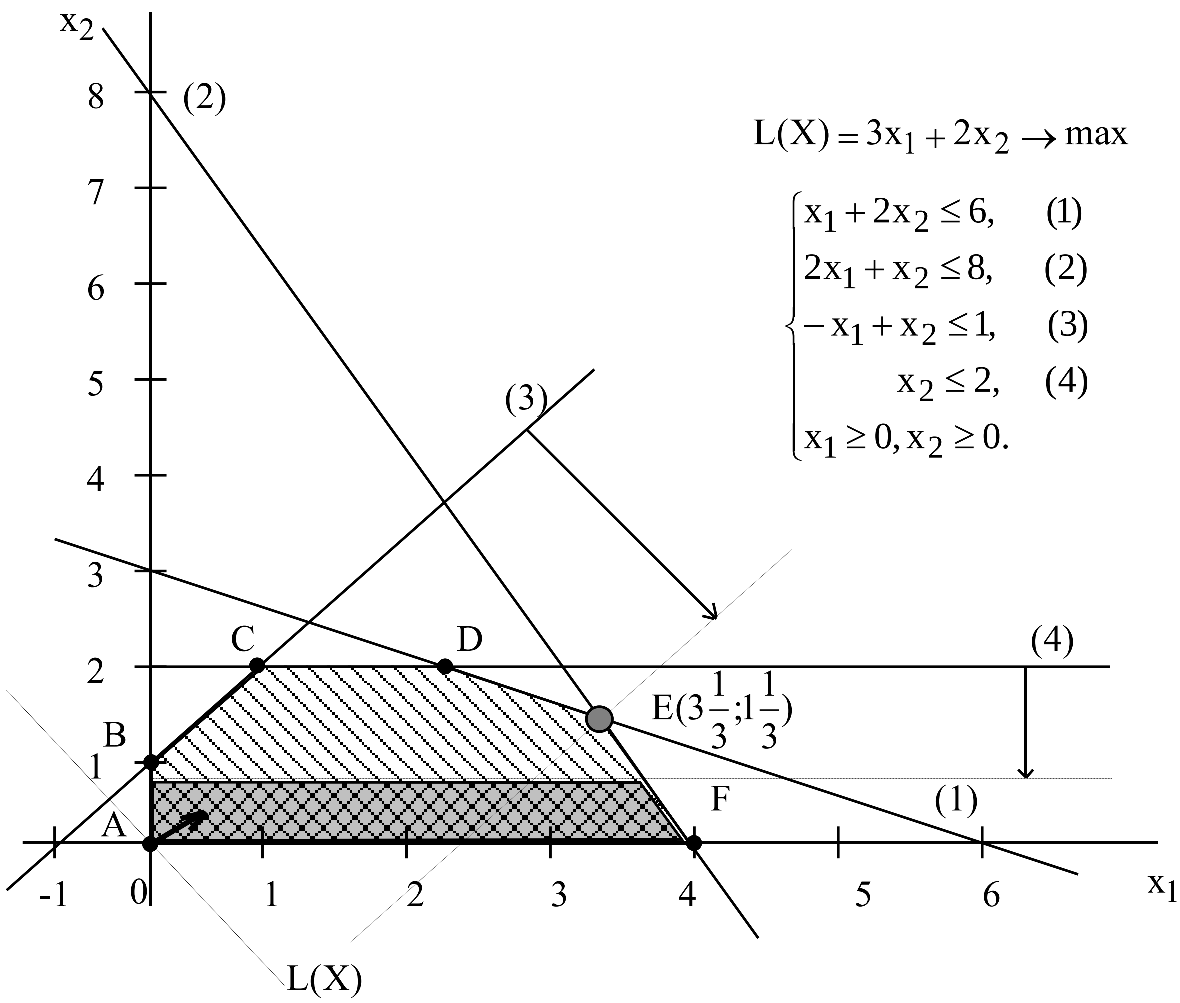


Рис.3.1. Графічний розв’язок задачі №1.01 про фарби

Таким чином , поняття "*зв'язуючі обмеження*" (1) і (2) означає, що при виробництві фарб в точці $E\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$ запаси інгредієнтів А і В витрачаються ***повністю*** і з цієї причини неможливе подальше нарощування виробництва. У цьому полягає економічний сенс поняття *дефіцитності* ресурсів, тобто якщо фірма зможе збільшити добові запаси інгредієнтів, то це дозволить збільшити випуск фарб. У зв'язку з цим виникає питання: до якого рівня доцільно збільшити запаси інгредієнтів і на скільки при цьому збільшиться *оптимальне* виробництво фарб?

Правило № 1

Щоб графічно визначити максимальне збільшення запасу дефіцитного ресурсу, що викликає *поліпшення* оптимального розв'язку,

необхідно пересувати відповідну пряму в напрямку *поліпшення* ЦФ до тих пір, поки це обмеження не стане *надмірним.*

При проходженні прямої (1) через точку К (рис.3.2) багатокутник ABCKF стає ОДР, а обмеження (1) - надлишковим. Дійсно, якщо видалити пряму (1), що проходить через точку К, то ОДР ABCKF не зміниться. Точка К стає *оптимальною*, в цій точці обмеження (2) і (4) стають *зв'язуючими*.

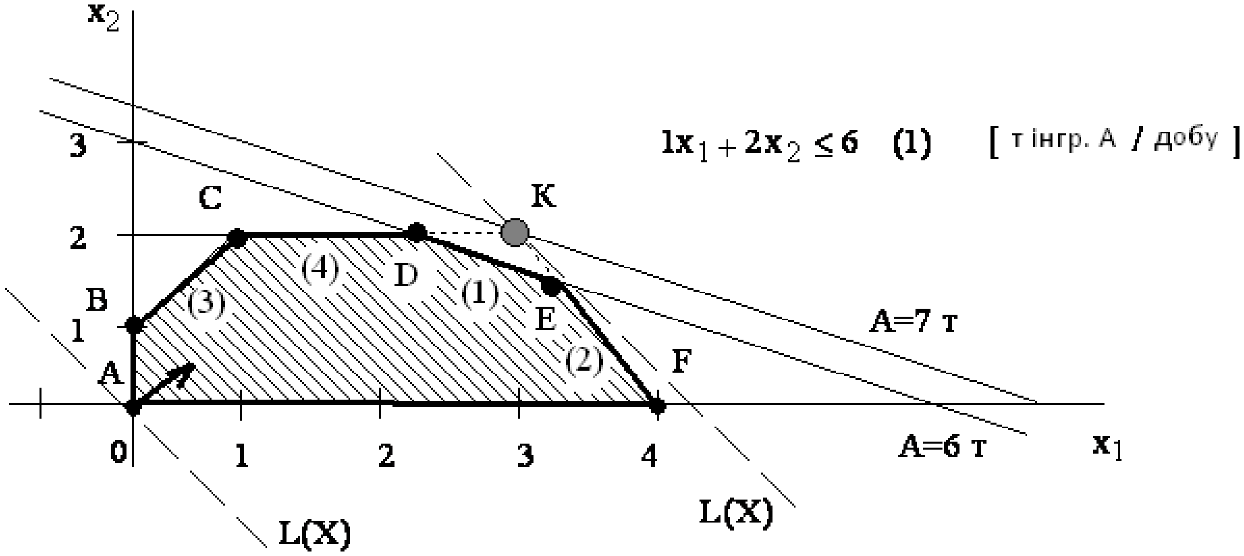


Рис.3.2. Аналіз збільшення ресурсу А

Правило № 2

Щоб *чисельно* визначити максимальну величину запасу дефіцитного ресурсу, що викликає поліпшення оптимального розв'язку,

необхідно: 1) визначити координати точки $(x_1; x_2)$, в якій відповідне обмеження стає *надмірним*;

2) підставити координати $(x_1;x_2)$ в *ліву частину* відповідного обмеження.

Координати точки К (3,2) знаходяться шляхом розв'язку системи рівнянь прямих (2) і (4). Тобто в цій точці фірма буде виробляти 3 т фарби 1-го виду та 2 т фарби 2-го виду. Підставимо $x_1 = 3$ і $x_2 = 2$ в ліву частину обмеження (1) і отримаємо максимально допустимий запас інгредієнта А

$$x_1 + 2x_2 = 3 + 2 \cdot 2 = 7 \text{ [т інгр.А/добу]}.$$

Подальше збільшення запасу інгредієнта А недоцільно, тому що це *не змінить* ОДР і *не призведе* до іншого оптимального розв'язку (див. рис.3.2). Дохід від продажу фарб в обсязі, відповідному точці К, можна розрахувати, підставивши її координати (3,2) у вираз ЦФ

$$3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13 \text{ [тис.грн./добу]}.$$

Розглянемо питання про доцільність збільшення запасу інгредієнта В. Згідно з правилом № 3.1, відповідне обмеження (2) стає надлишковим в точці J, в якій перетинаються пряма (1) і вісь змінної x_1 (рис.3.3). Багатокутник ABCDJ стає ОДР, а точка J(6;0) - оптимальним розв'язком.

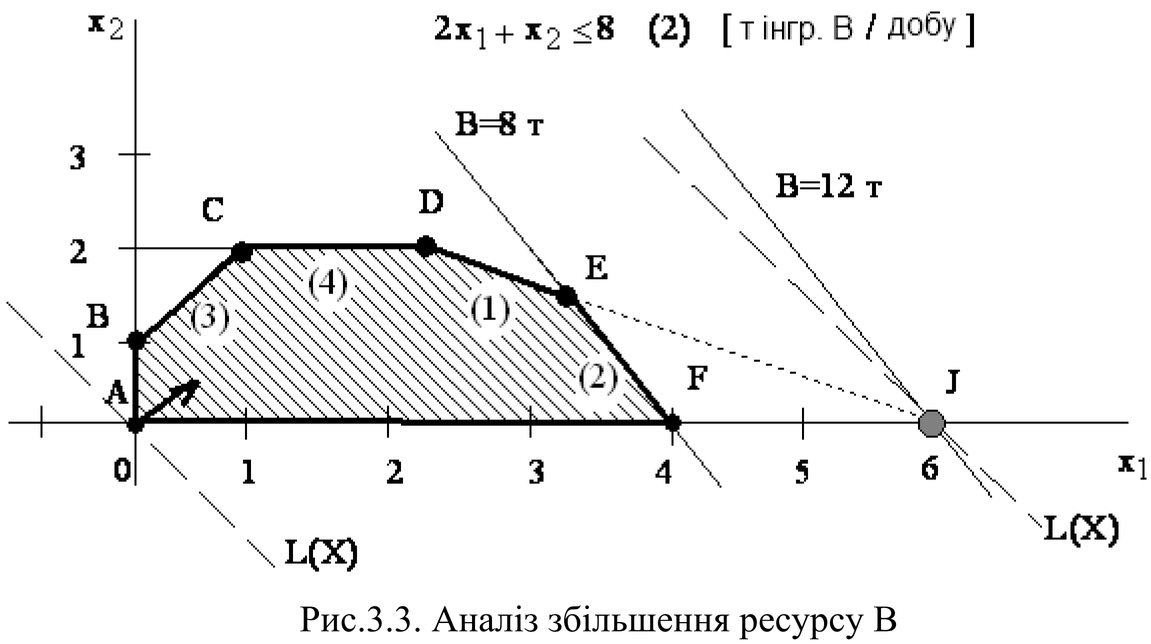


Рис.3.3. Аналіз збільшення ресурсу В

`У точці J вигідно виробляти тільки фарбу 1-го виду (6 т на добу). Дохід від продажу при цьому складе

$$3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 18 \text{ [тис.грн./добу].}$$

Щоб забезпечити такий режим роботи, згідно з правилом №3.2, запас інгредієнта В треба збільшити до величини

$$2x_1 + x_2 = 2 \cdot 6 + 0 = 12 \text{[т інгр.В/добу].}$$

Обмеження (3) і (4) є ***не зв'язуючими***, тому що не проходять через оптимальну точку Е (див. рис.3.1). Відповідні їм ресурси (попит на фарби) є ***недефіцитними.*** З економічної точки зору це означає, що в даний момент рівень попиту на фарби *безпосередньо* не визначає обсяги виробництва. Тому деяке його коливання може ніяк не вплинути на оптимальний режим виробництва в точці Е.

Наприклад, збільшення (зменшення) попиту на фарбу 2-го виду відповідатиме переміщенню прямої обмеження $x_2 \le 2$ (4) вгору (вниз). Переміщення прямої (4) вгору ніяк не може змінити точку Е максимуму ЦФ. Переміщення ж прямої (4) вниз не впливає на існуючий оптимальний розв’язок *тільки до перетину* з точкою Е (див. правило № 3.3). З рис.3.1 видно, що подальше переміщення (4) призведе до того, що точка Е буде за межами нової ОДР, виділеної більш темним кольором. Крім того, будь-який оптимальний розв’язок для цієї нової ОДР буде гіршим точки Е.

Правило № 3

Щоб визначити максимальне зменшення запасу недефіцитного ресурсу, *що не змінює* оптимальний розв’язок,

необхідно пересувати відповідну пряму *до перетину з оптимальною* точкою.

Правило №3.4

Щоб *чисельно* визначити мінімальну величину запасу недефіцитного ресурсу, що не змінює оптимальний розв’язок,

необхідно підставити координати *оптимальної* точки в *ліву частину* відповідного обмеження.

Щоб з'ясувати, до яких меж падіння попиту на фарбу 2-го виду не вплине на виробництво в точці $E(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3})$, використовуємо правило №3.4. Підставляємо в ліву частину обмеження (4) координати точки Е, отримуємо

$$x_2 = 1\frac{1}{3}.$$

Робимо ***висновок***: граничний рівень, до якого може впасти попит на фарбу 2-го виду і при якому не зміниться оптимальність отриманого раніше розв’язку, дорівнює $1\frac{1}{3}$ т фарби на добу.

Економічний сенс обмеження (3)

$$-x_1 + x_2 \le 1 \;[\text{т фарби/добу}]$$

в тому, що обсяг продажів фарби 2-го виду може перевищити обсяг продажів фарби 1-го виду максимум на 1 т. Подальше збільшення продажів фарби 2-го виду в порівнянні з фарбою 1-го виду графічно відобразиться переміщенням прямої (3) вліво і вгору, але ніяк не вплине на оптимальність точки Е. Але якщо різниця попитів на фарбу 2-го і 1-го видів зменшуватиметься, то пряма (3) буде переміщатися нижче і правіше. Останнім положенням прямої (3), при якому точка Е залишається оптимальною, є перетин з точкою Е (див. рис.3.1). Згідно з правилом №3.4, підставимо координати точки $E(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3})$ в ліву частину обмеження (3)

$$-x_1 + x_2 = -3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = -2 \text{ [т фарби]}.$$

Отримуємо, що різниця попитів на фарбу 2-го і 1-го виду в точці стала від'ємною. Тобто, проходження прямої (3) через точку Е означає, що фарбу 2-го виду будуть купувати в меншому обсязі, ніж фарбу 1-го виду

$$x_1 - x_2 = 2 \text{ [т фарби/добу]}.$$

Робимо ***висновок***: максимальне перевищення попиту на фарбу 1-го виду над попитом на фарбу 2-го виду, при якому оптимальний розв'язок в точці Е не зміниться, становить 2 т фарби на добу.

Результати розв'язку першої задачі аналізу оптимального розв'язку на чутливість представлені в табл.3.1.

Таблиця 3.1

Результати аналізу ресурсів задачі №1.01

№	Тип ресурсу	Max зміна ресурсу, $\max \Delta R_i$, т/добу	Max зміна доходу, $\max \Delta L(X^*)$, тис.грн./добу	Цінність додаткової одиниці ресурсу $y_i = \frac{\max \Delta L(X^*)}{\max \Delta R_i}$, тис.грн./т
(1)	Дефіцитний	7-6=+1	$13\text{-}12\frac{2}{3}=+\frac{1}{3}$	$y_1 = \left[\frac{1}{3}\Big/1\right] = \frac{1}{3}$
(2)	Дефіцитний	12-8=+4	$18\text{-}12\frac{2}{3}=+5\frac{1}{3}$	$y_2 = \left[5\frac{1}{3}\Big/4\right] = 1\frac{1}{3}$
(3)	Недефіцитний	-2-1= -3	$12\frac{2}{3}\text{-}12\frac{2}{3}=0$	$y_3 = [0/(-3)] = 0$
(4)	Недефіцитний	$1\frac{1}{3}\text{-}2=-\frac{2}{3}$	$12\frac{2}{3}\text{-}12\frac{2}{3}=0$	$y_4 = \left[0\Big/\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = 0$

Друга задача аналізу на чутливість

Аналіз табл.3.1 показує, що до поліпшення оптимального розв'язку, тобто до збільшення добового доходу призводить збільшення *дефіцитних* ресурсів. Для визначення вигідності збільшення цих ресурсів використовують поняття **цінності додаткової одиниці і-го ресурсу** y_i

$$y_i = \frac{\max \Delta L\left(X^*\right)}{\max \Delta R_i},$$

де $\max \Delta L\left(X^*\right)$ – максимальне збільшення оптимального значення ЦФ; $\max \Delta R_i$ – максимально допустимий приріст обсягу і-го ресурсу.

Наприклад, з табл.3.1 випливає, що збільшення добового запасу інгредієнта А [обмеження (1)] на 1 т дозволить отримати додатковий дохід, рівний $y_1 = \frac{1}{3}$ тис.грн./добу, в той час як збільшення запасу В [обмеження (2)] на 1 т принесе $y_2 = 1\frac{1}{3}$ тис.грн./добу. Недефіцитні ресурси мають нульові цінності, оскільки зміна цих ресурсів не призводить до збільшення доходу.

Висновок: додаткові вкладення в першу чергу необхідно направляти на збільшення ресурсу В, а лише потім на ресурс А. Змінювати недефіцитні ресурси немає необхідності

Третя задача аналізу на чутливість

Графічний аналіз допустимого діапазону зміни цін

Зміна цін на продукцію, тобто зміна коефіцієнтів ЦФ, представляється на графіку обертанням цільової прямої навколо оптимальної точки. Так, при збільшенні коефіцієнта ЦФ c_1 або зменшенні

c_2 цільова пряма обертається ***за*** годинниковою стрілкою. При зменшенні c_1 або ж збільшенні c_2 цільова пряма обертається ***проти*** годинникової стрілки (рис.3.4).

При таких поворотах точка E залишатиметься оптимальною доти, поки нахил цільової прямої ***не вийде за межі***, що визначаються нахилами прямих обмежень (1) і (2). Так, наприклад, якщо нахил цільової прямої співпаде з нахилом прямої (1), то оптимальним розв'язком будуть точки відрізка DE.

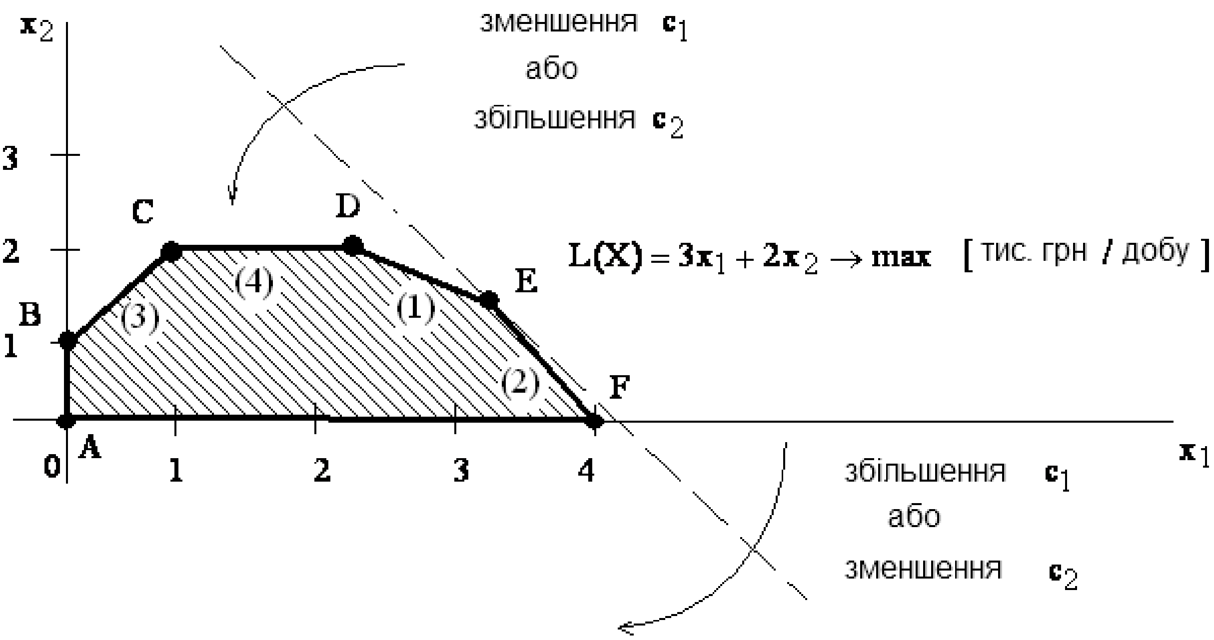


Рис.3.4. Аналіз зміни цін

При збігу з прямою (2) оптимальним розв'язком будуть точки відрізка EF. Якщо цільова пряма вийде за межі нахилу (1) або (2), то оптимальною точкою стане відповідно D або F.

Припустимо, що ціна на фарбу 2-го виду не змінюється, тобто зафіксуємо значення цільового коефіцієнта c_2. Проаналізуємо графічно результати зміни значення цільового коефіцієнта c_1, тобто ціни на фарбу 1-го виду. Оптимальний розв'язок в точці E не буде змінюватися при збільшенні c_1 до тих пір, поки цільова пряма не збіжиться з прямою (2).

Аналогічно, оптимальний розв’язок в точці E не буде змінюватися при зменшенні c_1 до тих пір, поки цільова пряма не збіжиться з прямою (1).

Аналітичний пошук допустимого діапазону зміни цін

Збіг в процесі обертання цільової прямої з прямою обмеження означає, що кути їх нахилу щодо горизонтальної осі зрівнялися, а значить, стали рівні тангенси кутів нахилу цих прямих.

Правило № 5

Щоб визначити границі допустимого діапазону зміни коефіцієнта ЦФ, наприклад $\min c_1$ і $\max c_1$,

необхідно прирівняти тангенс кута нахилу цільової прямої $tg\alpha_{ЦФ}$ по черзі до тангенсів кутів нахилу прямих, що зв'язують обмеження, наприклад $tg\alpha_{(1)}$ і $tg\alpha_{(2)}$ (рис.3.5 і 3.6).

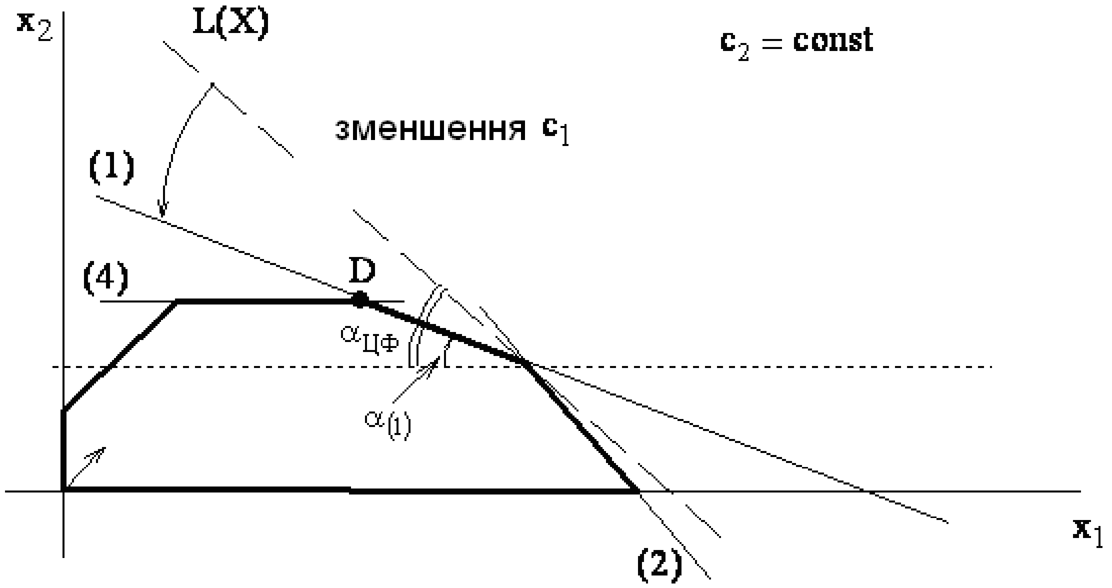


Рис.3.5. Визначення $\min c_1$

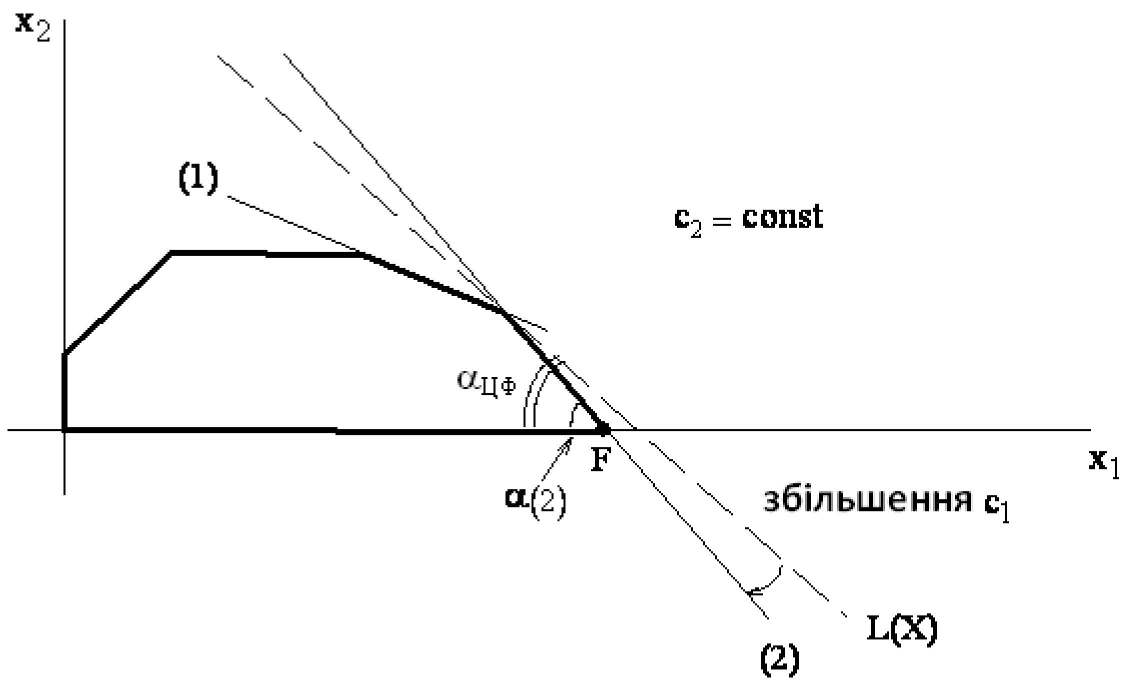


Рис.3.6. Визначення $\max c_1$

Визначимо наскільки максимально може знизитися ціна на фарбу 1-го виду, не змінюючи оптимальну точку Е. Для цього застосуємо правило №3.5 і формулу розрахунку тангенса кута нахилу прямої (рис.3.7).

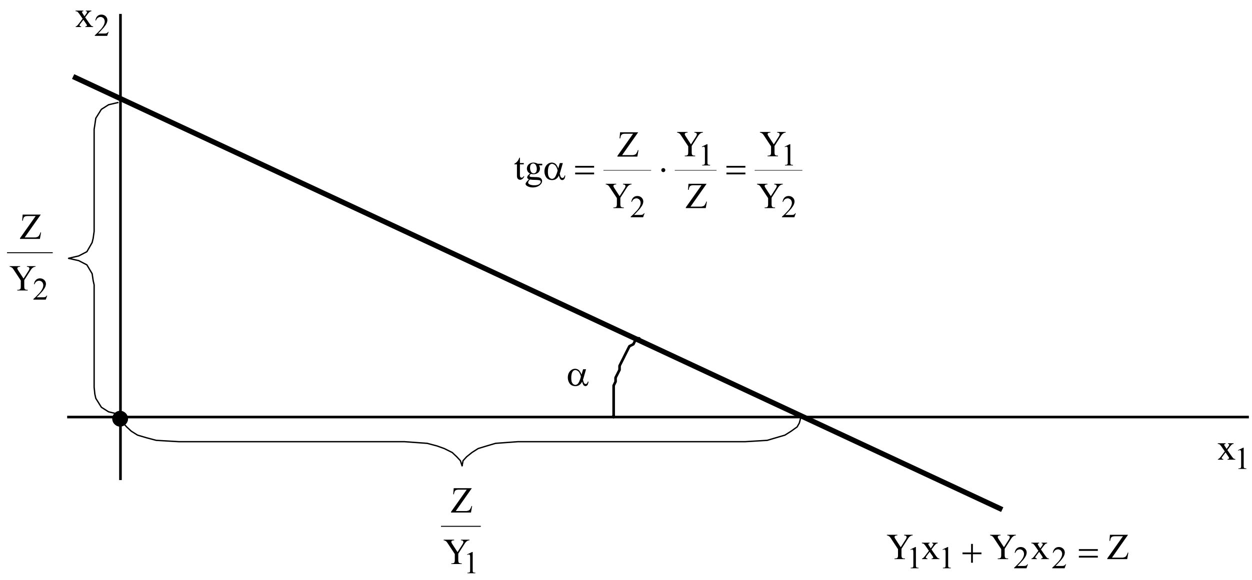


Рис.3.7. Визначення тангенса кута нахилу $tg\alpha$ прямої $Y_1x_1 + Y_2x_2 = Z$

Визначимо тангенси кутів нахилу:

1) цільовою прямою $L(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$, враховуючи, що $c_2 = 2$ фіксовано

$$tg\alpha_{ЦФ} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1}{2};$$

2) зв'язуючого обмеження $x_1 + 2x_2 \le 6$ (1)

$$tg\alpha_{(1)} = \frac{1}{2};$$

3) зв'язуючого обмеження $2x_1 + x_2 \le 8$ (2)

$$tg\alpha_{(2)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Для знаходження $\min c_1$ цільова пряма повинна співпадати з прямою (1) (див. рис.3.5):

$$tg\alpha_{ЦФ} = tg\alpha_{(1)};$$

$$\frac{c_1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\min c_1 = 1 \text{ [тис.грн./т]}.$$

Для знаходження $\max c_1$ цільова пряма повинна співпадати з прямою (2) (див. рис.3.6):

$$tg\alpha_{ЦФ} = tg\alpha_{(2)};$$

$$\frac{c_1}{2} = 2;$$

$$\max c_1 = 4 \text{ [тис.грн./т]}.$$

Таким образом, если цены на краску первого вида будут колебаться в пределах $1 < c_1 < 4$ тыс. руб./т, то оптимальное решение задачи не изменится.

Таким чином, якщо ціни на фарбу першого виду будуть коливатися в межах $1 < c_1 < 4$ тис. грн./т, то оптимальний розв'язок задачі не зміниться.

З наведених вище розрахунків та графічної їх ілюстрації слідує, що якщо ціна на фарбу першого виду стане менше 1 тис.грн./т ($c_1 < 1$), то найбільш вигідним буде виробництво фарб в точці D (див. рис.3.5). При цьому загальне споживання інгредієнта В знизиться, що призведе до його недефіцитності [ресурс (2)], а дефіцитними будуть ресурси (1) і (4).

Завдання для самоперевірки та контролю засвоєння знань

Задача №1

Проаналізуйте випадки, коли ціна на фарбу першого виду:

1) перевищила 4 тис. грн./т;

2) рівна 1 тис. грн./т;

3) рівна 4 тис. грн./т.

Яка точка стане оптимальною, якими будуть обсяги виробництва фарб, як зміниться дефіцитність і обсяг споживання ресурсів задачі?

Задача №2

Визначте допустимий діапазон зміни ціни на фарбу 2-го виду при незмінному значенні ціни на фарбу першого виду 3 тис.грн./т у вихідній задачі. Проаналізуйте вплив зміни ціни на фарбу 2-го виду на обсяги виробництва і дефіцитність ресурсів у вихідній задачі (аналогічно задачі № 3.1).

Задача № 3

Нехай в задачі №1.01 обмеження (1) для інгредієнта А змінилось на $2x_1 + 3x_2 \le 10$. Визначте наступні параметри задачі:

1) новий оптимальний розв'язок X^* і $L(X^*)$;

2) максимально допустимий приріст об'єму інгредієнта А і відповідне збільшення ЦФ;

3) величини y_i для всіх ресурсів задачі.

Задача № 4

Нехай у задачі № 1.01 ЦФ змінилася на $L(X) = 3x_1 + x_2$. У цьому випадку точка F з координатами (4;0) стане оптимальною. Це означає, що фарбу 2-го виду виробляти недоцільно. Визначте, при якій ціні або діапазоні цін на фарбу першого виду стане вигідно виробляти фарбу 2-го виду?

Задача № 5

Перелічіть види всіх ресурсів і обмежень задачі. Проведіть аналіз чутливості оптимального розв'язку для ресурсів (1), (2), (3) і цін c_1 і c_2 (табл.3.2).

Таблиця 3.2

Параметри задачі №3.5

Модель	Координати перетину прямих з осями x_1 і x_2
$L(X) = 6x_1 + 5x_2 \to \max$ [тис. грн.]	(2; 2,4)
$x_1 + 2x_2 \le 11$ [од. ресурсів] (1)	(11; 5,5)
$2x_1 + x_2 \le 7$ [од. ресурсів] (2)	(3,5; 7)
$2x_1 - x_2 \le 1$ [од. ресурсів] (3)	(0,5; -1)
$2x_1 + 3x_2 \ge 3$ [од. ресурсів] (4)	(1,5; 1)
$x_1, x_2 \ge 0$	$X_{max}(1;5)$ [од.прод.], $L(X_{max}) = 31$ [тис.грн.]

Задача № 6*

Використовуючи конкретні приклади моделей задач, сформулюйте *задачі*, *правила, економічну інтерпретацію* аналізу оптимального розв'язку на чутливість для таких випадків:

1) в задачі існують обмеження зі знаком $\ge$;

2) при пошуку допустимого діапазону зміни ціни цільова пряма, повертаючись навколо оптимальної точки, проходить через: a) вертикальне положення; b) горизонтальне положення.

*Задача № 7**

Деяка фірма виробляє продукцію двох видів з використанням трьох видів ресурсів - нерівності (1), (3), (5). Нерівності (2) і (4) обмежують відповідно мінімальний добовий попит на продукцію першого виду і максимальний добовий попит на продукцію другого виду. ЦФ являє собою дохід від реалізації продукції. Перелічіть види всіх ресурсів і обмежень задачі і проведіть повний аналіз чутливості оптимального розв'язку (табл.3.3).

Таблиця 3.3

Параметри задачі №3.7

Модель	Координати перетину прямих з осями x_1 і x_2
$L(X) = 5x_1 + 1x_2 \to \max$ [*грн.*];	
$-x_1 + x_2 \leq 1$ [од. ресурсів] (1)	(-1; 1)
$x_1 \geq 2$ [од. прод.] (2)	(2; –)
$4x_1 - 8x_2 \leq 12$ [од. ресурсів] (3)	(3; -1,5)
$x_2 \leq 6$ [од. прод.] (4)	(–; 6)
$3x_1 + 2x_2 \leq 21$ [од. ресурсів] (5)	(7; 10,5)
$x_1, x_2 \geq 0$	$X_{max}(6;1,5)$ [од.прод.], $L(X_{max}) = 31,5$ [грн.]

*Задача № 8**

Перелічіть види всіх ресурсів і обмежень задачі. Проведіть повний аналіз чутливості оптимального розв'язку (табл.3.4).

Таблиця 3.4

Параметри задачі №3.8

Модель	Координати перетину прямих з осями x_1 і x_2
$L(X) = 4x_1 + x_2 \to \max$ [грн.]	(1; 4)
$-x_1 + 4x_2 \le 9$ [од. ресурсів] (1)	(-9; 2,3)
$3x_1 + 1x_2 \ge 5$ [од. ресурсів] (2)	(1,7; 5)
$x_1 + 2x_2 \le 7$ [од. ресурсів] (3)	(7; 3,5)
$5x_1 - 8x_2 \le -1$ [од. ресурсів] (4)	(-0,2; 0,1)
$x_1, x_2 \ge 0$	$X_{max}(3;2)$ [од. прод.], $L(X_{max}) = 14$ [грн.]

2.4. Двохіндексні задачі лінійного програмування

2.4.1. Побудова моделей транспортної задачі

Задача про розміщення (транспортна задача) - це РЗ, в якій роботи і ресурси вимірюються в одних і тих же одиницях. У таких задачах ресурси можуть бути розділені між роботами, і окремі роботи можуть бути виконані за допомогою різних комбінацій ресурсів. Прикладом типової транспортної задачі (ТЗ) є розподіл (транспортування) продукції, що знаходиться на складах, по підприємствах-споживачам.

Стандартна ТЗ визначається як задача розробки найбільш економічного плану перевезення продукції *одного виду* з декількох пунктів відправлення в пункти призначення. При цьому величина транспортних витрат прямо пропорційна обсягу перевезеної продукції і задається за допомогою тарифів на перевезення *одиниці продукції*.

Вихідні параметри моделі ТЗ

1) n – кількість пунктів відправлення, m – кількість пунктів призначення.

2) a_i – запас продукції в пункті відправлення A_i $(i = \overline{1,n})$ [од. прод.].

3) b_j – попит на продукцію в пункті призначення B_j $(j = \overline{1,m})$ [од. прод.].

4) c_{ij} – тариф (вартість) перевезення одиниці продукції із пункту відправлення A_i в пункт призначення B_j [грн./од. прод.].

Шукані параметри моделі ТЗ

1) x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться з пункту відправлення A_i до пункту призначення B_j [од. прод.].

2) $L(X)$ – транспортні витрати на перевезення всієї продукції [грн.].

Етапи побудови моделі

I. Визначення змінних.
II. Перевірка збалансованості задачі.
III. Побудова збалансованої транспортної матриці.
IV. Завдання ЦФ.
V. Завдання обмежень.

Транспортна модель

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min;$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,m}, \\ \forall x_{ij} \ge 0\ \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right). \end{cases} \tag{2.2}$$

ЦФ являє собою загальні транспортні витрати на здійснення всіх перевезень в цілому. Перша група обмежень вказує, що запас продукції в будь-якому пункті відправлення повинен бути рівний сумарному обсягу перевезень продукції з цього пункту. Друга група обмежень вказує, що сумарні перевезення продукції в деякий пункт споживання повинні повністю задовольнити попит на продукцію в цьому пункті. Наочною формою представлення моделі ТЗ є транспортна матриця (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Загальний вид транспортної матриці

Пункти відправлення, A_i	Пункти споживання, B_j				Запаси, од. прод.
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11}, [грн./од. прод.]	c_{12}	…	c_{1m}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	a_n
Потреба од. прод.	b_1	b_2	…	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

З моделі (2.2) випливає, що сума запасів продукції в усіх пунктах відправлення повинна дорівнювати сумарній потребі у всіх пунктах споживання, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \,. \tag{2.3}$$

Якщо (1.3) виконується, то ТЗ називається **збалансованою** (закритою), в іншому випадку - **незбалансованою** (відкритою). У разі, коли *сумарні запаси перевищують сумарні потреби*, необхідний додатковий **фіктивний** (реально не існуючий) пункт споживання, який буде формально споживати існуючий надлишок запасів, тобто

$$b_ф = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j .$$

Якщо *сумарні потреби перевищують сумарні запаси*, то необхідний додатковий **фіктивний** пункт відправлення, формально який заповнює існуючий недолік продукції в пунктах відправлення:

$$a_ф = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Для фіктивних перевезень вводяться **фіктивні** тарифи $c^ф$, величина яких зазвичай прирівнюється до нуля $c^ф = 0$. Але в деяких ситуаціях величину фіктивного тарифу можна інтерпретувати як **штраф**, яким обкладається кожна одиниця недопоставленої продукції. У цьому випадку величина $c^ф$ може бути будь-яким додатнім числом.

Задача про призначення - окремий випадок ТЗ. У задачі про призначення кількість пунктів відправлення дорівнює кількості пунктів призначення. Обсяги потреби та пропозиції в кожному з пунктів призначення та відправлення рівні 1. Прикладом типової задачі про призначення є розподіл працівників з різних видів робіт, що мінімізує сумарний час виконання робіт.

Змінні задачі про призначення визначаються наступним чином

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \ \textit{якщо } i - \textit{й} \ \ \textit{робочий працює на } \ j - \textit{му} \ \ \textit{верстаті}, \\ 0, \ \textit{в} \ \ \textit{іншому} \ \ \textit{випадку}. \end{cases}$$

<u>*Приклад побудови моделі транспортної задачі*</u>

Задача № 2.5.

Заводи деякої автомобільної фірми розташовані в містах A, B і C. Основні центри розподілу продукції зосереджені в містах D і E. Обсяги виробництва зазначених трьох заводів дорівнюють 1000, 1300 і 1200 автомобілів щоквартально. Величини квартального попиту в центрах розподілу складають 2300 і 1400 автомобілів відповідно. Вартості перевезення автомобілів залізницею по кожному з можливих маршрутів наведені в табл.2.5.

Таблиця 2.5

Вартість перевезення автомобілів, грн./шт.

	D	E
A	80	215
B	100	108
C	102	68

Побудуйте математичну модель, що дозволяє визначити кількість автомобілів, що перевозяться з кожного заводу в кожен центр розподілу, таким чином, щоб загальні транспортні витрати були мінімальні.

Розв'язок

Визначення змінних

Позначимо кількість автомобілів, що перевозяться з і-го заводу в j-й пункт споживання через x_{ij}.

Перевірка збалансованості завдання

Перевіримо рівність сумарного виробництва автомобілів і сумарного попиту

$$\underbrace{(1000+1300+1200)}_{3500\text{ шт./кв.}}<\underbrace{(2300+1400)}_{3700\text{ шт./кв.}},$$

звідки слідує висновок – задача *незбалансована*, оскільки попит на автомобілі перевищує обсяг їх виробництва. Для встановлення балансу введемо додатковий *фіктивний* завод з щоквартальним обсягом виробництва 200 шт. ($3700 - 3500 = 200$). Фіктивні тарифи $c^{ф}$ прирівняємо до нуля (так як перевезення насправді проводитися не будуть).

Побудова транспортної матриці

Згідно з результатами перевірки збалансованості задачі у транспортній матриці має бути чотири рядки, відповідних заводам і два стовпці, відповідних центрам розподілу (див. табл.2.6). Тариф перевезення зазвичай вписують ***в правому нижньому*** кутку клітки матриці для зручності подальшого знаходження опорних планів задачі.

Таблиця 2.6

Транспортна матриця задачі

	D	E	Обсяг виробн., шт./квартал
A	80	215	1000
B	100	108	1300
C	102	68	1200
Фіктивний завод	0	0	200
Попит, шт./квартал	2300	1400	*3700*

Завдання ЦФ

Сумарні витрати в грн на щоквартальне перевезення автомобілів визначаються за формулою

$$L(X) = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32} + 0 \cdot x_{41} + 0 \cdot x_{42} \to \min$$

Завдання обмежень

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 1000, \\ x_{21} + x_{22} = 1300, \\ x_{31} + x_{32} = 1200, \\ x_{41} + x_{42} = 200, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 2300, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1400, \\ x_{ij} \geq 0 \ \left(\forall i = \overline{1,2};\ \forall j = \overline{1,4}\right). \end{cases}$$

[шт./квартал]

Модифікації стандартної транспортної задачі

Неприпустимі перевезення

Іноді в певних напрямках перевезення продукції неможливі, наприклад, з причини ремонту транспортних магістралей. Такі ситуації моделюються за допомогою введення так званих **заборонних** тарифів $c^з$. Заборонні тарифи повинні зробити невигідними перевезення у відповідних напрямках. Для цього величина заборонних тарифів повинна бути більше реальних тарифів у транспортній матриці

$$c^з > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}\right).$$

Максимізація ЦФ

Існуючий алгоритм розв’язку транспортних задач (**метод потенціалів**) припускає, що ЦФ прагне до мінімуму. Однак існують ситуації, коли в рамках транспортної моделі потрібно максимізувати ЦФ, наприклад, загальний дохід, обсяг продажів, прибуток, якість виконуваних робіт і т.д. У цьому випадку в модель замість шуканої ЦФ $L(X)$ вводиться ЦФ $L_1(X) = -L(X)$, в якій тарифи множаться на (-1). Таким чином, максимізація $L(X)$ відповідатиме мінімізації $L_1(X)$.

Багатопродуктові моделі

Якщо в задачі йде мова про те, що з кожного пункту відправлення можна перевозити продукцію декількох видів, то при побудові моделі можна використовувати один з наступних варіантів:

- кожному виду продукції повинна відповідати одна транспортна матриця;
- всі види продукції представлені в одній загальній матриці з використанням заборонних тарифів у клітинах, що пов'язують різні види продукції.

2.4.2. Методи знаходження опорних планів

Опорний план є допустимим розв'язком ТЗ і використовується в якості початкового базисного розв'язку при знаходженні оптимального розв'язку методом потенціалів. Існує три методи знаходження опорних планів: метод північно-західного кута, метод мінімального елемента і метод Фогеля. "Якість" опорних планів, отриманих цими методами, різниться: у загальному випадку метод Фогеля дає найкращий розв'язок (найчастіше оптимальний), а метод північно-західного кута - найгірший.

Всі існуючі методи знаходження опорних планів відрізняються тільки ***способом вибору клітини*** для заповнення. Саме заповнення відбувається однаково незалежно від використовуваного методу. Слід пам'ятати, що перед знаходженням опорного плану транспортна задача повинна бути *збалансована*.

Метод північно-західного кута

На кожному кроці **методу північно-західного кута** з всіх не викреслених клітин вибирається сама ліва і верхня (північно-західна) клітина. Іншими словами, на кожному кроці вибирається ***перша*** з тих, що залишилася не викресленою, рядків і ***перша*** з тих, що залишилася не викресленою, стовпців.

Для того, щоб *заповнити* клітку (i,j), необхідно порівняти поточний запас товару в розглянутому i-му рядку $a_i^{пот}$ з поточною потребою в розглянутому j-му стовпці $b_j^{пот}$.

Якщо існуючий запас *дозволяє* перевезти всю потребу, то

- в клітину (i,j) в якості перевезення вписується значення потреби $b_j^{пот}$;
- • j-й стовпець викреслюється, оскільки його потреба вже вичерпана;
- від існуючого запасу в i-му рядку віднімається величина зробленого перевезення, колишній запас закреслюється, а замість нього записується залишок, тобто $\left(a_i^{пот} - b_j^{пот}\right)$.

Якщо існуючий запас *не дозволяє* перевезти всю потребу, то

- в клітину (i,j) в якості перевезення вписується значення запасу $a_i^{пот}$;
- i-й рядок викреслюється, оскільки його потреба вже вичерпана;
- від існуючої потреби в j-му рядку віднімається величина зробленого перевезення, колишня потреба закреслюється, а замість неї записується залишок, тобто $\left(b_j^{пот} - a_i^{пот}\right)$.

Знаходження опорного плану продовжується до тих пір, поки не будуть викреслені всі рядки і стовпці.

Метод мінімального елемента

На кожному кроці **методу мінімального елемента** *з всіх* не викреслених клітин транспортної матриці вибирається клітина з мінімальною вартістю перевезення $\min c_{ij}$. Заповнення обраної клітини проводиться за правилами, описаним вище.

Метод Фогеля

На кожному кроці **методу Фогеля** для кожного і-го рядка обчислюються штрафи d_i як різниця між двома найменшими тарифами рядка. Таким же чином обчислюються штрафи d_j для кожного j-го стовпця. Після чого вибирається максимальний штраф *з усіх* штрафів рядків і стовпців. У рядку або стовпці, відповідному обраному штрафу, для заповнення вибирається не викреслена клітка з мінімальним тарифом $\min c_{ij}$.

Якщо існує кілька однакових за величиною максимальних штрафів в матриці, то у відповідних рядках або стовпцях вибирається одна не викреслена клітка з мінімальним тарифом $\min c_{ij}$.

Якщо клітин з мінімальним тарифом також кілька, то з них вибирається клітина (i,j) з максимальним сумарним штрафом, тобто сумою штрафів по і-му рядку і j-му стовпцю.

Формально і реальні й фіктивні стовпці і рядки в транспортній матриці абсолютно ***рівноправні***. Тому при знаходженні опорних планів фіктивні рядки, стовпці і тарифи необхідно аналізувати і використовувати точно так само як і реальні. Але при обчисленні значення ЦФ фіктивні перевезення ***не враховуються***, оскільки вони реально не були виконані та оплачені.

Якщо величина фіктивних тарифів перевищує максимальний з реальних тарифів задачі [$c^{\Phi} > \max c_{ij} \left(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}\right)$], то методи мінімального елемента і Фогеля дозволяють одержати більш дешеві плани перевезень, ніж у випадку з нульовими фіктивними тарифами.

Задача 2.6.

Знайти трьома методами опорний план ТЗ, в якому запаси на трьох складах дорівнюють 210, 170, 65 од. продукції, потреби чотирьох магазинів рівні 125, 90, 130, 100 од. продукції, тарифи перевезення в грн за одиницю продукції наступні:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ 9 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок

Перевірка збалансованості задачі показує, що сумарний обсяг запасів дорівнює сумарному обсягу потреб, тобто введення фіктивних стовпців або рядків не потрібно

$$\underbrace{\overbrace{210+170+65}^{\textit{запаси}}}_{445\,\text{од.товару}} = \underbrace{\overbrace{125+90+130+100}^{\textit{потреби}}}_{445\,\text{од.товару}}.$$

Результати знаходження опорного плану різними методами представлені в табл.2.7, 2.8 і 2.9.

Таблиця 2.7

Транспортна таблиця з опорним планом північно-західного кута

Пункти	Пункти споживання, B_j	Запаси,

відправлення, A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	од. продукції
A_1	125 / 5	85 / 8	1	2	210/85/0
A_2	2	5 / 5	130 / 4	35 / 9	170/165/35/0
A_3	9	2	3	65 / 1	65/0
Потреба, од. продукції	125/0	90/5/0	130/0	100/65/0	

Опорний план $X_{ПЗК}$, знайдений методом північно-західного кута

$$X_{ПЗК} = \begin{pmatrix} 125 & 85 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 130 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix} \text{[од. товару].}$$

Відповідна ЦФ (загальні витрати на перевезення)

$$L\left(X_{СЗУ}\right) = 125 \cdot 5 + 85 \cdot 8 + 5 \cdot 5 + 130 \cdot 4 + 35 \cdot 9 + 65 \cdot 1 = 2230 \text{ [грн.].}$$

Таблиця 2.8

Транспортна таблиця з опорним планом мінімального елемента

Пункти відправлення, A_i	Пункти споживання, B_j				Запаси, од. продукції
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	45 8	130 1	35 2	210/80/45/0
A_2	125 2	45 5	4	9	170/45/0
A_3	9	2	3	65 1	65/0
Потреба, од. продукції	125/0	90/45/0	130/0	100/35/0	

Опорний план X_{ME}, знайдений методом мінімального елемента

$$X_{ME} = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 130 & 35 \\ 125 & 45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 65 \end{pmatrix} \text{ [од. товару]}, \; L(X_{ME}) = 1100 \text{ [грн.]}.$$

Таблиця 2.9

Транспортна таблиця з опорним планом Фогеля

	B_1	B_2	B_3	B_4	b_i	Штрафи рядків, d_i			
A_1	5	8	110 1	100 2	210/110/0	1	1	1	**7**
A_2	125 2	25 5	20 4	9	170/45/25/0	2	1	1	1
A_3	9	65 2	3	1	65/0	1	1	–	–
a_j	125/0	90/25/0	130/20/0	100/0					
Штрафи стовпців, d_j	**3**	3	2	1					
	–	**3**	2	1					
	–	3	3	**7**					

	–	3	3	–

На першому кроці знаходження опорного плану методом Фогеля виникає ситуація рівності значень максимальних штрафів транспортної матриці (див. табл. 2.9)

$$d_{1 стовпця} = d_{2 стовпця} = 3.$$

Мінімальні тарифи в цих стовпцях також збігаються

$$c_{21} = c_{32} = 2.$$

Тому необхідно порівняти сумарні штрафи d_{ij} клітин (2,1) і (3,2)

$$d_{21} = d_{2 рядки} + d_{1 стовпця} = 2 + 3 = 5;$$

$$d_{32} = d_{3 рядки} + d_{2 стовпця} = 1 + 3 = 4.$$

Так як $d_{21} > d_{32}$, то вибираємо на першому кроці для заповнення клітку (2,1).

Опорний план $X_Ф$, знайдений методом Фогеля

$$X_Ф = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 110 & 100 \\ 125 & 25 & 20 & 0 \\ 0 & 65 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{[од. товару]},\ L(X_Ф) = 895 \text{ [грн.]}.$$

Завдання для самоперевірки та контролю засвоєння знань

Побудова моделей транспортної задачі

Задача №1

Побудуйте транспортну модель для вихідних даних задачі № 2.5 за умови, що квартальний попит в пункті розподілу D впав до 1900 автомобілів, а випуск на заводі B збільшився до 1500 автомобілів за квартал.

Задача №2

Побудуйте математичну модель задачі №2.5 за умови, що за кожен недопоставлений автомобіль в розподільні центри D і E введені штрафи 200 і 300 грн. відповідно. Крім того, поставки із заводу A в розподільний центр E не плануються спочатку.

Задача №3

Три електрогенеруючі станції потужністю 25, 40 і 30 мільйонів кВт год поставляють електроенергію в три міста. Максимальна потреба в електроенергії цих міст оцінюється в 30, 35 і 24 мільйонів кВт ч. Ціни за мільйон кВт год в даних містах наведені в табл.

Вартість за електроенергію, грн./млн.кВт·год

		Міста		
		1	*2*	*3*
Станція	*1*	600	700	400
	2	320	300	350
	3	500	480	450

У серпні на 20% зростає потреба в електроенергії в кожному з трьох міст. Недолік електроенергії можуть заповнити з іншої електромережі за ціною 1000 за 1 мільйон кВт год. Але третє місто не може підключитися до альтернативної електромережі. Електрогенеруючі станції планують розробити найбільш економічний план розподілу електроенергії та заповнення її нестачі в серпні. Сформулюйте цю задачу у вигляді транспортної моделі.

Задача №4

У цеху деякого заводу є п'ять верстатів, а кількість робітників у цеху дорівнює чотирьом. Робочий 1 не може працювати на верстаті 3, а робочий 3 - на верстаті 4. Відповідно до кваліфікації робітників начальник цеху в балах оцінив ефективність роботи кожного з робітників на кожному з верстатів (за 10-бальною шкалою) (див. табл.). Побудуйте модель, що дозволяє виконувати роботи на верстатах найкращим чином.

Бальні оцінки ефективності роботи робітників на верстатах

		Верстат				
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
Робочий	*1*	5	5	–	2	2
	2	7	4	2	3	1
	3	9	3	5	–	2
	4	7	2	6	7	8

<u>Методи знаходження опорних планів</u>

Знайти трьома методами опорний план транспортної задачі, в якій запаси на трьох складах дорівнюють 160, 140, 170 од. продукції, потреби чотирьох магазинів рівні 120, 50, 200, 110 од. продукції, тарифи перевезення в грн за одиницю продукції наступні

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв’яжіть задачу для наступних випадків:

- фіктивні тарифи нульові;
- фіктивні тарифи однакові за величиною і перевищують максимальний з реальних тарифів..

Порівняйте отримані опорні плани, відповідні ЦФ і поясніть причину їх відмінності.

2.4.3. Загальна розподільна задача лінійного програмування

Загальна розподільна задача ЛП - це РЗ, в якій роботи і ресурси (виконавці) виражаються в різних одиницях виміру. Типовим прикладом такої задачі є організація випуску різнорідної продукції на обладнанні різних типів.

Вихідні параметри моделі РЗ

1) n – кількість виконавців;
2) m – кількість видів виконуваних робіт;
3) a_i – запас робочого ресурсу виконавця A_i $(i=\overline{1,n})$ [од. ресурсів];
4) b_j – план по виконанню роботи B_j $(j=\overline{1,m})$ [од. робіт];
5) c_{ij} – вартість виконання роботи B_j виконавцем A_i [грн./од. робіт];
6) λ_{ij} – інтенсивність виконання роботи B_j виконавцем A_i [од. робіт/од. ресурсів].

Шукані параметри моделі РЗ

1) x_{ij} – заплановане навантаження виконавця A_i при виконанні робіт B_j [од. ресурсів];
2) $x_{ij}^{к}$ – кількість робіт B_j, які повинен буде провести виконавець A_i [од. робіт];
3) $L(X)$ – загальні витрати на виконання всього запланованого обсягу робіт [грн.].

Етапи побудови моделі

I. Визначення змінних.

II. Побудова розподільної матриці (див. табл.2.10).

III. Завдання ЦФ.

IV. Завдання обмежень.

Таблиця 2.10

Загальний вид розподільної матриці

Виконавці, A_i	Роботи, B_j				Запас ресурсів, од. ресурсів
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	λ_{11} c_{11}	λ_{12} c_{12}	…	λ_{1m} c_{1m}	a_1
A_2	λ_{21} c_{21}	λ_{22} c_{22}	…	λ_{2m} c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	λ_{n1} c_{n1}	λ_{n2} c_{n2}	…	λ_{nm} c_{nm}	a_n
План, од. роботи	b_1	b_2	…	b_m	

Модель РЗ

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\left(\lambda_{ij} x_{ij}\right) \rightarrow \min; \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,m}, \\ \forall x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}\right), \end{cases}$$

де $\left(\lambda_{ij} x_{ij}\right)$ – це кількість робіт j-го виду, виконаних i-м виконавцем.

Етапи розв'язку РЗ

I. ***Перетворення РЗ в ТЗ:***

1) вибір базового ресурсу і розрахунок нормованих виробництв ресурсів α_i:

$$\alpha_i = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{\text{баз } j}}; \tag{2.5}$$

2) перерахунок запасу робочого ресурсу виконавців a_i':

$$a_i' = \alpha_i a_i \quad [\text{од. ресурсу}]; \tag{2.6}$$

3) перерахунок планового завдання b_j':

$$b_j' = \frac{b_j}{\lambda_{\text{баз } j}} \quad \left[\frac{\textit{од.робіт} \cdot \textit{од. р}\text{есурсу}}{\textit{од.}\text{ робіт}} = \textit{од. р}\text{есурсу}\right]; \tag{2.7}$$

4) перерахунок собівартостей робіт:

$$c_{ij}' = c_{ij} \lambda_{\text{баз } j} \quad \left[\frac{\textit{грн.} \cdot \textit{од.робіт}}{\textit{од.}\text{ робіт} \cdot \textit{од. р}\text{есурсу}} = \frac{\textit{грн.}}{\textit{од. р}\text{есурсу}}\right]. \tag{2.8}$$

II. ***Перевірка балансу*** перелічених параметрів $\sum_{i=1}^{n} a_i' = \sum_{j=1}^{m} b_j'$ і побудова транспортної матриці.

III. ***Пошук оптимального розв'язку*** ТЗ $X'^{*} = \left(x'^{*}_{ij}\right)$.

IV. ***Перетворення оптимального розв'язку*** ТЗ $X^{'*}$ в оптимальний розв'язок РЗ X^{*}, причому перехід $X^{'*} \to X^{*}$ виконується за формулою (1.9)

$$x_{ij} = \frac{x'_{ij}}{\alpha_i} \quad \text{[од. ресурсу]}, \tag{2.9}$$

де x_{ij} и x'_{ij} – відповідно елементи розв'язку РЗ і ТЗ.

V. ***Визначення кількості робіт*** $X^{к*} = \left(x_{ij}^{к*}\right)$, відповідні оптимальному розв'язку РЗ X^{*}:

$$x_{ij}^{к} = \lambda_{ij} x_{ij} \quad \left[\frac{\textit{од. р}\text{обіт} \cdot \textit{од.}\,\text{ресурсу}}{\textit{од. ресурсу}} = \textit{од.}\,\text{робіт}\right]. \tag{2.10}$$

VI. ***Визначення ЦФ розподільної задачі*** $L(X^{*})$ згідно (2.4).

Задача 1.10.

На фабриці експлуатуються три типи ткацьких верстатів, які можуть випускати чотири види тканин. Відомі такі дані про виробничий процес:

- продуктивності верстатів по кожному виду тканини, м/год

$$\left(\lambda_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 24 & 30 & 18 & 42 \\ 12 & 15 & 9 & 21 \\ 8 & 10 & 6 & 14 \end{pmatrix};$$

- собівартість тканин, грн./м

$$\left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

- фонди робочого часу верстатів (a_i): 90, 220, 180 год;

- планований обсяг випуску тканин (b_j): 1200, 900, 1800, 840 м.

Потрібно розподілити випуск тканини по верстатам з метою мінімізації загальної собівартості виробництва тканини.

Розв'язок

Нехай змінні x_{ij} - це час, протягом якого і-й верстат випускатиме j-у тканину. Зведемо вихідні дані здачі у розподільну таблицю (табл.2.11).

Таблиця 2.11

Розподільна матриця задачі

Верстати	Тканини				Фонд часу a_i, год
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 (c_{ij}) (λ_{ij}) 24	1 30	3 18	1 42	90
A_2	3 12	2 15	4 9	1 21	220
A_3	6 8	3 10	5 6	2 14	180
Обсяг випуску b_j, м	1200	900	1800	840	

ЦФ має сенс собівартості випуску запланованої кількості тканини всіх видів

$$L(X) = 2\cdot 24\cdot x_{11} + 1\cdot 30\cdot x_{12} + 3\cdot 18\cdot x_{13} + 1\cdot 42\cdot x_{14} +$$
$$+ 3\cdot 12\cdot x_{21} + 2\cdot 15\cdot x_{22} + 4\cdot 9\cdot x_{23} + 1\cdot 21\cdot x_{24} +$$
$$+ 6\cdot 8\cdot x_{31} + 3\cdot 10\cdot x_{32} + 5\cdot 6\cdot x_{33} + 2\cdot 14\cdot x_{34} =$$

$$= 48x_{11} + 30x_{12} + 54x_{13} + 42x_{14} +$$
$$+ 36x_{21} + 30x_{22} + 36x_{23} + 21x_{24} +$$
$$+ 48x_{31} + 30x_{32} + 30x_{31} + 28x_{34} \rightarrow \min.$$

Обмеження мають вид

$$\begin{cases} \text{за фондом часу, год} \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=90, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=220, \\ x_{31}+x_{32}+x_{31}+x_{34}=180, \\ \text{за обсягом випуску, м} \\ 24x_{11}+12x_{21}+8x_{31}=1200, \\ 30x_{12}+15x_{22}+10x_{32}=900, \\ 18x_{13}+9x_{23}+6x_{33}=1800, \\ 42x_{14}+21x_{24}+14x_{34}=840, \\ x_{ij}\ge 0\ \left(\forall i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4}\right). \end{cases}$$

Перетворимо РЗ в ТЗ, тобто представимо вихідну задачу у вигляді, коли тканини виробляє тільки один верстат - базовий і всі параметри задачі узгодимо з його характеристиками. В якості базового можна вибирати будь-який з верстатів. Ми виберемо верстат з максимальною продуктивністю, тобто A_1. За формулою (2.5) визначимо продуктивності верстатів α_i, нормовані щодо продуктивності базового верстата:

$$\alpha_1=\frac{24}{24}=\frac{30}{30}=\frac{18}{18}=\frac{42}{42}=1;$$

$$\alpha_2=\frac{12}{24}=\frac{15}{30}=\frac{9}{18}=\frac{21}{42}=\frac{1}{2};$$

$$\alpha_3=\frac{8}{24}=\frac{10}{30}=\frac{6}{18}=\frac{14}{42}=\frac{1}{3}.$$

Таким чином, базовий верстат працює в два рази швидше другого верстата і в три рази швидше третього.

Перерахуємо фонди часу верстатів за формулою (2.6):

$$a_1' = 90 \cdot 1 = 90 \text{ [год]}; \; a_2' = 220 \cdot \frac{1}{2} = 110 \text{ [год]}; \; a_3' = 180 \cdot \frac{1}{3} = 60 \text{ [год]}.$$

З цих величин випливає, що той обсяг робіт, який другий верстат виконує за свій фонд часу 220 год, а базовий верстат зможе виконати за 110 год. Аналогічно обсяг робіт, який третій верстат виконує за 180 год, базовий виконає за 60 год.

Перерахуємо планове завдання з формулою (2.7):

$$b_1' = \frac{1200}{24} = 50 \text{ [год]}; \; b_2' = \frac{900}{30} = 30 \text{ [год]}; \; b_3' = \frac{1800}{18} = 100 \text{ [год]};$$

$$b_4' = \frac{840}{42} = 20 \text{ [год]}.$$

Звідси випливає, що план випуску першого виду тканини базовий верстат виконає за 50 год, другого виду - за 30 год і т.д.

Перерахунок собівартостей виробляємо за формулою (2.8), наприклад:

$$c_{13}' = 3 \cdot 18 = 54 \text{ [грн./год]}; \; c_{21} = 3 \cdot 24 = 72 \text{ [грн./год]};$$

$$c_{34}' = 2 \cdot 42 = 84 \text{ [грн./год]}.$$

В отриманій ТЗ умова балансу не виконується, тому що сумарний фонд часу верстатів більше, ніж це необхідно для виконання плану з випуску всіх тканин (260 год> 200 год). Введемо фіктивний стовпець $B_ф$ і запишемо все перелічені параметри РЗ в транспортну матрицю (див. табл.2.12). Фіктивні тарифи для спрощення прирівняємо до нуля.

Таблиця 2.12

Транспортна матриця задачі №6.01

Верстати	Тканини					Фонд часу a', год
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_Ф$	
A_1	48	30	54	42	0	90

A_2	72	60	72	42	0	110
A_3	144	90	90	84	0	60
Обсяг випуску b'_j, год	50	30	100	20	60	

Для спрощення замість оптимального розв'язку розглянемо опорний план $X'_{ПЗК}$, знайдений методом північно-західного кута.

$$X'_{ПЗК} = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60^{\phi} \end{pmatrix} \text{ [год].}$$

Перетворимо опорний план ТЗ $X'_{ПЗК}$ в опорний план РЗ $X_{ПЗК}$ згідно (2.9)

$$X_{ПЗК} = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 180 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 180^{\phi} \end{pmatrix} \text{ [год].}$$

Таким чином, перший верстат повинен 50 год виробляти тканину першого виду, 30 год - тканину другого виду та 10 год - тканину третього виду. Другий верстат повинен 180 год виробляти тканину третього виду і 40 год - тканину четвертого виду. А третій верстат буде простоювати, не випускаючи тканину взагалі, тому згідно з розв'язком, його завантаження знаходиться у фіктивному стовпці ($x_{35} = 180^{\Phi}$).

Визначимо, скільки метрів тканини кожного виду повинні виробити верстати за формулою (1.10)

$$X^{к}_{ПЗК} = \begin{pmatrix} 1200 & 900 & 180 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1620 & 840 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix} \text{ [м].}$$

Визначимо загальну собівартість виробництва, використовуючи обчислені значення елементів матриці $X^{к}_{ПЗК}$

$$L(X) = 2 \cdot 1200 + 1 \cdot 900 + 3 \cdot 180 + 4 \cdot 1620 + 1 \cdot 840 = 16020 \text{ (грн.і)}.$$

Завдання для самоперевірки та контролю засвоєння знань

Задача №1

Розв’яжіть РЗ, вихідні дані якої наведені в табл.

Розподільна матриця задачі

Продуктивність	Продукція			Фонд часу, год
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1 (c_{ij}, грн./т) (λ_{ij}, т/год) 6	5 2	4 4	360
A_2	6 12	2 4	2 8	90
A_3	3 72	9 24	1 48	146
A_4	2 9	5 3	3 6	1296
Обсяг випуску, т	7056	3216	2976	

Задача №2

Деяка фірма містить три магазини, яким щотижня слід доставляти товар: першому магазину - 1050 кг сиру, другому - 600 мішків борошна, третьому - 2400 упаковок соку. Товари доставляються вантажними машинами чотирьох транспортних підприємств. Кількість машин на цих підприємствах складає 65, 40, 45 і 20 машин. Усі машини мають різну вантажопідйомність [од.тов./маш.], залежно від типу машини і типу перевезеного вантажу

$$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 12 \\ 5 & 3 & 6 \\ 50 & 30 & 60 \\ 25 & 15 & 30 \\ \text{кг / маш.} & \text{мішків / маш.} & \text{упак./ маш.} \end{pmatrix}.$$

Вартості використання машин [грн./маш.] залежно від дальності перевезення і ємності машини дорівнюють

$$\begin{pmatrix} 30 & 24 & 24 \\ 10 & 9 & 6 \\ 250 & 210 & 240 \\ 100 & 75 & 90 \end{pmatrix}.$$

Організуйте економне перевезення товарів (при розв'язку використовуйте метод північно-західного кута). *Будьте уважні при визначенні вихідних собівартостей перевезень розподільної задачі.*

2.5. Методи прогнозування

2.5.1. Регресійний і кореляційний аналіз

Регресійний і кореляційний аналіз дозволяє встановити та оцінити залежність досліджуваної випадкової величини Y від однієї або декількох інших величин X, і робити прогнози значень Y. Параметр Y, значення якого потрібно передбачати, є **залежною** змінною. Параметр X, значення якого нам відомі заздалегідь і який впливає на значення Y, називається **незалежною** змінною. Наприклад, X - кількість внесених добрив, Y - урожай; X - величина витрат компанії на рекламу свого товару, Y - обсяг продажу цього товару і т.д.

Кореляційна залежність Y від X – це функціональна залежність

$$\overline{y}_x = f(x), \tag{2.11}$$

де $\overline{y}_x$ – середнє арифметичне (**умовне середнє**) всіх можливих значень параметру Y, які відповідають значенню $X = x$. Рівняння (2.11) називається **рівнянням регресії** Y на X, функція $f(x)$ - **регресією** Y на X, а її графік - **лінією регресії** Y на X.

Основне завдання регресійного аналізу - встановлення ***форми*** кореляційного зв'язку, тобто виду функції регресії (лінійна, квадратична, показова і т.д.).

Метод найменших квадратів дозволяє визначити коефіцієнти рівняння регресії таким чином, щоб точки, побудовані за вихідними даними (x_i, y_i), лежали якомога ближче до точок лінії регресії (2.11). Формально це записується як мінімізація суми квадратів відхилень (помилок) функції регресії і вихідних точок

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^p - y_i\right)^2 \to \min,$$

де y_i^p – значення, обчислене за рівнянням регресії; $\left(y_i^p - y_i\right)$ – **відхилення** ε (помилка, залишок) (рис.2.11); n - кількість пар вихідних даних.

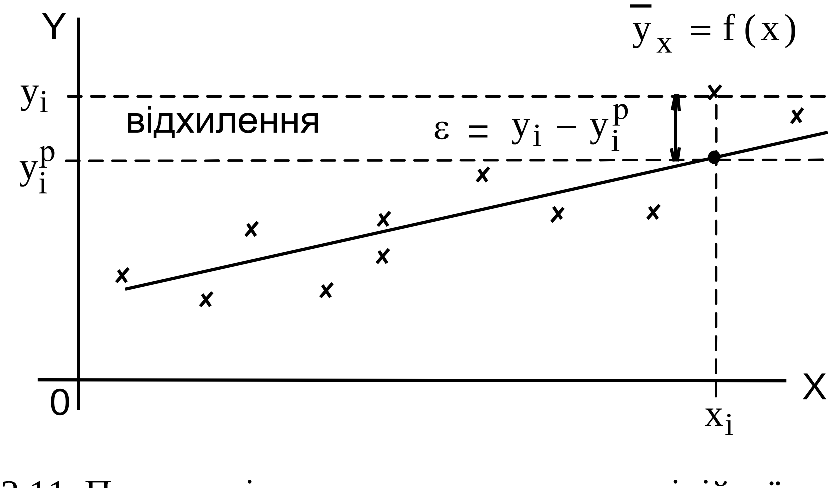


Рис.2.11. Поняття відхилення ε для випадку лінійної регресії

У регресійному аналізі передбачається, що математичне сподівання випадкової величини ε дорівнює нулю і її дисперсія однакова для всіх спостережуваних значень Y. Звідси випливає, що розсіювання даних біля лінії регресії повинно бути однакове при всіх значеннях параметра X. У випадку, показаному на рис.2.12 дані розподіляються уздовж лінії регресії нерівномірно, тому метод найменших квадратів в цьому випадку непридатний.

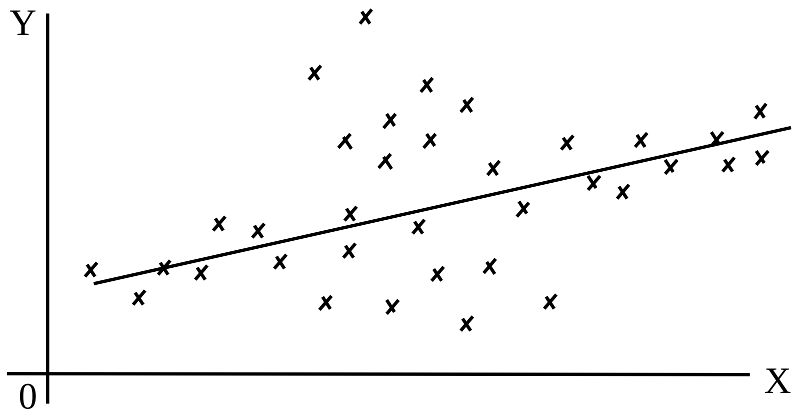


Рис.2.12. Нерівномірний розподіл вихідних точок вздовж лінії регресії

Основне завдання кореляційного аналізу - оцінка ***тісноти*** (сили) кореляційного зв'язку. Тіснота кореляційної залежності Y від X оцінюється за величиною розсіювання значень параметра Y навколо умовного середнього $\bar{y}_x$. Велике розсіювання говорить про слабку залежності Y від X, або про її відсутність і, навпаки, мале розсіювання вказує на наявність досить сильної залежності.

Коефіцієнт детермінації r^2 показує, на скільки відсотків ($r^2 \cdot 100\%$) знайдена функція регресії описує зв'язок між вихідними значеннями параметрів X і Y

$$r^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i^p - \bar{y}\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}, \tag{2.12}$$

де $\left(y_i^p - \bar{y}\right)^2$ – пояснена варіація; $\left(y_i - \bar{y}\right)^2$ – загальна варіація (рис.2.13).

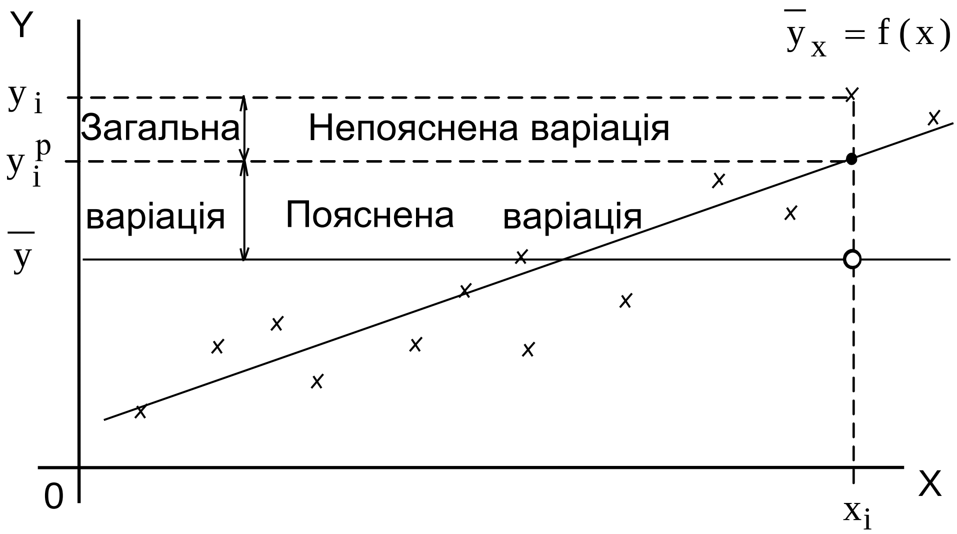


Рис.2.13. Графічна інтерпретація коефіцієнта детермінації для випадку лінійної регресії

Відповідно, величина $(1-r^2)\cdot 100\%$ показує, скільки відсотків варіації параметра Y обумовлені факторами, не включеними в регресійну модель. При високому ($r^2 \geq 75\%$) значенні коефіцієнта детермінації можна робити припущення $y^* = f(x^*)$ для конкретного значення x^*.

Для проведення регресійного аналізу та прогнозування необхідно:

1) ***побудувати графік*** вихідних даних і спробувати візуально, наближено визначити характер залежності;

2) ***обрати вид функції*** регресії, яка може описувати зв'язок вихідних даних;

3) ***визначити чисельні коефіцієнти*** функції регресії;

4) ***оцінити силу*** знайденої регресійної залежності на основі коефіцієнта детермінації r^2;

5) ***зробити прогноз*** (при $r^2 \geq 75\%$) або зробити висновок про неможливість прогнозування за допомогою знайденої регресійної залежності. При цьому не рекомендується використовувати модель

регресії для тих значень незалежного параметра X, що не належать інтервалу, заданому у вихідних даних.

3.5.2. Лінійна регресія

Коефіцієнти **лінійної** регресії $y = a_0 + a_1 x$ обчислюються за такими формулами (всі суми беруться по n парам вихідних даних)

$$a_1 = \frac{n\left(\sum y_i x_i\right) - \sum y_i \sum x_i}{n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2};$$
$$a_0 = \frac{1}{n}\left(\sum y_i - a_1 \sum x_i\right). \qquad (2.13)$$

Для зручності обчислень використовують допоміжну таблицю (табл.2.12), в якій розраховуються необхідні суми.

Таблиця 2.12

Допоміжна таблиця для лінійної функції

Заголовки даних	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^p	$(y_i^p - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
Проміжні значення							
	...	...	...	...	...	...	...
Сума ($\sum_{i=1}^{n}$) по стовпці					–		

Задача 2.8.

Деяка фірма займається поставками різних вантажів на короткі відстані всередині міста. Перед менеджером стоїть завдання оцінити вартість таких послуг, залежну від витраченого на поставку часу. В якості найбільш важливого чинника, що впливає на час поставки, менеджер вибрав пройдену відстань. Були зібрані вихідні дані про десять поставок (табл.2.13).

Таблиця 2.13

Вихідні дані задачі 1.11

Відстань, миль	3,5	2,4	4,9	4,2	3,0	1,3	1,0	3,0	1,5	4,1
Час, хв.	16	13	19	18	12	11	8	14	9	16

Побудуйте графік вихідних даних, визначте по ньому характер залежності між відстанню і витраченим часом, проаналізуйте застосовність методу найменших квадратів, побудуйте рівняння регресії, проаналізуйте силу регресійної зв'язку і зробіть прогноз часу поїздки на 2 милі.

Розв'язок

На рис.2.14. побудовані вихідні дані по десяти поїздкам.

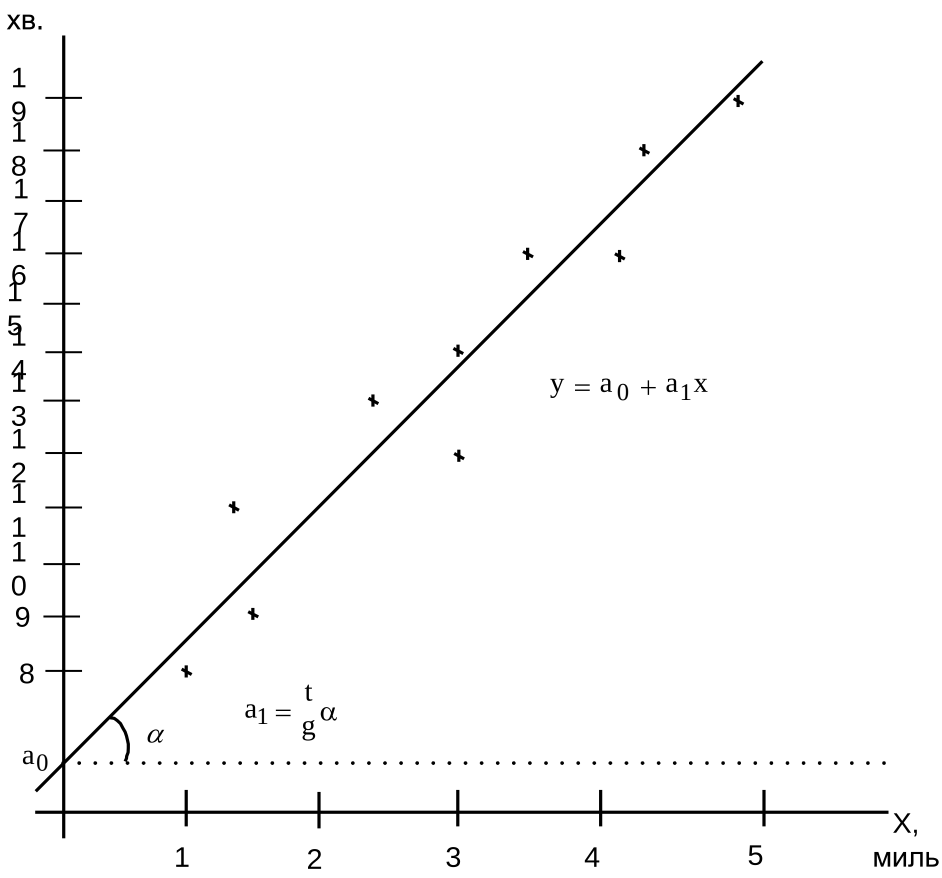


Рис.2.14. Графік вихідних даних

Крім відстані на час поставки впливають пробки на дорогах, час доби, дорожні роботи, погода, кваліфікація водія, вид транспорту. Побудовані точки не перебувають точно на лінії, що обумовлено описаними вище факторами. Але ці точки зібрані навколо прямої лінії, тому можна припустити лінійний зв'язок між параметрами. Всі вихідні точки рівномірно розподілені вздовж передбачуваної прямої лінії, що дозволяє застосувати метод найменших квадратів.

Обчислимо суми, необхідні для розрахунку коефіцієнтів лінійної регресії, коефіцієнта детермінації за допомогою табл.2.14.

Таблиця 2.14

Допоміжна таблиця задачі 2.8

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^p	$(y_i^p - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
3,5	16	12,25	56,00	15,223	2,634129	5,76
2,4	13	5,76	31,2	12,297	1,697809	0,36
4,9	19	24,01	93,1	18,947	28,59041	29,16
4,2	18	17,64	75,60	17,085	12,14523	19,36
3,0	12	9,00	36,00	13,893	0,085849	2,56
1,3	11	1,69	14,30	9,371	17,88444	6,76
1,0	8	1,00	8,00	8,573	25,27073	31,36
3,0	14	9,00	42,00	13,893	0,085849	0,16
1,5	9	2,25	13,50	9,903	13,66781	21,16
4,1	16	16,81	65,60	16,819	10,36196	5,76
$\sum = 28{,}9$	$\sum = 136$	$\sum = 99{,}41$	$\sum = 435{,}30$	–	112,4242	122,4

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{16+13+19+18+12+11+8+14+9+16}{10} = 13{,}6.$$

За формулами (2.13) обчислимо коефіцієнти лінійної регресії

$$a_1 = \frac{10 \cdot 435{,}30 - 136 \cdot 28{,}9}{10 \cdot 99{,}41 - 835{,}21} = 2{,}660 ;$$

$$a_0 = 0{,}1 \cdot (136 - 2{,}660 \cdot 28{,}9) = 5{,}913.$$

Таким чином, шукана регресійна залежність має вигляд

$$y^p = 5{,}913 + 2{,}660\,x. \qquad (2.14)$$

Нахил лінії регресії $a_1 = 2{,}66$ хвилин на милю - це кількість хвилин, що припадає на одну милю відстані. Координата точки перетину прямої з віссю Y $a_0 = 5{,}913$ хвилин - це час, який не залежить від пройденої відстані, а обумовлюється усіма іншими можливими факторами, явно не врахованими при аналізі.

За формулою (2.12) обчислимо коефіцієнт детермінації

$$r^2 = \frac{112{,}424}{122{,}400} = 0{,}918 \text{ або } 91{,}8\%.$$

Таким чином, лінійна модель пояснює 91,8% варіації часу доставки. Не пояснюється $100\% - 91{,}8\% = 8{,}2\%$ варіації часу поїздки, які обумовлені іншими факторами, що впливають на час поставки, але не є включеними в лінійну модель регресії.

Оскільки коефіцієнт детермінації має досить високе значення і відстань 2 милі, для яких треба зробити прогноз, знаходиться в межах діапазону вихідних даних, то ми можемо використовувати отримане рівняння лінійної регресії для прогнозування

$$y^*(2\,милі) = 5{,}913 + 2{,}660 \cdot 2 = 11{,}2 \text{ хвилин.}$$

При прогнозах на відстані, що не входять в діапазон вихідних даних, не можна гарантувати справедливість моделі (2.14). Це пояснюється тим, що зв'язок між часом і відстанню може змінюватися в міру збільшення відстані. На час далеких перевезень можуть впливати нові чинники такі, як використання швидкісних шосе, зупинки на відпочинок, обід і т.п.

Приблизними, але самим простим і наочним способом перевірки задовільності регресійній моделі є графічне представлення відхилень (рис.2.15).

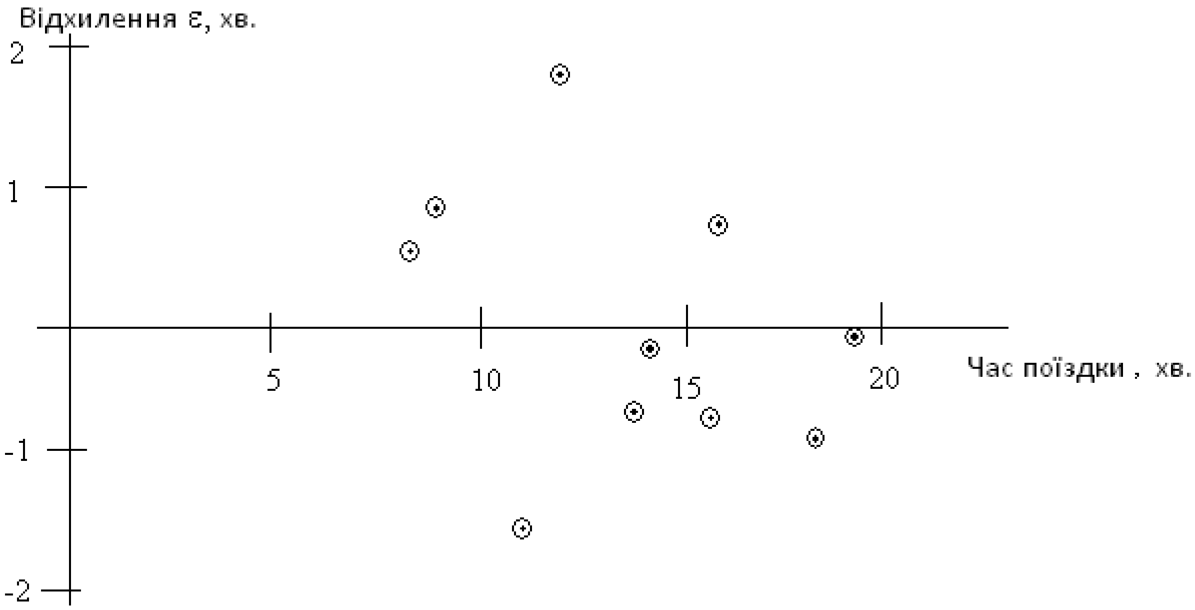


Рис.2.15. Графік відхилень в задачі №9.01

Відкладемо відхилення $\left(y_i^p - y_i\right)$ по осі Y, для кожного значення y_i. Якщо регресійна модель близька до реальної залежності, то відхилення будуть носити випадковий характер і їх сума буде близька до нуля. У розглянутому прикладі $\sum_{i=1}^{n}\left(y_i^p - y_i\right) = 0{,}004$.

2.5.3. Нелінійна регресія

Розглянемо найбільш прості випадки ***нелінійної*** регресії: гіперболу, експоненту і параболу. При знаходженні коефіцієнтів гіперболи та експоненти використовують прийом приведення нелінійної регресійної залежності до лінійного вигляду. Це дозволяє використовувати для обчислення коефіцієнтів функцій регресії формули (2.13).

Гіпербола

При знаходженні **гіперболи** $y = a_0 + \frac{a_1}{x}$ вводять нову змінну $z = \frac{1}{x}$, тоді рівняння гіперболи приймає лінійний вид $y = a_0 + a_1 z$. Після цього використовують формули (1.13) для знаходження лінійної функції, але замість значень x_i використовуються значення $z_i = \frac{1}{x_i}$

$$a_1 = \frac{n\left(\sum y_i z_i\right) - \sum y_i \sum z_i}{n\left(\sum z_i^2\right) - \left(\sum z_i\right)^2}; \qquad a_0 = \frac{1}{n}\left(\sum y_i - a_1 \sum z_i\right).$$

При проведенні обчислень в допоміжну таблицю вносяться відповідні колонки.

Експонента

Для приведення до лінійного вигляду **експоненти** $y = a_0 e^{a_1 x}$ проведемо логарифмування

$$\ln y = \ln\left(a_0 e^{a_1 x}\right);$$
$$\ln y = \ln a_0 + \ln\left(e^{a_1 x}\right);$$
$$\ln y = \ln a_0 + a_1 x.$$

Введемо змінні $b_0 = \ln a_0$ і $b_1 = a_1$, тоді $\ln y = b_0 + b_1 x$, звідки слідує, що можна застосовувати формули (2.13), в яких замість значень y_i треба використовувати $\ln y_i$

$$b_1 = \frac{n\left(\sum [\ln y_i]\, x_i\right) - \sum \ln y_i \sum x_i}{n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}; \qquad b_0 = \frac{1}{n}\left(\sum \ln y_i - b_1 \sum x_i\right).$$

При цьому ми отримаємо чисельні значення коефіцієнтів b_0 і b_1, від яких треба перейти до a_0 і a_1, що використовуються в моделі експоненти. Виходячи з введених позначень і визначення логарифма, отримуємо

$$a_0 = e^{b_0},\ a_1 = b_1.$$

Парабола

Для знаходження коефіцієнтів **параболи** $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ необхідно розв’язати лінійну систему з трьох рівнянь

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + \left(\sum x_i\right) a_1 + \left(\sum x_i^2\right) a_2 = \sum y_i, \\ \left(\sum x_i\right) a_0 + \left(\sum x_i^2\right) a_1 + \left(\sum x_i^3\right) a_2 = \sum \left(y_i x_i\right), \\ \left(\sum x_i^2\right) a_0 + \left(\sum x_i^3\right) a_1 + \left(\sum x_i^4\right) a_2 = \sum \left(y_i x_i^2\right). \end{cases}$$

Оцінка сили нелінійного регресійного зв'язку

Сила регресійного зв'язку для гіперболи і параболи визначається безпосередньо за формулою (2.12). При обчисленні коефіцієнта детермінації експоненти всі значення параметра Y (вихідне, регресійне, середнє) необхідно замінити на їх логарифми, наприклад, y_i^p – на $\ln\left(y_i^p\right)$ і т.д.

Завдання для самоперевірки та контролю засвоєння знань

Задача №1

Побудуйте регресійні моделі (лінійну, гіперболу, експоненту, параболу) для наступних вихідних даних (табл.). Для полегшення розрахунків вихідні дані містять тільки чотири пари значень (x_i, y_i).

Таблиця 1

Вихідні дані задачі №1

X	1	2	3	4
Y	30	7	8	1

Перевірте розрахунковим способом задоволеність моделей і зробіть прогноз для $x^* = 1,6$.

Задача №2

Побудуйте регресійні моделі (лінійну, гіперболу, експоненту, параболу) для наступних вихідних даних (табл.2). Для полегшення розрахунків вихідні дані містять тільки чотири пари значень (x_i, y_i).

Таблиця 2

Вихідні дані задачі № 2

X	1	2	3	4
Y	13	4	10	6

Перевірте розрахунковим способом задоволеність моделей і зробіть прогноз для $x^* = 3,4$.

Задача № 3

Для вихідних даних, представлених в табл.3, були побудовані наступні регресійні моделі:

- $y = 6,067 - 0,085x$;
- $y = 6,78 - \dfrac{4,029}{x}$;
- $y = -2,017 + 3,957x - 0,367x^2$;
- $y = 5,918e^{-0,043x}$.

Таблиця 3

Вихідні дані задачі № 3

X	3	8	5	10	7	6	4	9	1	2
Y	6	5	9	1	8	9	8	4	2	4

За допомогою графіка відхилень виберіть задовільну модель і перевірте свій вибір за допомогою відповідного розрахунку.

Задача №4

У табл.4 представлені дані про ціни на комплектуючі для ПЕОМ. Комплектуючі виробляються різними компаніями-виробниками та розбиті на групи за своїми функціональними можливостями.

Таблиця 4

Вихідні дані задачі № 4

Группа	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4
Цена, $	50	60	70	80	95	100	115	120	105	120
130	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7
Цена, $	130	110	150	190	120	130	220	145	265	270

Побудуйте графік вихідних даних і з його допомогою проаналізуйте застосовність методу найменших квадратів. Підтвердьте свої висновки за допомогою розрахунку (для лінійної моделі). Прокоментуйте економічні причини отриманого результату.

Задача № 5

Санаторний комплекс щомісяця укладає з пекарнею договір на випічку хліба сорту C_1. Щоб повністю використовувати свої виробничі потужності пекарня випікає також хліб сорту C_2, який пускає у вільний продаж. У табл.5 наведено дані про обсяги випуску хліба пекарнею за останній рік. Для полегшення розрахунків числові дані - умовні.

Таблиця 5

Обсяги випуску хліба [тис. шт.] в задачі № 5

Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_1	1	2,3	1,5	0,5	4	5	2	3,5	1	4,5	2,5	1,5
C_2	9	6,5	8,1	8,7	4	0,2	7,6	5	8,7	2	7	8,4

Проаналізуйте графік вихідних даних і побудуйте регресійну модель *функції виробничих можливостей* пекарні. Перевірте задоволеність моделі і зробіть прогноз обсягу випуску хліба C_2, якщо санаторний комплекс зробить замовлення хліба C_1 - 3000 булок.

Примітка. **Функція виробничих можливостей** показує залежність обсягів випуску товарів 1 і 2 при фіксованому значенні праці і капіталу.

2.6. *Методи змінного середнього і експоненціального згладжування*

2.6.1. Теоретичний вступ

Методи змінного середнього і експоненціального згладжування використовуються для прогнозування часових рядів. Формально **часовий ряд** - це множина пар даних (X,Y), в яких X - це моменти або періоди часу (незалежна змінна), а Y - параметр (залежна змінна), що характеризує величину досліджуваного явища. Мета дослідження часових рядів полягає у ***виявленні тенденції*** зміни фактичних значень параметра Y в часі і ***прогнозуванні*** майбутніх значень Y. Модель, побудовану за ретроспективними даними можна використовувати при наявності ***усталеної тенденції*** в динаміці значень прогнозованого параметра. До можливих ситуацій порушення такої тенденції відносяться: докорінна зміна плану діяльності фірми, яка стала терпіти збитки; різка зміна параметрів внутрішньої чи зовнішньої ситуації (цін на сировину; рівня інфляції); стихійні лиха, військові дії, громадські заворушення.

Суть методів **змінного середнього і експоненціального згладжування** полягає в тому, що фактичні рівні досліджуваного часового ряду замінюються їх середніми значеннями, що погашають випадкові коливання. Це дозволяє більш чітко виділити основну тенденцію зміни досліджуваного параметра. Ці відносно прості методи прогнозування часових рядів, засновані на представленні прогнозу y^*_{t+1} у вигляді суми m попередніх спостережуваних значень y_{t-i} $(i = \overline{1, m-1})$, причому кожне з них враховується з певним ваговим коефіцієнтом β_t

$$y^*_{t+1} = \beta_t y_t + \beta_{t-1} y_{t-1} + \ldots \beta_{t-m+1} y_{t-m+1}.$$

Використання методів змінного середнього і експоненціального згладжування засноване на наступних припущеннях:

- часовий ряд є ***стійким*** у тому сенсі, що його елементи є реалізаціями наступного випадкового процесу:

$$y_t = b + \varepsilon_t,$$

де b – невідомий постійний параметр, ε_t – випадкова помилка.

- Випадкова помилка ε_t має нульове математичне сподівання і постійну дисперсію;
- дані для різних періодів часу не є корелірованими.

Метод змінного середнього

Розрахунок прогнозу і згладжування часового ряду **методом змінного середнього** здійснюється за формулою

$$y^*_{t+1} = \frac{y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-m+1}}{m}. \tag{2.15}$$

При цьому передбачається, що всі m значень y_{t-i} за m моментів часу вносять рівний внесок в прогнозоване значення y^*_{t+1} та враховуються з однаковим ваговим коефіцієнтом $\frac{1}{m}$.

Метод експоненціального згладжування

У **методі експоненціального згладжування** вагові коефіцієнти попередніх спостережуваних значень збільшуються в міру наближення до останніх (за часом) даних. Крім того, у формуванні прогнозованого значення беруть участь всі n відомих значень y_{t-i} $(i=\overline{1, n-1})$ часового ряду

$$y^*_{t+1} = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-1} + \ldots \qquad (2.16)$$

Для розрахунку прогнозу і для згладжування часового ряду методом експоненціального згладжування використовують формулу (10.2) у вигляді

$$y^*_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)y^*_t, \qquad (2.17)$$

де $\alpha \in (0, 1)$ – **константа згладжування**. Таким чином, значення y^*_{t+1} можна обчислити рекурентно на підставі значення y^*_t.

2.6.2. Методичні рекомендації

Задача №2.9

Побудуйте і проаналізуйте графік часового ряду, представленого в табл. з погляду застосовності методів змінного середнього і експоненціального згладжування.

t	1	2	3	4	5	6	7
y_t, тыс. шт.	46	50	48	53	51	52	57

Зробіть прогноз для t = 8 методом змінної середньої для m = 4; методом експоненціального згладжування для α=0,6.

Розв'язок

Графік вихідного часового ряду представлений на рис.2.16.

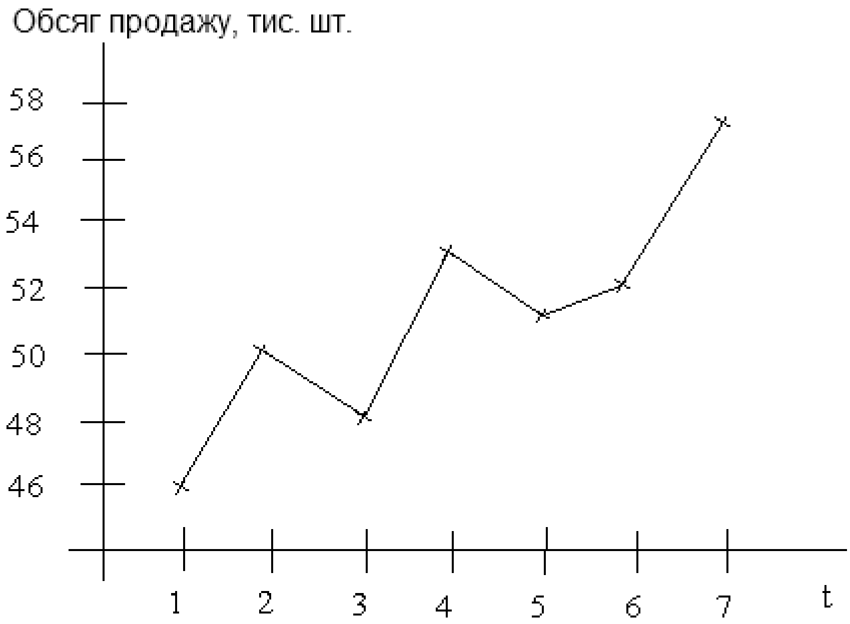


Рис.2.16.Графік часового ряду задачі №10.01

З графіка видно, що спостерігається явна тенденція до зростання значень часового ряду y_t, що призведе до неточності в прогнозах, виконаних методами змінного середнього і експоненціального згладжування (це випливає з припущень методів), до придушення цієї тенденції.

Для прогнозування методом змінного середнього досить виконати єдиний розрахунок

$$y^*_{8(m=4)} = \frac{53+51+52+57}{4} = 53,250 \text{ [тис. шт.]}.$$

Для прогнозування методом експоненціального згладжування необхідно провести розрахунки для всіх моментів часу, за винятком t=1:

$$y^*_{2(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 46 + 0,4 \cdot 46 = 46,000;$$

$$y^*_{3(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 50 + 0,4 \cdot 46 = 48,400;$$

$$y^*_{4(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 48 + 0,4 \cdot 48,400 = 48,160;$$

$$y^*_{5(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 53 + 0,4 \cdot 48,160 = 51,064;$$

$$y^*_{6(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 51 + 0,4 \cdot 51,064 = 51,026;$$

$$y^*_{7(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 52 + 0,4 \cdot 51,026 = 51,610;$$

$$y^*_{8(\alpha=0,6)} = 0,6 \cdot 57 + 0,4 \cdot 51,610 = 54,844 \text{ [тис. шт.].}$$

Не існує чіткого правила для вибору числа членів змінної середньої m або параметра експоненціального згладжування α. Вони визначаються статистикою досліджуваного процесу. Чим менше m і чим більше α, тим сильніше реагує прогноз на коливання часового ряду, і навпаки, чим більше m і чим менше α, тим більш інерційним є процес прогнозування. На практиці величина n звичайно приймається в межах від 2 до 10, а α - в межах від 0,01 до 0,30. При наявності достатнього числа елементів часового ряду значення m і α, прийнятне для прогнозу, можна визначити наступним чином:

- задати кілька попередніх значень m (α);
- згладити часовий ряд, використовуючи кожне задане значення m (α);
- обчислити середню помилку прогнозування як середнє абсолютне відхилення (mean absolut deviation – MAD)

$$\mathrm{MAD} = \frac{\sum_t \left| y_t - y_t^* \right|}{n}; \qquad (2.16)$$

- вибрати значення m (α), відповідне мінімальній помилці.

Завдання для самоперевірки та контролю засвоєння знань

Задача №1

У табл.1 наведено дані про попит на деякий товар за минулі два роки.

Таблиця 1

Обсяг попиту на товар

Місяць t	Попит y_t, тис. шт.	Місяць t	Попит y_t, тис.шт.
1	46	13	54
2	56	14	42
3	54	15	64
4	43	16	60
5	57	17	70
6	56	18	66
7	67	19	57
8	62	20	55

9	50	21	52
10	56	22	62
11	47	23	70
12	56	24	72

Побудуйте і проаналізуйте графік часового ряду з погляду застосовності методів змінного середнього і експоненціального згладжування. На підставі аналізу графіка виберіть найбільш прийнятне значення:

1) m із m=4 і m=8;
2) α із α =0,05 і α =0,3.

Зробіть прогноз попиту на наступний місяць методом змінного середнього і експоненціального згладжування.

Задача №2

У табл. 2 містяться дані за десятирічний період про кількість людей (Y), що відвідали туристичну зону на повітряному транспорті.

Таблиця 2

Вихідні дані задачі №.2

Год	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Y, тыс. чел.	500	522	540	612	715	790	840	900	935	980

Проаналізуйте ці дані з погляду застосовності методів змінного середнього і експоненціального згладжування. Виберіть прийнятне на вашу думку значення m і α, зробіть прогноз на 2013 р.

2. 7. Управління запасами

2. 7.1. Основні моделі управління запасами

2.7.1.1. Модель Уілсона

Математичні моделі управління запасами (УЗ) дозволяють знайти оптимальний рівень запасів деякого товару, здатний мінімізувати сумарні витрати на покупку, оформлення та доставку замовлення, зберігання товару, а також збитки від його дефіциту. **Модель Уілсона** є найпростішою моделлю УЗ і описує ситуацію закупівлі продукції у зовнішнього постачальника, яка характеризується наступними *припущеннями*:

- інтенсивність споживання є апріорно відомою і постійною величиною;
- замовлення доставляється зі складу, на якому зберігається раніше вироблений товар;
- час поставки замовлення є відомою і постійною величиною;
- кожне замовлення поставляється у вигляді однієї партії;
- витрати на здійснення замовлення не залежать від розміру замовлення;
- витрати на зберігання запасу пропорційні його розміру;
- відсутність запасу (дефіцит) є неприпустимим.

Вхідні параметри моделі Уілсона

1) ν – інтенсивність (швидкість) споживання запасу, [од.тов./од.t];

2) s – витрати на зберігання запасу, [$грн./од.тов.\cdot од.t$];

3) K – витрати на здійснення замовлення, що включає оформлення і доставку замовлення, [грн.];

4) $t_Д$ – час доставки замовлення, [од.t].

Вихідні параметри моделі Уілсона

1) Q – розмір замовлення, [од.тов.];

2) L – загальні витрати на управління запасами за одиницю часу, [грн./од.t];

3) τ – період поставки, тобто час між подачами замовлення або між поставками, [од.t];

4) h_0 – **точка замовлення**, тобто розмір запасу на складі, при якому треба подавати замовлення на доставку чергової партії, [од.тов.].

Цикли зміни рівня запасу в моделі Уілсона графічно представлені на рис.2.18. Максимальна кількість продукції, яка знаходиться в запасі, збігається з розміром замовлення Q.

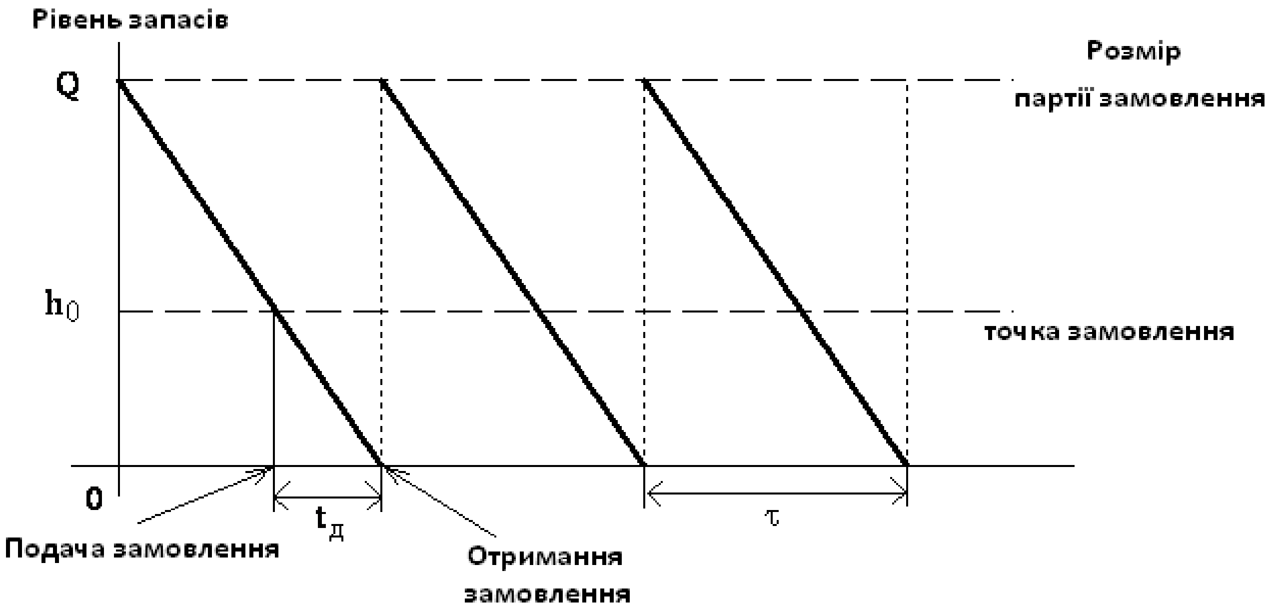


Рис.2.18. Графік циклів зміни запасів у моделі Уілсона

Формули моделі Уілсона

$$Q_W = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} \quad \text{(формула Уілсона),} \qquad (2.15)$$

де Q_w – оптимальний розмір замовлення в моделі Уілсона;

$$L = K \cdot \frac{\nu}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2};$$

$$\tau = \frac{Q}{\nu};$$

$$h_0 = \nu t_д .$$

Графік витрат на УЗ в моделі Уілсона представлений на рис.2.19

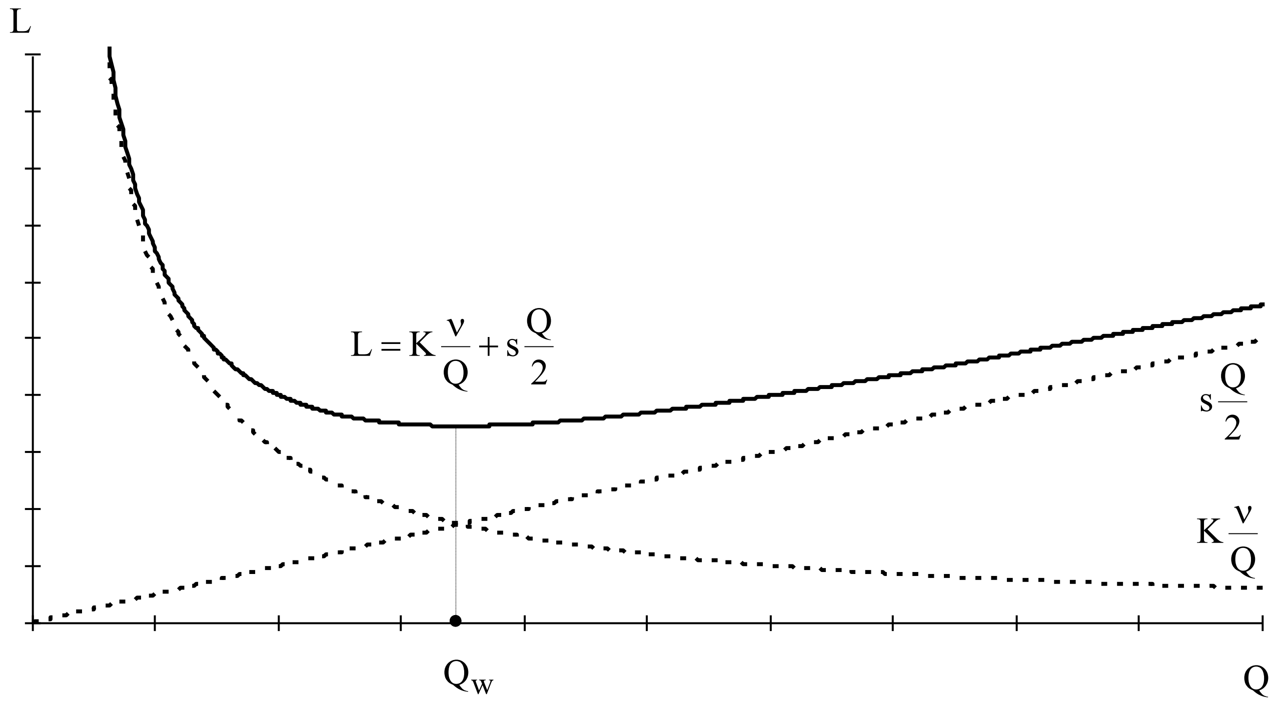


Рис.2.19. Графік витрат на УЗ в моделі Уілсона

2.9.1.2. Модель планування економічного розміру партії

Модель Уілсона, використовувану для моделювання процесів закупівлі продукції у зовнішнього постачальника, можна модифікувати і застосовувати у випадку власного виробництва продукції. На рис.2.20 схематично представлений деякий виробничий процес. На першому верстаті проводиться партія деталей з інтенсивністю λ деталей за одиницю часу, які використовуються на другому верстаті з інтенсивністю ν [дет./од.t].

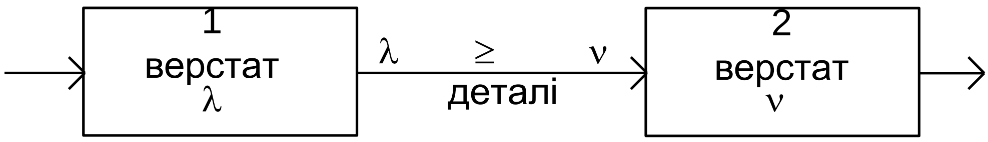


Рис.2.20. Схема виробничого процесу

Вхідні параметри моделі планування економічного розміру партії

1) λ – інтенсивність виробництва продукції першим верстатом, [од.тов./од.t];

2) ν – інтенсивність споживання запасу, [од.тов./од.t];

3) s – витрати на зберігання запасу, [$грн./од.тов.\cdot од.t$];

4) K – витрати на здійснення замовлення, що включають підготовку (переналагодження) першого верстата для виробництва продукції, споживаної на другому верстаті, [грн.];

5) $t_п$ – час підготовки виробництва (переналагодження), [од.t].

Вихідні параметри моделі планування економічного розміру партії

1) Q – розмір замовлення, [од.тов.];

2) L – загальні витрати на управління запасами за одиницю часу, [грн./од.t];

3) τ – період запуску у виробництво партії замовлення, тобто час між включеннями в роботу першого верстата, [од.t];

4) h_0 – точка замовлення, тобто розмір запасу, при якому треба подавати замовлення на виробництво чергової партії, [од.тов.].

Зміна рівня запасів відбувається наступним чином (рис.2.21):

- протягом часу t_1 працюють обидва верстата, тобто продукція виробляється і споживається одночасно, внаслідок чого запас накопичується з інтенсивністю $(\lambda - \nu)$;
- протягом часу t_2 працює тільки другий верстат, споживаючи запас, що накопичився, з інтенсивністю ν.

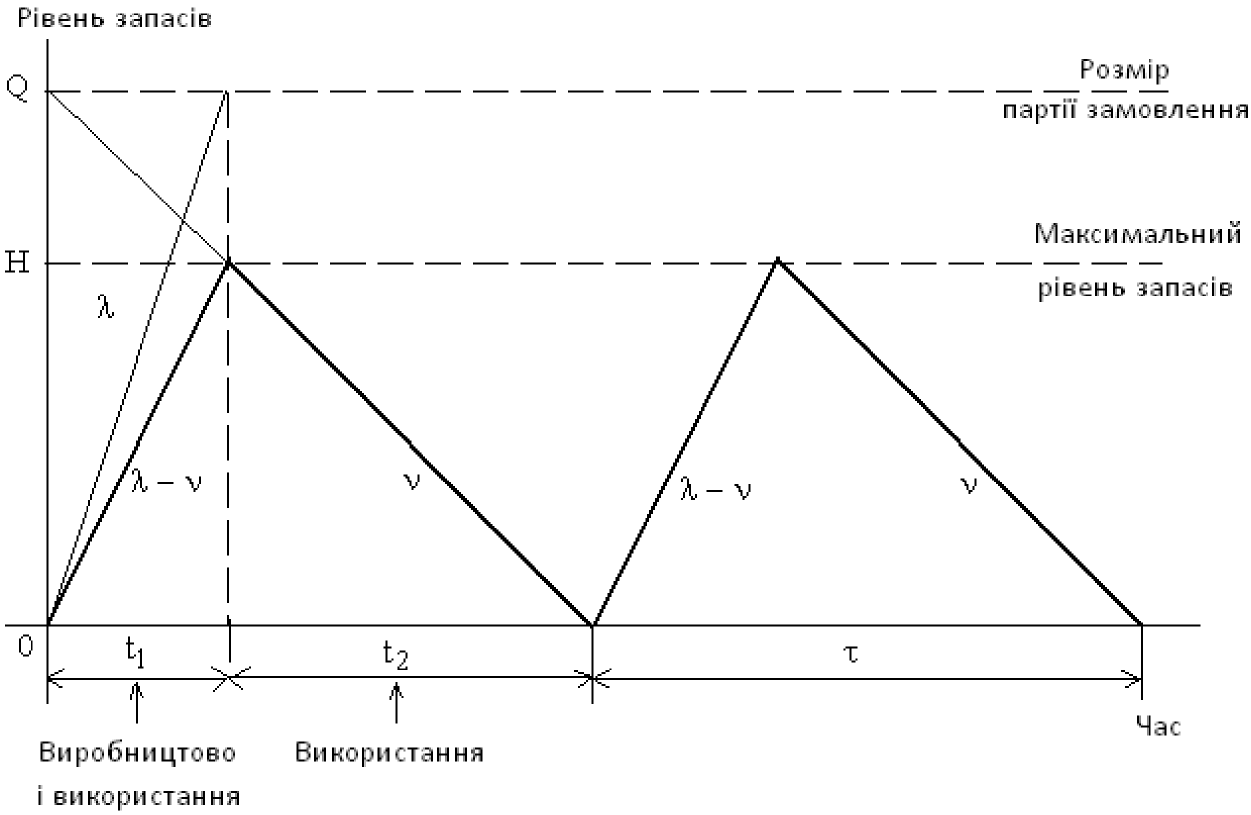


Рис.2.21. Графік циклів зміни запасів в моделі планування економічного розміру партії

Формули моделі економічного розміру партії

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\nu\lambda}{s(\lambda - \nu)}} \text{ або } Q^* = \sqrt{\frac{2K\nu}{S(1 - \nu/\lambda)}},$$

де * – означає оптимальність розміру замовлення;

$$L = K\frac{\nu}{Q} + s\frac{Q(\lambda-\nu)}{2\lambda} \text{ або } L = K\frac{\nu}{Q} + \frac{sQ(1-\nu/\lambda)}{2};$$

$$H = \frac{Q(\lambda-\nu)}{\lambda} \text{ або } H = Q(1-\nu/\lambda);$$

$$\tau = \frac{Q}{\nu}; \qquad h_0 = \nu t_п .$$

Основна складність при розв'язку задач по УЗ полягає в правильному визначенні вхідних параметрів задачі, оскільки не завжди в умові їх числові величини задаються в явному вигляді. При використанні формул моделі УЗ необхідно уважно стежити за тим, щоб всі використовувані у формулі числові величини були узгоджені по одиницям виміру. Так, наприклад, обидва параметри s і ν повинні бути приведені до одних і тих же тимчасових одиниць (до днів, до змін або до років), параметри K і s повинні вимірюватися в одних і тих же грошових одиницях і т.д.

Задача 2.12

Обсяг продажу деякого магазину складає в рік 500 упаковок супу в пакетах. Величина попиту рівномірно розподіляється протягом року. Ціна покупки одного пакета дорівнює 2 грн. За доставку замовлення власник магазину повинен заплатити 10 грн. Час доставки замовлення від постачальника складає 12 робочих днів (при 6-денному робочому тижні). За оцінками фахівців, витрати зберігання на рік становлять 40 коп. за один пакет. Необхідно визначити: скільки пакетів повинен замовляти власник магазину для однієї поставки; частоту замовлень; точку замовлення. Відомо, що магазин працює 300 днів у році.

Розв'язок

Приймемо за одиницю часу рік, тоді $\nu = 500$ шт. пакетів на рік, $K = 10$ грн., $s = 0{,}4$ *грн./шт.·рік*. Оскільки пакети супу замовляються зі складу постачальника, а не виробляються самостійно, то будемо використовувати модель Уілсона.

$$Q_W = \sqrt{\frac{2K\nu}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 500}{0{,}4}} = 158{,}11 \approx 158 \text{ штук.}$$

Оскільки число пакетів має бути цілим, то будемо замовляти по 158 штук. При розрахунку інших параметрів задачі будемо використовувати не $Q^* = 158{,}11$, а Q=158. Річні витрати на УЗ рівні

$$L = K \cdot \frac{\nu}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2} = 10 \cdot \frac{500}{158} + 0{,}4 \cdot \frac{158}{2} = 63{,}25 \text{ грн. на рік.}$$

Подача кожного нового замовлення повинна проводитися через

$$\tau = \frac{Q}{v} = \frac{158}{500} = 0{,}316 \text{ р.}$$

Оскільки відомо, що в даному випадку рік дорівнює 300 робочих днів, то

$$\tau = 0{,}316 \ р. \cdot 300 \ \frac{роб.днів}{р.} = 94{,}8 \approx 95 \text{ робочих днів.}$$

Замовлення слід подавати при рівні запасу, рівному

$$h_0 = \nu T_Д = \frac{500}{300} \cdot 12 = 20 \text{ пакетів,}$$

тобто ці 20 пакетів будуть продані протягом 12 днів, поки буде доставлятися замовлення.

Задача 2.13

На деякому верстаті виробляються деталі в кількості 2000 штук на місяць. Ці деталі використовуються для виробництва продукції на іншому верстаті з інтенсивністю 500 шт. на місяць. За оцінками фахівців компанії, витрати зберігання складають 50 коп. на рік за одну деталь. Вартість виробництва однієї деталі дорівнює 2,50 грн., а вартість на підготовку виробництва становить 1000 грн. Яким має бути розмір партії деталей, виробленої на першому верстаті, з якою частотою слід запускати виробництво цих партій?

Розв'язок

$K = 1000$ грн., $\lambda = 2000$ шт. на місяць або 24000 шт. на рік, $\nu = 500$ шт. на місяць або 6000 шт. на рік, $s = 0{,}50$ грн. на рік за деталь. У даній ситуації необхідно використовувати модель планування економічного розміру партії.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2K\nu\lambda}{s(\lambda - \nu)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 6000 \cdot 24000}{0{,}50(24000 - 6000)}} = 5656{,}9 \approx 5657 \text{ шт.}$$

Частота запуску деталей у виробництво дорівнює

$$\tau = \frac{Q}{v} = \frac{5657}{6000} = 0{,}94 \text{ року або } 11{,}28 \text{ місяців.}$$

Загальні затрати на УЗ складають

$$L = K\frac{\nu}{Q} + s\frac{Q(\lambda - \nu)}{2\lambda} = \frac{1000 \cdot 6000}{5657} + \frac{0{,}50 \cdot 5657 \cdot 18000}{2 \cdot 24000} = 2121{,}32 \text{ грн.. в год.}$$

2.7.2. Модель управління запасами, що враховує знижки

Рівняння загальних витрат для ситуації, коли враховуються витрати на купівлю товару, має вигляд

$$L = K\frac{\nu}{Q} + s\frac{Q}{2} + c\nu \ [\text{грн./од.t}], \tag{2.19}$$

де c – ціна товару [грн./од.тов.]; $c\nu$ – витрати на купівлю товару за одиницю часу [грн./од.t]. Якщо ціна закупівлі складованого товару постійна і не залежить від Q, то її включення в рівняння загальних витрат призводить до переміщення графіка цього рівняння паралельно осі Q і не змінює його форми (див. рис.2.22). Тобто в разі постійної ціни товару її облік не змінює оптимального розв’язку Q_w.

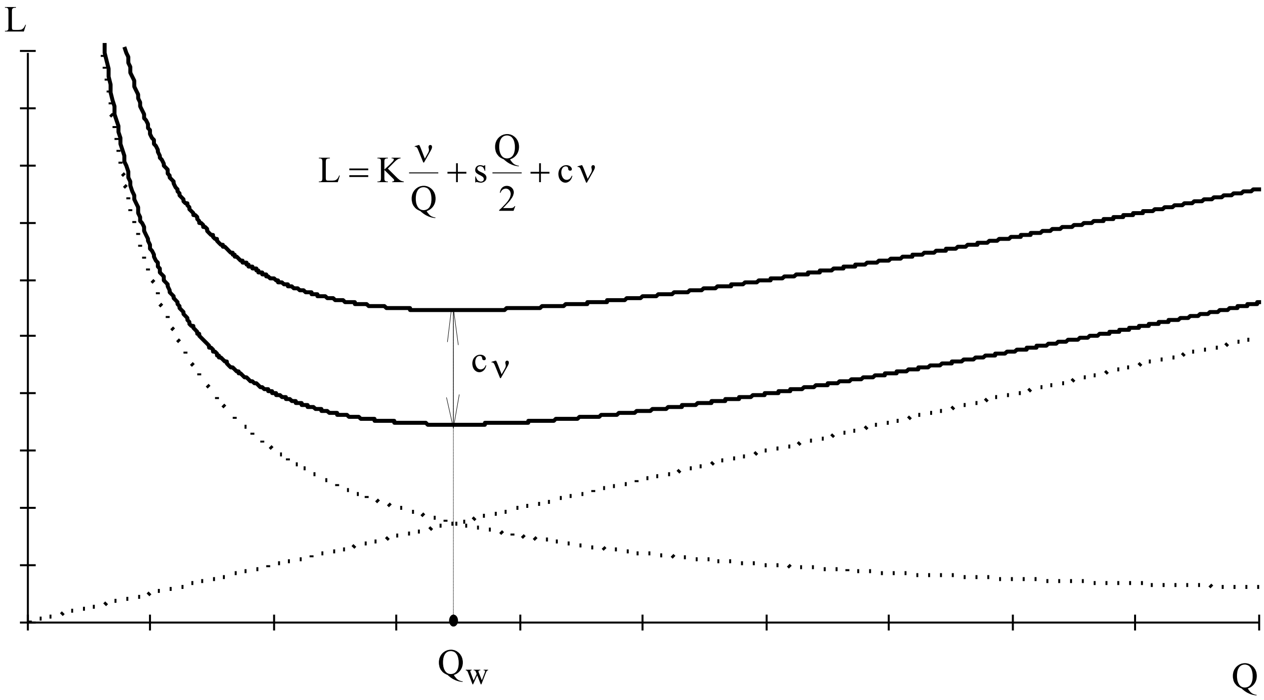


Рис.2.22. Графік витрат на УЗ з урахуванням витрат на покупку

Якщо на замовлення великого обсягу надаються знижки, то замовлення на більш великі партії спричинять за собою збільшення витрат на зберігання, але це збільшення може бути компенсоване зниженням закупівельної ціни. Таким чином, оптимальний розмір замовлення може змінюватися в порівнянні з ситуацією відсутності знижок. Тому витрати на придбання товару необхідно враховувати в моделі покупок зі знижками.

Нові вхідні параметри моделі, що враховує знижки

1) Q_{p1}, Q_{p2} – **точки розриву цін,** тобто розміри покупок, при яких починають діяти відповідно перша і друга знижки, [од.тов.];

2) c, c_1, c_2 – відповідно вихідна ціна, ціна з першою знижкою, ціна з другою знижкою, [грн./од.тов.].

Вплив єдиної знижки на загальні витрати на УЗ показано на рис.2.23.

Щоб визначити оптимальний розмір замовлення Q^*, необхідно проаналізувати, в яку з трьох областей потрапляє точка розриву ціни Q_{p1} (див. рис.1.21). Правило вибору Q^* для випадку з однією знижкою має вигляд:

$$Q^* = \begin{cases} Q_w, \ якщо \ 0 \le Q_{p_1} < Q_w & (область \ I), \\ Q_{p_1}, \ якщо \ Q_w \le Q_{p_1} < Q_1 & (область \ II), \\ Q_w, \ якщо \ Q_{p_1} \ge Q_1 & (область \ III). \end{cases} \tag{2.20}$$

Правильність розв’язку задач з УЗ зі знижками в великій мірі визначається *якісно побудованим графіком* загальних витрат із зазначенням на графіку всіх параметрів, використовуваних при розв’язку. Тому в першу чергу необхідно аналізувати ситуацію графічно і тільки після цього проводити чисельні обчислення. Наприклад, якщо уважно проаналізувати ситуації на рис.2.24, то можна приймати розв’язок без безпосереднього використання правила (2.20). Візуально легко визначити більш "вигідний" обсяг замовлення, знайшовши точку, координата якої по осі L лежить нижче інших варіантів замовлень.

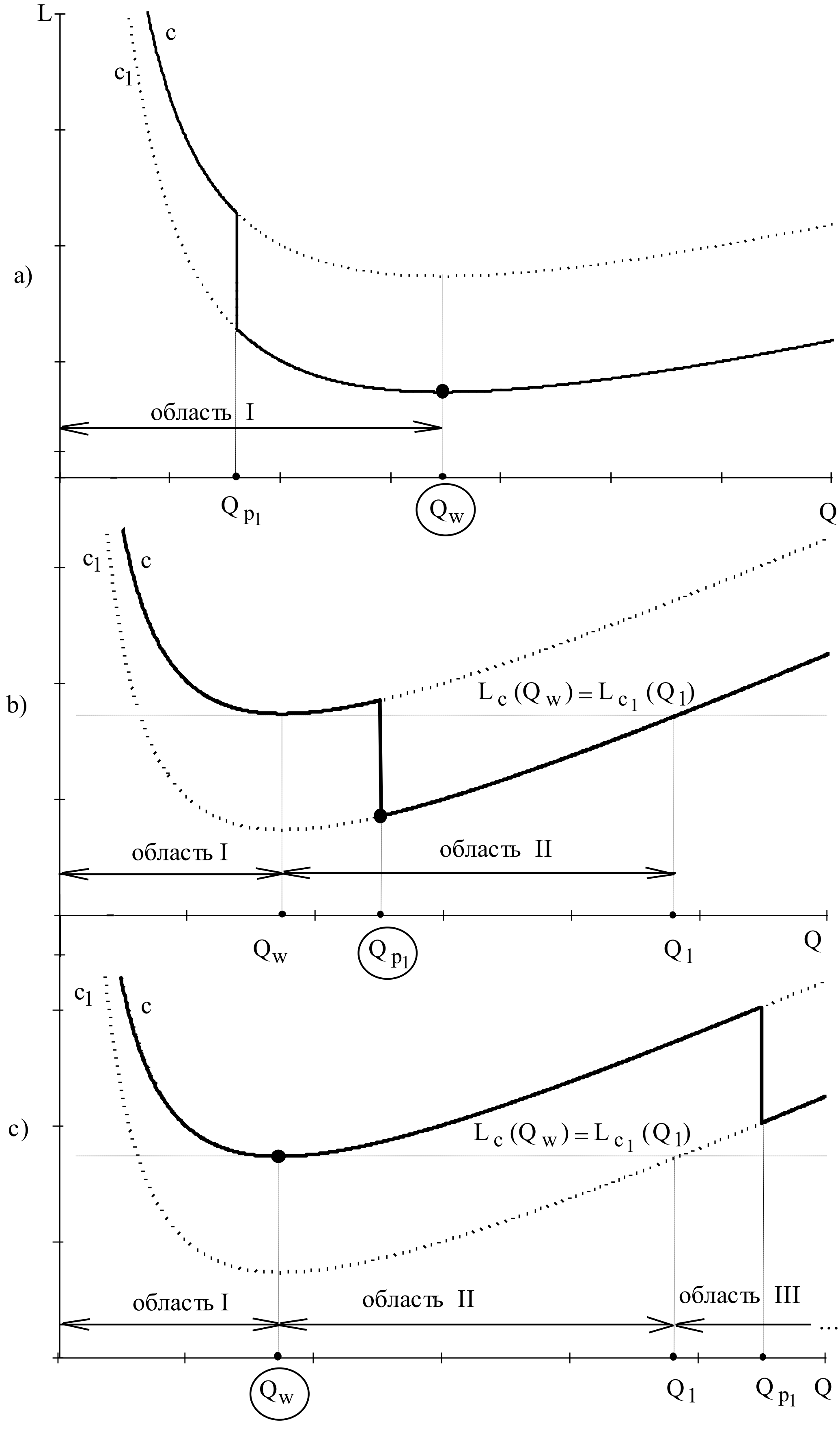

L
c
c_1
a)
область I
Q_{p_1}
Q_w
Q
c_1
c
b)
$L_c(Q_w) = L_{c_1}(Q_1)$
область I
область II
Q_w
Q_{p_1}
Q_1
Q
c_1
c
c)
$L_c(Q_w) = L_{c_1}(Q_1)$
область I
область II
область III
...
Q_w
Q_1
Q_{p_1}
Q

Рис.2.24. Графік витрат з урахуванням знижок: a) $Q^* = Q_w$; b) $Q^* = Q_{p_1}$; c) $Q^* = Q_w$

При розв'язку задач з двома знижками спочатку знаходиться оптимальний обсяг замовлення з урахуванням першої знижки, а потім розглядається друга знижка, тобто обидві підзадачі розв'язуються за правилом (2.20).

Задача 2.14

Нехай витрати на замовлення дорівнюють 10 грн., витрати на зберігання продукції 1 грн. на добу, інтенсивність споживання товару 5 шт. в день, ціна товару - 2 грн. за штуку, а при обсязі закупівлі 15 шт. і більше - 1 грн. Визначте оптимальний розмір замовлення, ціну покупки і витрати на УЗ.

Розв'язок

Починаємо розв'язок з приблизної побудови пунктирними лініями графіків двох функцій загальних витрат, що відповідають двом цінами, які вказуємо над відповідними лініями витрат: $c = 2$ грн./шт. і $c_1 = 1$ грн./шт. (рис.2.25).

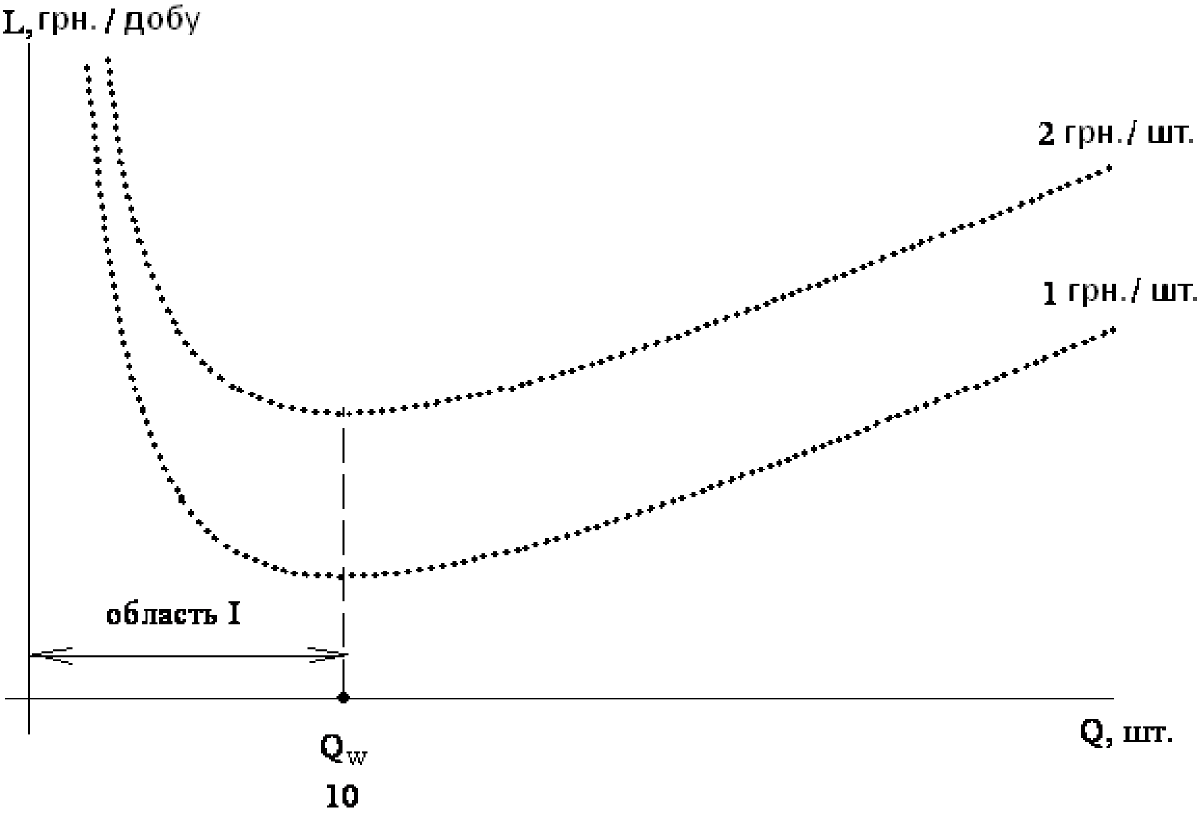


Рис.2.25. Загальні витрати на УЗ до задачі 2.14

Оскільки обсяг замовлення, що задається формулою Уілсона, легко визначається візуально як точка мінімуму обох функцій, то без попередніх обчислень *графічно* знаходимо обсяг Уілсона Q_w і відзначаємо його на графіку.

Тільки після цього, використовуючи параметри $K = 10$ грн., $\nu = 5$ шт. в день, $s = 1$ грн. за 1 шт. на добу, обчислюємо значення Q_w в *підписуємо його на графіку під позначенням* Q_w.

$$Q_W = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 5}{1}} = 10 \text{ [шт.]}.$$

Очевидно, що в область I $Q_{p1} = 15$ шт. не потрапляє, тому що $Q_{p1} > Q_w$. Таким чином, Q_{p1} може потрапити в області II або III. Межею між цими областями служить розмір замовлення Q_1, що зрівнює загальні витрати при ціні зі знижкою 1 грн./шт. і витрати при замовленні Q_W по вихідній ціні 2 грн./шт. Спочатку будуємо Q_1 *графічно* (рис.2.25).

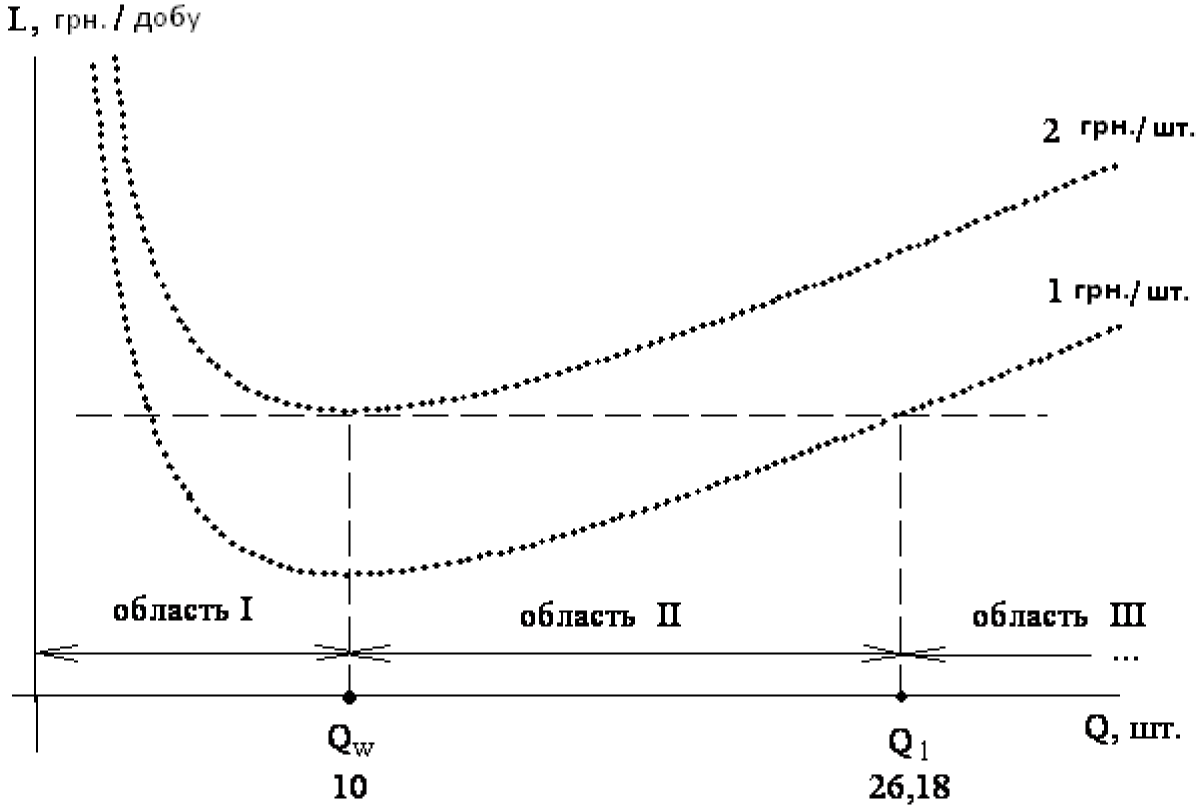


Рис.2.25. Побудова Q_1 на графіку загальних витрат УЗ

Тільки після цього знайдемо Q_1 чисельно. Використовуючи рис.2.26 запишемо вираз, що показує рівність витрат,

$$L_c(Q_W) = L_{c_1}(Q_1), \tag{2.21}$$

з чисельними значеннями параметрів:

$$L_{2\,грн./шт.}(10) = L_{1\,грн./шт.}(Q_1).$$

Після використання (2.18) для розкриття лівої і правої частин (2.21) отримуємо

$$L_{2грн.}(Q) = K \cdot \frac{\nu}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2} + c\nu = 10 \cdot \frac{5}{10} + 1 \cdot \frac{10}{2} + 2 \cdot 5 = 20 \text{ [грн./добу]},$$

$$L_{1грн.}(Q_1) = K \cdot \frac{\nu}{Q_1} + s \cdot \frac{Q_1}{2} + c_1\nu = 10 \cdot \frac{5}{Q_1} + 1 \cdot \frac{Q_1}{2} + 1 \cdot 5 = \frac{50}{Q_1} + \frac{Q_1}{2} + 5,$$

$$\frac{50}{Q_1} + \frac{Q_1}{2} + 5 = 20,$$

$$Q_1^2 - 30Q_1 + 100 = 0,$$

$$Q_1 = 26{,}18 \text{ шт. або } Q_1 = 3{,}82 \text{ шт.}$$

Завжди вибираємо більший з коренів $Q_1 = 26{,}18$, тому що менший за значенням корінь не дає нам інформації про кордон областей II і III (див. рис.2.23), і відзначаємо *чисельне значення* 26,18 на графіку.

Таким чином, точка розриву цін $Q_{p1} = 15$ потрапляє в область II, так як

$$10 \le 15 \le 26{,}18 \; (Q \le Q_{p1} \le Q_1).$$

Відзначимо цю точку на графіку в будь-якому місці області II (рис.2.26).

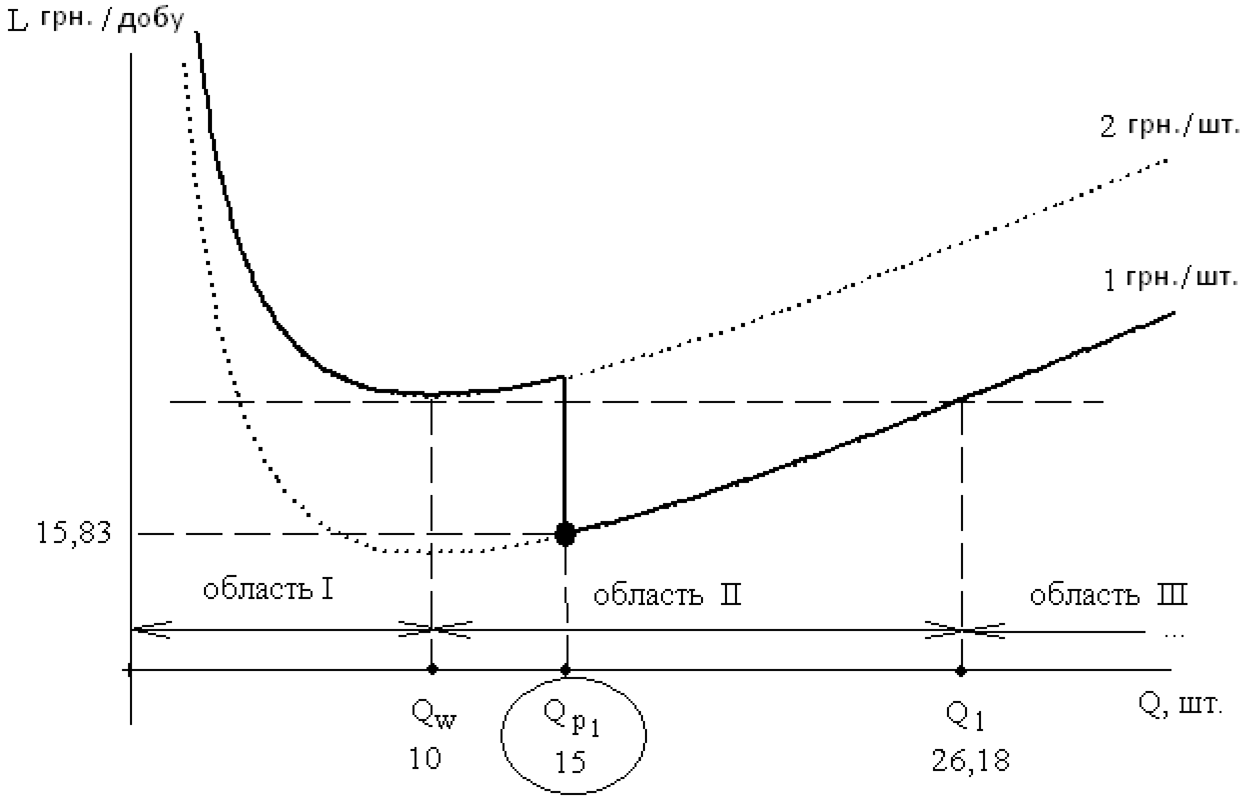


Рис.2.26. Оптимальний розв’язок задачі

Після цього *суцільною лінією* обведемо ті ділянки обох функцій витрат, які відповідають чинним цінами, тобто до обсягу $Q_{p1} = 15$ обведемо верхню лінію витрат, а після - нижню.

Згідно з правилом (2.20) і графіком (див. рис 2.26) оптимальним є обсяг замовлення $Q^{*} = 15$ шт. за ціною 1 грн./шт. Таким чином, в даній ситуації знижкою користуватися вигідно. Загальні витрати при цьому складають $L_1(15) = 10 \cdot \frac{5}{15} + 1 \cdot \frac{15}{2} + 1 \cdot 5 = 15{,}83$ [грн./добу]. Якби замовляли по 10 шт. товару, то загальні витрати склали б 20 грн., тобто при замовленні 15 шт. економія коштів становить 4,17 грн. на добу.

2.8. Побудова мережевих моделей

2.8.1. Теоретичний вступ

Побудова мережевої моделі (**структурне планування**) починається з розбиття проекту на чітко визначені роботи, для яких визначається тривалість. **Робота** - це певний процес, що приводить до досягнення певного результату, що вимагає витрат яких-небудь ресурсів і має протяжність у часі. За кількістю часу, що витрачається робота може бути:

- **дійсною**, тобто такою, що вимагає витрат часу;
- **фіктивною**, тобто такою, що формально не вимагає витрат часу.

Фіктивна робота може реально існувати, наприклад, "передача документів від одного відділу до іншого". Якщо тривалість такої роботи незрівнянно мала в порівнянні з тривалістю інших робіт проекту, то формально її приймають рівною 0. Існують фіктивні роботи, яким в реальності не відповідають ніякі дії. Такі фіктивні роботи тільки представляють зв'язок між іншими роботами мережевої моделі.

Роботи пов'язані один з одним таким чином, що виконання одних робіт може бути розпочате ***тільки після*** завершення деяких інших. **Подія** - це момент часу, коли завершуються одні роботи і починаються інші. Подія являє собою результат проведених робіт і, на відміну від робіт, не має протяжності в часі.

Взаємозв'язок робіт і подій, необхідних для досягнення кінцевої мети проекту, зображується за допомогою **мережевого графіка** (мережевої моделі). Роботи зображуються ***стрілками***, які з'єднують ***вершини***, що зображують події. Початок і закінчення будь-якої роботи описуються парою подій, які називаються **початковими** і **кінцевими** подіями. Тому для зазначення конкретної роботи використовують код роботи (i, j), що складається з номерів початкового (i-го) і кінцевого (j-го) подій (рис.2.27).

Рис.2.27. Кодування роботи

Будь-яка подія може вважатися такою, що наступила тільки тоді, коли закінчаться ***всі*** вхідні в неї роботи. Тому роботи, що виходять з деякої події, не можуть розпочатися, поки не будуть завершені ***всі*** роботи, що входять в цю подію. Подія, що не має попередніх їй подій, тобто з якої починається проект, називають **вихідною**. Подія, яка не має наступних подій і відображає кінцеву мету проекту, називається **завершальною**.

2.8.2. Методичні рекомендації з побудови мережевих моделей

При побудові мережевого графіка необхідно слідувати наступним правилам:

- довжина стрілки не залежить від часу виконання роботи;
- стрілка може не бути прямолінійним відрізком;
- для дійсних робіт використовуються суцільні, а для фіктивних - пунктирні стрілки;
- кожна операція повинна бути представлена тільки однією стрілкою;
- між одними і тими ж подіями не повинно бути **паралельних** робіт, тобто робіт з однаковими кодами;
- слід уникати перетину стрілок;
- не повинно бути стрілок, спрямованих справа наліво;
- номер початкової події повинен бути меншим номера кінцевої події;

- не повинно бути **висячих** подій (тобто таких, що не мають попередніх подій), крім вихідних;
- не повинно бути **тупикових** подій (тобто таких, що не мають наступних подій), крім завершальних;
- не повинно бути циклів (рис.2.28).

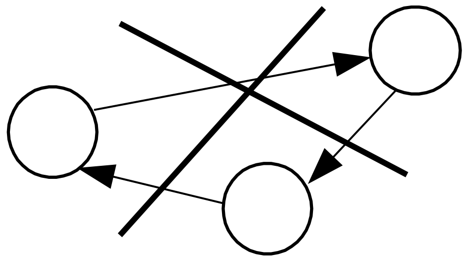


Рис.2.28. Неприпустимість циклів

Вихідні дані для побудови мережевої моделі можуть задаватися різними способами, наприклад,

- описом передбачуваного проекту. У цьому випадку необхідно самостійно розбити його на окремі роботи і встановити їх взаємні зв'язки;
- списком робіт проекту. У цьому випадку необхідно проаналізувати зміст робіт та встановити існуючі між ними зв'язки;
- списком робіт проекту із зазначенням їх упорядкування. У цьому випадку необхідно тільки відобразити роботи на мережевому графіку.

Побудову мережного графіка необхідно починати з виявлення *вихідних* робіт моделі. Якщо згідно з умовою деяка робота може виконуватися, не чекаючи закінчення яких-небудь інших робіт, то така робота є *вихідною* у мережевій моделі і її початковою подією є *вихідна* подія. Якщо вихідних робіт декілька, то їх стрілки виходять всі з однієї вихідної події.

Якщо, згідно з умовою, після закінчення деякої роботи не повинні виконуватися ніякі інші роботи, то така робота є *завершальною* роботою мережевої моделі та її кінцевою подією є *завершальна* подія. Якщо завершальних вихідних робіт декілька, то їх стрілки заходять всі в одну завершальну подію.

Якщо, згідно з умовою, кілька робіт мають загальну початкову і загальну кінцеву події, то вони є *паралельними*, мають однаковий код, що неприпустимо. Для усунення паралельності робіт вводять додаткову подію і фіктивну роботу (якій в реальності не відповідає ніяка дія) таким чином, щоб кінцеві події робіт розрізнялися (рис.2.29.).

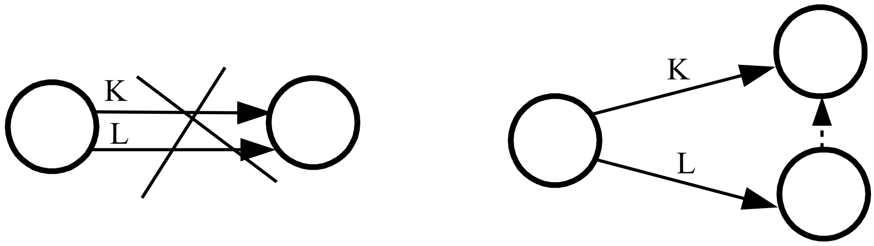


Рис.2.29. Усунення паралельності двох робіт

Задача №2.14

Побудуйте мережеву модель програми опитування громадської думки, яка включає розробку (A; 1 день) і роздруківку анкет (B; 0,5 дня), прийом на роботу (C; 2 дня) і навчання (D; 2 дні) персоналу, вибір опитуваних осіб (E; 2 дні), розсилку їм анкет (F; 1 день) і аналіз отриманих даних (G; 5 днів).

Розв'язок

З умови задачі нам відомо зміст робіт, але явно не вказані взаємозв'язки між роботами. Тому для їх встановлення необхідно проаналізувати зміст кожної конкретної роботи і з'ясувати, які з решти робіт повинні їй безпосередньо передувати. Вихідною роботою, починаючий мережевий графік, в даному випадку є "прийом на роботу" (C), оскільки всі інші роботи повинні виконуватися вже прийнятими на роботу співробітниками (рис.2.30). Перед виконанням усіх робіт з опитування громадської думки співробітників необхідно навчити персонал (D). Перед тим як розіслати анкети (F), їх треба розробити (A), роздрукувати (B) і вибрати опитуваних осіб (E), причому роботу з анкетами і вибір осіб можна виконувати одночасно. Завершальною роботою проекту є аналіз отриманих даних (G), який не можна виконати без попередньої розсилки анкет (F). В результаті цих міркувань побудуємо мережеву модель і пронумеруємо події моделі (див. рис.7.4).

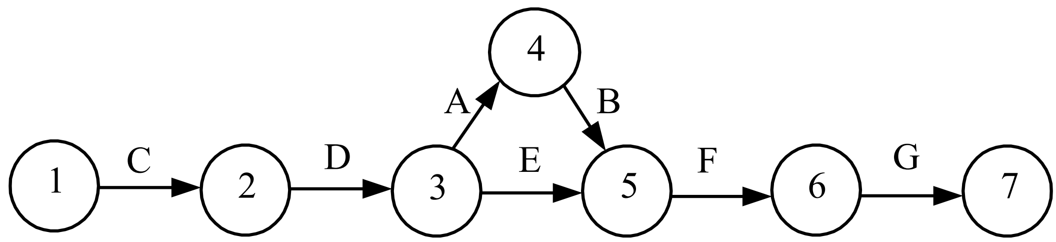


Рис.2.30. Мережева модель програми опитування громадської думки

Задача №2.15

Побудуйте мереживу модель, що включає роботи A, B, C, ..., L, яка відображає наступне впорядкування робіт:

1) A, B і C – вихідні операції проекту;
2) A і B передують D;
3) B передує E, F і H;
4) F і C передують G;
5) E і H передують I і J;
6) C, D, F і J передують K;
7) K передує L.

Розв'язок

У пункті 1) умови явно зазначено, що A, B і C є вихідними роботами, тому зобразимо їх трьома стрілками, що виходять з вихідної події 1. Пункт 2) умови означає, що стрілки робіт A і B повинні закінчитися в одній події, з якої вийде стрілка роботи D. Але оскільки стрілки робіт A і B також і починаються в одній події, то має місце паралельність робіт, яка недопустима правилами побудови мережевих моделей (див. рис.2.31).

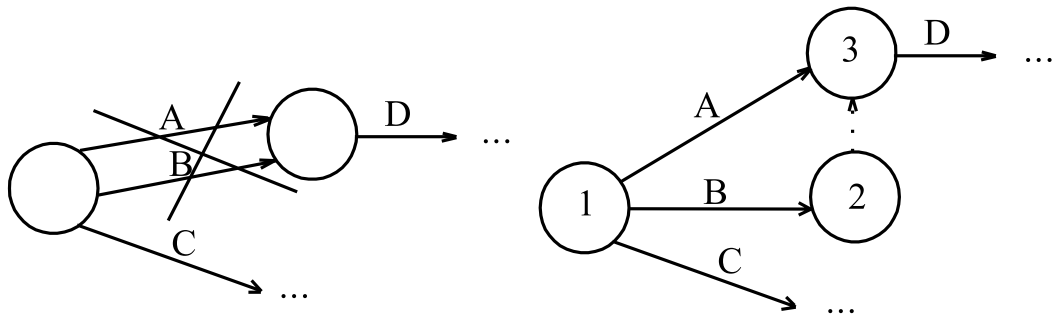


Рис.2.31. Усунення паралельності робіт A і B

Для ее устранения введем дополнительное событие 2, в которое войдет работа B, после чего соединим события 2 и 3, в которые входят работы A и B пунктирной стрелкой фиктивной работы. В данном случае фиктивная работа (2,3) не соответствует никакой реальной работе, а лишь отображает логическую связь между работами B и D. Дальнейшее построение рассмотрим с помощью рис.2.32

Для її усунення введемо додаткову подію 2, до якої увійде робота B, після чого з'єднаємо події 2 і 3, в які входять роботи A і B пунктирною стрілкою фіктивної роботи. У даному випадку фіктивна робота (2,3) не відповідає ніякій реальній роботі, а лише відображає логічний зв'язок між роботами B і D. Подальшу побудову розглянемо за допомогою рис.7.6

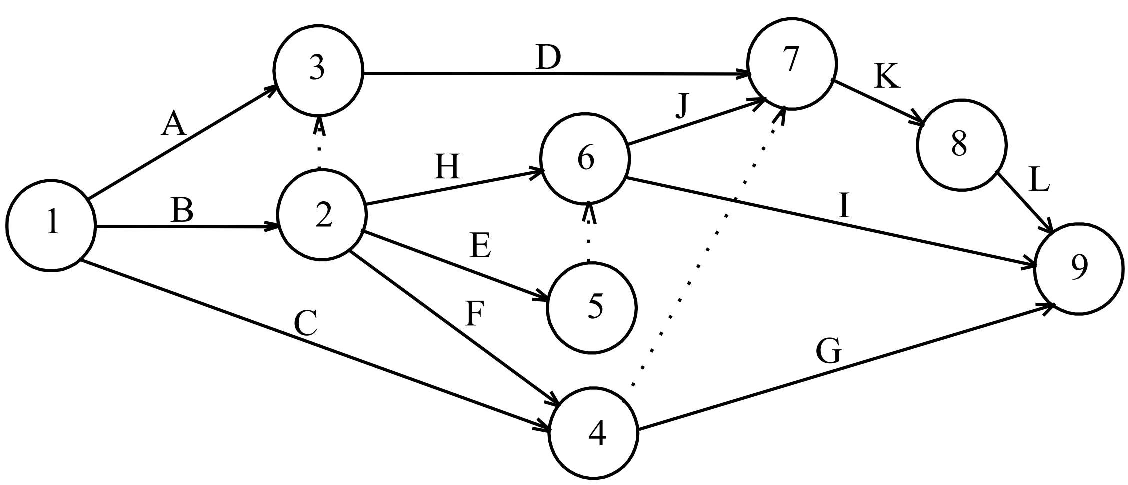


Рис.2.32. Мережева модель

Згідно з пунктом 3) умови здачі з події 2, виходять три стрілки робіт E, F і H. Згідно з пунктом 4) умови здачі стрілки робіт C і F повинні увійти в загальну подію, з якого вийде стрілка роботи G. Проблема з паралельністю робіт E і H [пункт 5) умови задачі] вирішується шляхом введення додаткової події 5 і фіктивної роботи (5,6). Для відображення в мережевій моделі пункту 6) умови задачі введемо стрілки робіт D і J в подію 7, а зв'язок робіт F і C з роботою K відобразимо за допомогою фіктивної роботи (4,7). Стрілки робіт F і C не можна було напряму вводити в подію 7, бо після них повинна слідувати робота G, яка з роботами D і J ніяк не пов'язана. Стрілка роботи L виходить з події 8, тобто після закінчення роботи K відповідно до пункту 7) умови задачі.

Поскольку в условии не указано, что работы L, I и G предшествуют каким-либо другим работам, то эти работы являются завершающими и их стрелки войдут в завершающее событие 9. Нумерацию событий проводят после построения сетевого графика, следя за тем, чтобы номер начального события каждой работы был меньше номера ее конечного события.

Оскільки в умові не вказано, що роботи L, I і G передують будь-яким іншим роботам, то ці роботи є завершальними і їх стрілки увійдуть до завершальної події 9. Нумерацію подій проводять після побудови мережевого графіка, стежачи за тим, щоб номер початкової події кожної роботи був менший номера її кінцевої події.

Завдання для самоперевірки та контролю засвоєння знань

Задача №1

Побудуйте мережеву модель розробки і виробництва верстатів, використовуючи упорядкування робіт з табл.1.

Таблиця 1

Вихідні дані задачі №1

Робота	Безпосередньо попередні роботи	Час, од. часу
A – складання кошторису витрат	–	3
B – узгодження оцінок	A	6
C – покупка власного обладнання	B	1
D – підготовка конструкторських проектів	B	2
E – будівництво основного цеху	D	1
F – монтаж обладнання	C,E	5
G – випробування обладнання	F	4
H – визначення типу моделі	D	9
I – проектування зовнішнього корпусу	D	7
J – створення зовнішнього корпусу	H,I	6
K – кінцева збірка	G,J	3
L – контрольна перевірка	K	7

Задача №2

Побудуйте мережеву модель організації виступу хору при свічках, використовуючи дані табл.2.

Таблиця 2

Вихідні дані задачі №2

Зміст роботи	Тривалість, од.часу
A – вибір музичного твору	21
B – розучування музики	14

C – розмноження нотних партій	14
D – репетиції хору	70
E – отримання канделябрів в прокат	14
F – закупівля свічок	1
G – установка канделябрів зі свічками	1
H – закупівля декорацій	1
I – установка декорацій	1
J – замовлення костюмів для хору	7
K – прасування костюмів	7
L – перевірка системи посилення звуку	7
M – настройка системи посилення звуку	1
N – генеральна репетиція хору	1
O – банкет	1
P – проведення концерту	1

Задача №3

Побудуйте мережеву модель, використовуючи упорядкування робіт з табл.3

Таблиця 3

Вихідні дані задачі №3

Назва	Безпосередньо попередні роботи	Тривалість, од. часу
A	–	2
B	–	10
C	–	8
D	A,B	4
E	B,C	3

F	C	1
G	D,E	9
H	F,G	7

Задача №4

Побудуйте мережеву модель переносу ділянки повітряної високовольтної лінії, використовуючи упорядкування робіт з табл.4.

Таблиця 4

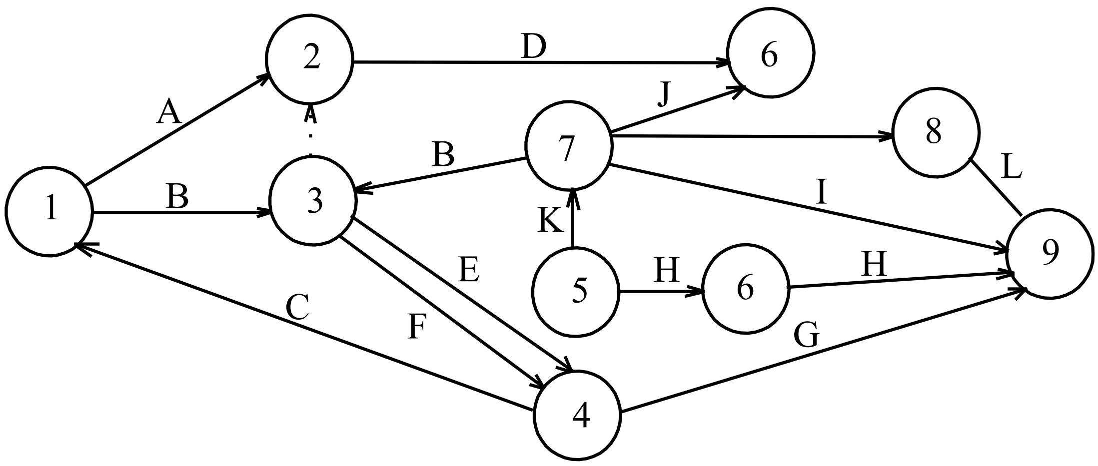
Вихідні дані задачі №4

Зміст роботи	Безпосередньо попередні роботи	Тривалість, од. часу
A – оцінка складу та змісту робіт	–	1
B – попередження споживачів електроенергії про тимчасове відключення системи	A	0,5
C – складання заявки на матеріали та обладнання	A	1
D – обстеження району проведення робіт	A	0,5
E – доставка опор і матеріалів	C,D	3
F – розподіл опор по точках монтажу	E	3,5
G – ув'язка точок монтажу	D	0,5
H – розмітка точок монтажу	G	0,5
I – риття ям під опори	H	3
J – монтаж опор	F,I	4
K – захист старих проводів	F,I	1
L – протяжка нових проводів	J,K	2

M – монтаж арматури	L	2
N – вивірка провису нових проводів	L	2
O – підстригання дерев	D	2
P – знеструмлення і перемикання ліній	B,M,N,O	0,1
Q – включення і фазування нової лінії	P	0,5
R – прибирання будівельного сміття	Q	1
S – зняття старих проводів	Q	1
T – демонтаж старих опор	S	2
U – доставка невикористаних матеріалів на склад	I	2

Задача №5

Знайдіть порушення правил побудови мережевих графіків в мережевій моделі на рис.



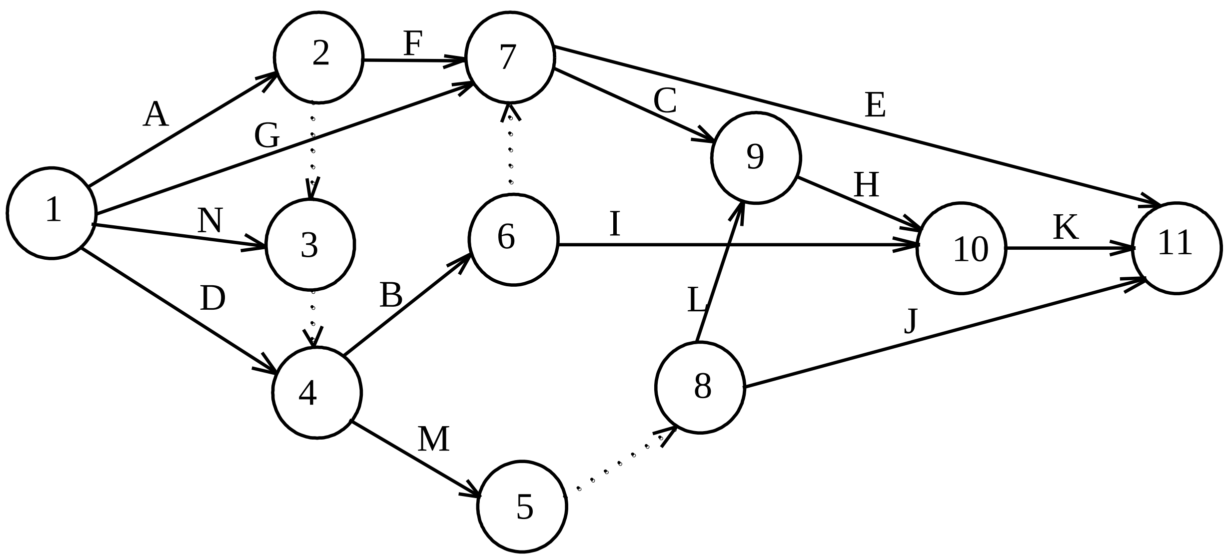
*Задача №6**

Використовуючи дані про безпосередньо попередніх роботах (табл.6), перерахуйте роботи, які невірно відображені на мережевому графіку, усуньте знайдені помилки.

Таблиця 6

Вихідні дані задачі №6

Назва	Безпосередньо попередні роботи	Тривалість, од. часу
A	–	9
B	D	6
C	B, F, G	5
D	–	8
E	B, F, G	8
F	A, N	4
G	–	5
H	C, L	7
I	B, G	1
J	I,M	12
K	H,I,M	6
L	I,M	4
M	D	2
N	–	6



2.8.3. Розрахунок і аналіз мережевих моделей

Календарне планування передбачає визначення моментів початку і закінчення кожної роботи і інших тимчасових характеристик мережевого графіка. Це дозволяє проаналізувати мережеву модель, виявити критичні роботи, що безпосередньо визначають термін виконання проекту, провести оптимізацію використання ресурсів (часових, фінансових, виконавців).

Розрахунок мережевої моделі починають з часових параметрів подій, які вписують безпосередньо в вершини мережевого графіка *(рис.2.33):*

- $\mathrm{T_p(i)}$ – ранній термін настання події *і*, мінімально необхідний для виконання всіх робіт, які передують події *і*;
- $\mathrm{T_п(i)}$ – пізній термін настання події *і*, перевищення якої викличе аналогічну затримку настання завершальної події мережі;
- $\mathrm{R(i) = T_п(i) - T_p(i)}$ – резерв події *і*, тобто час, на який може бути відкладено настання події *і* без порушення термінів завершення проекту в цілому.

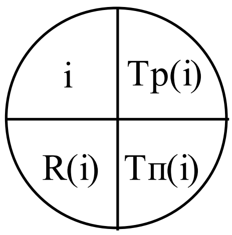


Рис.2.33. Відображення часових параметрів подій на мережевому графіку

Ранні терміни звершення подій $\mathrm{T_p(i)}$ розраховуються від вихідної (В) до завершальної (З) події таким чином:

1) для вихідної події В $T_{\text{р}}(B) = 0$;

2) для всіх інших подій I

$$T_p(i) = \max_{\forall(k,i)} [T_p(k) + t(k,i)],$$

де максимум береться по всіх роботах (k,i), що входять в подію *i*; $t(k,i)$ - тривалість роботи (k, i) (рис.2.34).

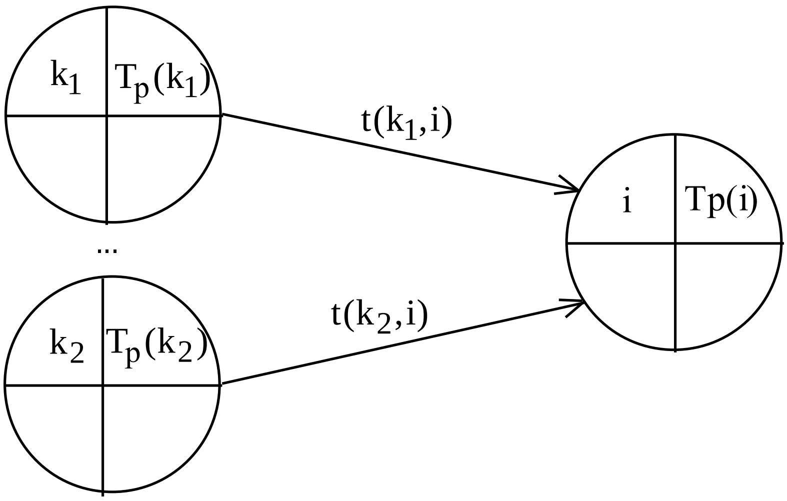


Рис.2.34. Розрахунок раннього терміну $T_p(i)$ звершення події *i*

Пізні терміни звершення подій $T_П(i)$ розраховуються від завершальної до вихідної події:

1) для завершальної події 3 $T_П(3) = T_p(3)$;

2) для всіх інших подій

$$T_П(i) = \min_{\forall(i,j)} [T_П(j) - t(i,j)],$$

де мінімум береться по всіх роботах (i,j), що виходять із події *i*; $t(k,i)$ – тривалість роботи (k,i) (рис.8.3).

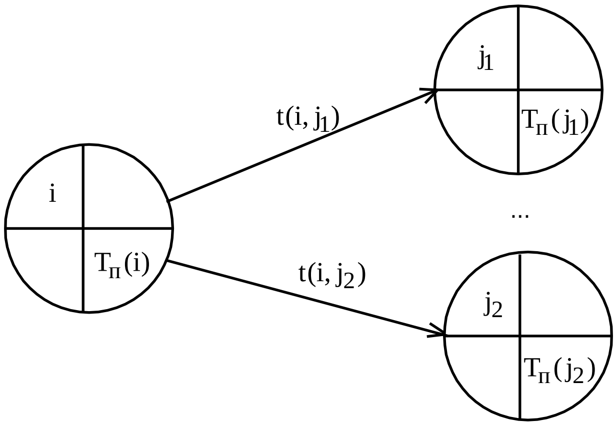


Рис.2.35. Розрахунок $T_п(i)$ звершення події *i*

Тимчасові параметри робіт визначаються на основі ранніх і пізніх термінів подій:

- $T_{рн}(i, j) = T_р(i)$ – ранній термін початку роботи;
- $T_{ро}(i, j) = T_р(i) + t(i, j)$ – ранній термін закінчення роботи;
- $T_{по}(i, j) = T_п(j)$ – пізній термін закінчення роботи;
- $T_{пн}(i, j) = T_п(j) - t(i, j)$ – пізній термін початку роботи;
- $R_п(i, j) = T_п(j) - T_р(i) - t(i, j)$ – повний резерв роботи показує максимальний час, на який можна збільшити тривалість роботи (i, j) або відкласти її початок, щоб не порушився термін завершення проекту в цілому;
- $R_c(i, j) = T_р(j) - T_р(i) - t(i, j)$ – вільний резерв роботи показує максимальний час, на який можна збільшити тривалість роботи (i, j) або відкласти її початок, не змінюючи ранніх термінів початку наступних робіт.

Шлях - це послідовність робіт в мережевому графіку (в окремому випадку це одна робота), в якій кінцева подія однієї роботи збігається з початковою подією наступної за нею роботи. **Повний шлях** - це шлях від вихідної до завершальної події. **Критичний шлях** - максимальний за тривалістю повний шлях. Роботи, що лежать на критичному шляху, називають **критичними**. Критичні роботи мають нульові вільні і повні резерви. **Підкритичний шлях** - повний шлях, найближчий за тривалістю до критичного шляху.

Для проведення аналізу часових параметрів мережевої моделі використовують **графік прив'язки**, який відображає взаємозв'язок виконуваних робіт в часі. По вертикальній осі графіка прив'язки відкладаються коди робіт, по горизонтальній осі - відрізки, відповідні тривалості робіт (ранній початок і раннє закінчення робіт). Графік прив'язки можна побудувати на основі даних про тривалість робіт. При цьому необхідно пам'ятати, що робота (i, j) може виконуватися тільки після того як будуть виконані всі попередні їй роботи (k, i).

Задача №2.15

Компанія розробляє будівельний проект. Вихідні дані по основних операціях проекту представлені в табл.. Побудуйте мережеву модель проекту, визначте критичні шляхи моделі і проаналізуйте, як впливає на хід виконання проекту затримка роботи D на 4 тижні.

Назва	Безпосередньо попередні операції	Тривалість, тижні
A	–	4
B	–	6
C	A,B	7
D	B	3
E	C	4
F	D	5
G	E,F	3

Розв'язок

Побудуємо мережеву модель і розрахуємо часові параметри подій (рис.2.33). При пошуку критичних шляхів на мережевому графіку будемо використовувати наступні умови його критичності:

- ***необхідна умова - нульові резерви подій, що лежать на критичному шляху;***
- ***достатня умова - нульові повні резерви робіт, що лежать на критичному шляху.***

Згідно необхідній умові два повних шляхи мережевої моделі (див. рис.8.3) $L_1 = 1,2,3,4,6,7$ і $L_2 = 1,3,4,6,7$ можуть бути критичними. Перевіримо достатню умову критичності для робіт (1,2) і (1,3)

$$R_п(1,2) = T_п(2) - T_р(1) - t(1,2) = 6 - 0 - 6 = 0;$$

$$R_п(1,3) = T_п(3) - T_р(1) - t(1,2) = 6 - 0 - 4 = 2.$$

Шлях L_2, що починається з роботи (1,3) не є критичним, тому що як мінімум одна з його робіт (1,3,) не є критичною. Робота (1,3) має ненульовий повний резерв, а значить може бути затримана з виконанням, що неприпустимо для критичних робіт.

Таким чином, мережева модель має єдиний критичний шлях $L_{кр} = 1,2,3,4,6,7$ тривалістю $T'_{кр} = 20$ тижнів. За виконанням робіт цього шляху необхідний особливий контроль, тому що будь-яке збільшення їх тривалості порушить термін виконання проекту в цілому.

Робота D або (2,5) не є критичною, її повний резерв дорівнює 3-м тижням. Це означає, що при затримці роботи в межах 3-х тижнів термін виконання проекту не буде порушений. Тому якщо згідно з умовою робота D затримається на 4 тижні, то весь проект закінчиться на 1 тиждень пізніше.

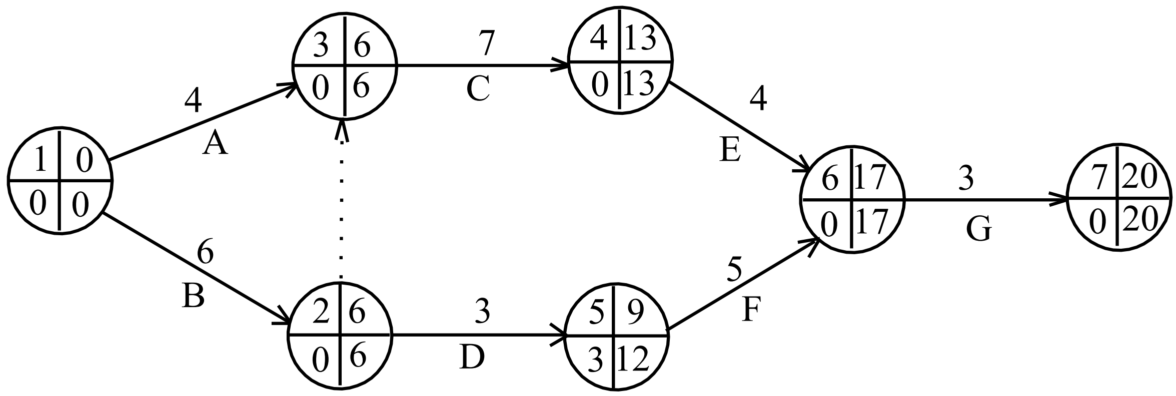


Рис.2.33. Мережевий графік задачі №8.01

Задача №.2.16

За даними про коди і тривалості робіт в днях в табл. побудуйте *графік прив'язки* мережевої моделі, визначте критичні шляхи і їх тривалість. Визначте вільні і повні резерви кожної роботи, відзначте на графіку прив'язки вільні резерви робіт.

(i,j)	1,2	1,3	1,4	1,5	2,3	3,6	3,7	4,5	4,6	5,7	6,7
t(i,j), дні	3	3	2	10	2	5	9	10	6	1	4

Загальні рекомендації

При пошуку критичних шляхів слід пам'ятати, що ознакою критичної роботи є нульові значення резервів часу. Це означає, що кожна наступна критична робота буде починатися *строго в момент закінчення* попередньої критичної роботи. Внаслідок цього зрушення будь-якої з робіт критичного шляху обов'язково призведе до збільшення первісної тривалості проекту ($T_{кр}$). Крім того, слід врахувати, що критичний шлях є *повним*, тобто з'єднує початкову і завершальну події мережі. Тому на графіку прив'язки перша з робіт критичного шляху завжди починається в початковій події мережі з нульового (початкового) моменту часу, а остання з робіт критичного шляху завжди завершується пізніше всіх інших робіт мережі в завершальній події.

З вищенаведених міркувань слідує спосіб визначення критичного шляху на графіку прив'язки (*всі знайдені роботи виписуються послідовно справа наліво*):

1) знайти на графіку прив'язки і виписати роботу (i,j), яка закінчується пізніше всіх інших. Це буде остання робота критичного шляху (її кінцева подія матиме номер завершальної події мережі);

2) з усіх робіт мережі (k,i), кінцева подія яких *i* збігається з початковою подією *i* роботи (i,j), знайденої в п.1), вибрати і виписати ту, яка на графіку впритул примикає до роботи (i,j);

3) з усіх робіт мережі (l,k), кінцева подія яких k збігається з початковою подією k роботи (k,i), знайденої в п.2), вибрати і виписати ту, яка на графіку впритул примикає до роботи (k,i);

4) продовжувати п.3) до тих пір, поки не буде знайдена вихідна робота мережі, тобто така робота, що починається в нульовий момент часу (її початкова подія матиме номер вихідної події мережі, наприклад, 1).

Слід зауважити, що якщо в мережевій моделі кілька критичних шляхів, то, виконуючи вищеописані дії, можна виявити декілька робіт, що задовольняють сформульованим вимогам. У такому випадку необхідно продовжувати пошук по кожній з таких робіт окремо. У складних мережевих моделях подібні розгалуження можуть привести до великих витрат часу на пошук критичний шляхів. Проте, такий спосіб корисний для навчальних цілей, оскільки дає розуміння значення критичних робіт в мережевій моделі і вчить "читати" і розуміти графік прив'язки.

Розв'язок

I. Пошук критичних шляхів

1) Побудуємо графік прив'язки (рис.8.4).

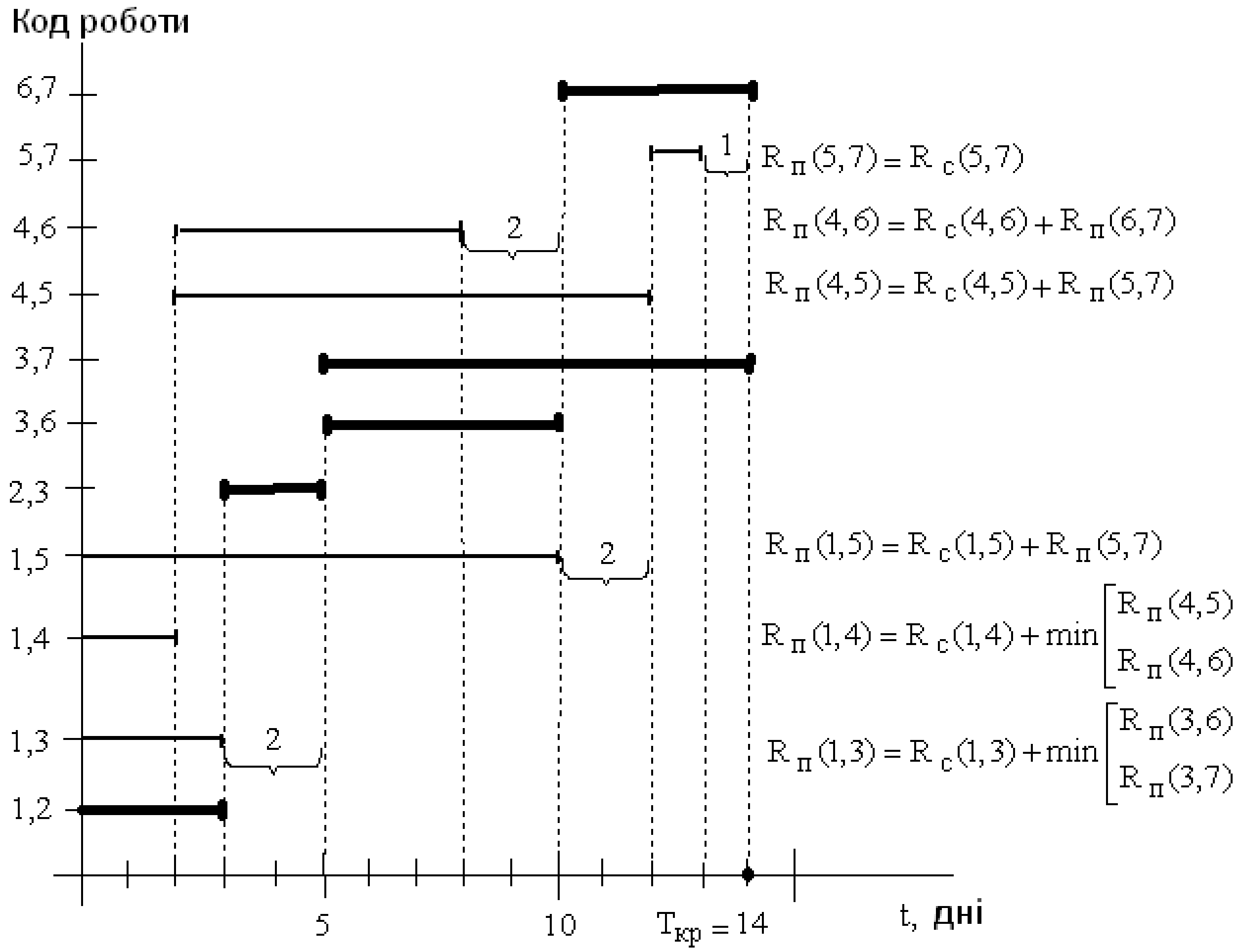


Рис.2.35. Графік прив'язки задачі

2) Почнемо пошук критичних шляхів (справа наліво) з робіт, які завершають проект. На графіку прив'язки (див. рис.2.35) дві роботи (6,7) і (3,7), які закінчуються пізніше за інших в завершальну подію № 7. Записуємо роботи, визначені як критичні справа наліво

$$L_{кр_1} = \ldots(6,7); \tag{2.24}$$

$$L_{кр_2} = \ldots(3,7).$$

3) Знайдемо критичну роботу з $L_{кр_1}$, попередню (6,7). Код цієї роботи повинен закінчуватися на 6. Таких робіт дві - (4,6) і (3,6). Але тільки одна з них, робота (3,6) за часом свого закінчення впритул

"примикає" на графіку до початку роботи (6,7). Допишемо зліва знайдену критичну роботу (3,6) до виразу (2.24)

$$L_{кр_1} = \ldots (3,6);\ (6,7). \tag{2.25}$$

4) Знайдемо критичну роботу з $L_{кр_1}$, попередню (3,6). Код цієї роботи повинен закінчуватися на 3. Таких робіт дві - (2,3) і (1,3). Але тільки одна з них, робота (2,3) за часом свого закінчення впритул "примикає" на графіку до початку роботи (3,6). Допишемо зліва знайдену критичну роботу (2,3) до виразу (2.25)

$$L_{кр_1} = \ldots (2,3); (3,6); (6,7). \tag{2.26}$$

5) Знайдемо критичну роботу з $L_{кр_1}$, попередню (2,3). Код цієї роботи повинен закінчуватися на 2. Робота (1,2) за часом свого закінчення впритул "примикає" на графіку до початку роботи (2,3). З цієї роботи починається критичний шлях $L_{кр_1}$

$$L_{кр_1} = (1,2); (2,3); (3,6); (6,7).$$

6) Аналогічний пошук робіт критичного шляху $L_{кр_2}$ призводить до результату $L_{кр_2} = (1,2); (2,3); (3,7)$

В іншій формі запису $L_{кр_1} = 1, 2, 3, 6, 7$ і $L_{кр_2} = 1, 2, 3, 7$.

7) Для наочності виділимо на графіку прив'язки критичні роботи жирною лінією.

II. Пошук резервів робіт

1) Для всіх знайдених критичних робіт впишемо в табл.3 *нульові* значення вільного і повного резервів. Розглянемо некритичні роботи, починаючи з кінця.

i, j	$t(i,j)$	$R_c(i,j)$	$R_п(i,j)$	Критичність

1,2	3	**0**	**0**	Критична
1,3	3	2	2	–
1,4	2	0	1	–
1,5	10	2	3	–
2,3	2	**0**	**0**	Критична
3,6	5	**0**	**0**	Критична
3,7	9	**0**	**0**	Критична
4,5	10	0	1	–
4,6	6	2	2	–
5,7	1	1	1	–
6,7	4	**0**	**0**	Критична

2) Робота (5,7), згідно з графіком прив'язки (див. рис.8.4) закінчується в 13-й день, а завершальна подія 7 мережі, в яку вона входить, настає лише в 14-й день. Тобто якщо робота (5,7) затримається на 1 день, то це не вплине на термін виконання проекту ($T_{кр} = 14$ днів). Оскільки (5,7) завершальна робота мережі, то її повний і вільний резерви дорівнюють $R_{п}(5,7) = R_{c}(5,7) = 1$.

3) Робота (4,6) закінчується у 8-й день, в той час як подальша робота (6,7) починається в 10-й день. Тобто, робота (4,6) може затриматися на 2 дні і це ніяк не вплине на час початку наступної роботи (6,7), тобто $R_{c}(4,6) = 2$.

Правило

Повний резерв будь-якої роботи складається з власного вільного резерву і мінімального з повних резервів безпосередньо наступних робіт.

За роботою (4,6) слідує тільки критична робота (6,7) з нульовим повним резервом. Тому $R_{п}(4,6) = R_{с}(4,6) + R_{п}(6,7) = 2 + 0 = 2$.

4) Робота (4,5) закінчується в 12-й день, в цей же день починається наступна робота (5,7), тобто будь-яка затримка виконання роботи (4,5) призведе до затримки початку роботи (5,7). Це означає, що робота (4,5) не має вільного резерву $R_{С}(4,5) = 0$. Але якщо зрушити в часі роботу (4,5) на 1 день, то робота (5,7) також зрушиться на 1 день і це не порушить термін виконання проекту, тому що у роботи (5,7) є часовий резерв. Таким чином згідно з правилом № 8.1

$$R_{п}(4,5) = R_{с}(4,5) + R_{п}(5,7) = 0 + 1 = 1.$$

5) Робота (1,5) закінчується в 10-й день, в той час як подальша робота (5,7) починається в 12-й день. Тобто робота (1,5) може затриматися на 2 дні і це ніяк не вплине на час початку наступної роботи (5,7), тобто $R_{С}(1,5) = 2$. Крім того, оскільки подальша робота (5,7) має резерв у 1 день, то, загалом, роботу (1,5) можна зрушити на 3 дні і це не порушить термінів проекту (див. рис.2.35), тобто

$$R_{п}(1,5) = R_{с}(1,5) + R_{п}(5,7) = 2 + 1 = 3.$$

6) Робота (1,4) закінчується в 2-й день, і в цей же день починаються наступні роботи (4,5) і (4,6). Тобто робота (1,4) не має вільного резерву часу $R_{С}(1,4) = 0$. Оскільки після роботи (1,4) йдуть дві роботи з різними повними резервами, то згідно з правилом №8.1

$$R_{п}(1,4) = R_{с}(1,4) + \min\left[R_{п}(4,5); R_{п}(4,6)\right] = 0 + \min[1;2] = 0 + 1 = 1.$$

7) Робота (1,3) закінчується в 3-й день, а наступні за нею роботи (3,6) і (3,7) починаються в 5-й день, тобто $R_{С}(1,3) = 2$. Оскільки обидві

наступні роботи критичні, то повний і вільний резерви робіт (1,3) збігаються

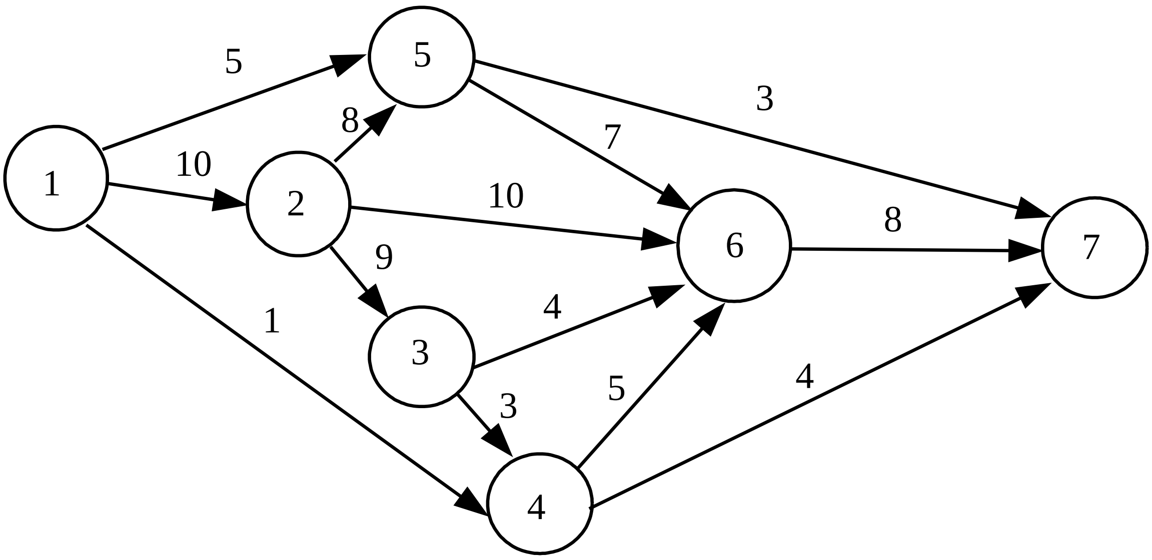
$$R_п(1,3) = R_c(1,3) + \min\left[R_п(3,6); R_п(3,7)\right] = 2 + \min[0;0] = 2 + 0 = 2.$$

8) Ненульові вільні резерви робіт позначені на графіку прив'язки фігурними дужками (див. рис.8.4).

Завдання для самоперевірки та контролю засвоєння знань

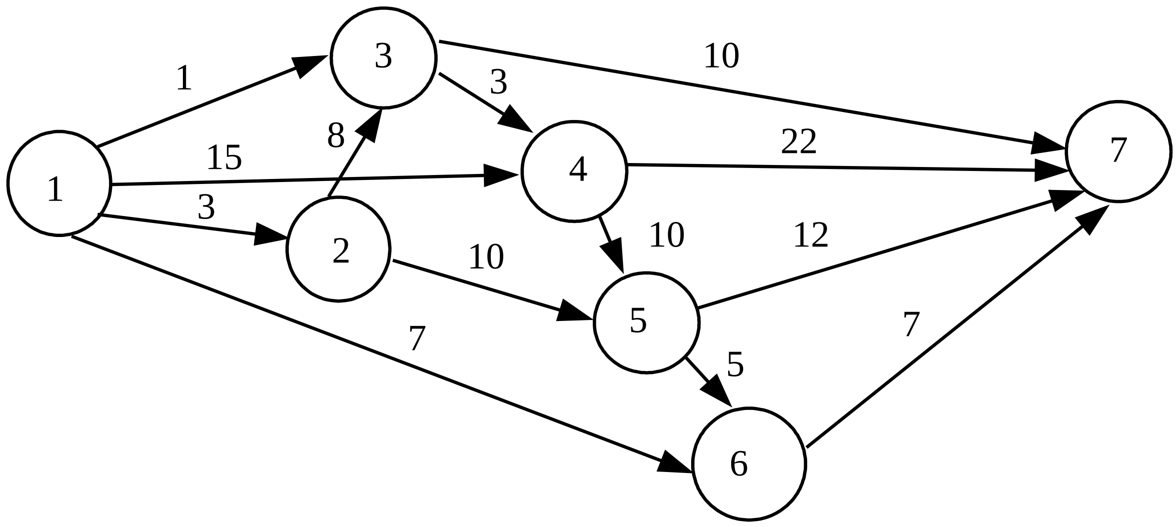
Задача №1

Визначте критичні шляхи і вказані параметри робіт в мережевій моделі: Rс(1,5), Rп(1,5), Трн(5,7), Тпн(5,7), Тро(2,6), Тпн(3,6), Тро(4,7), Тпо(1,5), Тпн(1,5).



Задача №2

Визначте критичні шляхи і вказані параметри робіт в мережевій моделі: Rс(1,3), Rп(1,2), Тро(3,7), Трн(2,5), Тпн(1,6), Тпо(1,3), Тпн(4,5), Тро(1,4), Тпо(1,2).



Задача №3

Визначте критичні шляхи і вказані параметри робіт в мережевій моделі, отриманої після *виправлень* у процесі розв’язку задачі №7.6 (див. рис.7.8): Трн(H), Rп(N), Тпн(F), Тпо(A), Rс(A), Тпн(M), Тро(M), Rп(A), Тро(G), Тпн(E), Rс(J), Тпн(G).

Задачи №8.7, 8.8, 8.9

За даними про коди і тривалості робіт (див.табл.) побудуйте графік прив'язки мережевої моделі, визначте критичні шляхи і їх тривалість, чисельні значення вільних і повних резервів кожної роботи зведіть в таблицю, відзначте на графіку прив'язки вільні резерви робіт.

Таблиця

Вихідні дані задач №8.7, 8.8, 8.9

Задача №8.7		Задача №8.8		Задача №8.9	
(i,j)	t(i,j)	(i,j)	t(i,j)	(i,j)	t(i,j)
1,2	4	1,2	5	1,2	1
1,3	6	1,3	2	1,3	3

2,4	5
2,6	0
3,4	2
3,5	1
4,6	7
4,8	8
5,6	0
5,7	5
6,7	1
6,8	6
7,8	3
7,9	6
8,9	3

1,4	4
2,3	4
2,5	2
3,5	0
3,6	8
4,7	3
5,8	7
6,9	6
7,8	9
7,9	8
8,9	10

1,4	2
2,5	4
3,4	4
3,6	5
4,5	0
4,7	3
4,8	2
5,7	4
6,8	6
7,8	3
7,11	2
8,9	7
8,10	5
9,10	0
9,11	6
10,11	1

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРИ ТА СТРАТЕГІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ

Бізнес – гра, найвеличніша
гра в світі – якщо ви
знаєте, як в неї грати.
Томас Дж. Уотсон

Прийняття рішень завжди було й залишається найважливішим аспектом різносторонніх областей життя та діяльності людства. Одне з значень економіки гласить: “Економіка – це пошук найкращого використання ресурсів, вибір з числа існуючих можливостей, прийняття рішень про переважні способи економічної поведінки – все це складає зміст управління економікою, котрий таким чином, зводиться до оптимальних рішень в економіці та бізнесі. От того, наскільки ефективні прийняті рішення, залежить стан виробництво – технічної та соціальної сфер економіки.

Існують різні підходи до прийняття рішень:

- психологічний;
- на основі методу аналогій;
- інтуїтивний;
- на основі попереднього досвіду;
- на основі здорової суті.

Однак, приймати управлінські та інші рішення в економіці, в сфері технології, виробництва, в фінансовій області, в бізнесі та інших галузях господарства за допомогою тільки особистих дослідів, інтуїції, здорової суті – малоефективне. Складний характер ринкової економіки дає нам більш складні вимоги до обґрунтування прийнятих рішень, хоч і перелічувані підходи не можна абсолютно не враховувати. Одним з способів задоволення цих потреб є постановка проблеми прийняття рішень на **математичну основу**. В цілому нема нічого несподіваного, оскільки сучасна економічна наука суттєво опирається на математичне моделювання економічних процесів та пронизана математичним апаратом, а математична мова дозволяє більш конкретно та однозначно сформулювати економічні факти та закони.

Наука, яка надає математичне обґрунтування різних типів задач по прийняттю рішень, підходів до їх аналізу, в рамках котрої сформулювалися основні ідеї прийняття рішень, є “***Дослідження операцій***”. Вона структурно сформувалася в період другої світової війни та включає в себе ряд розділів, які відрізняються один від одного різними математичними моделями різних задач пошуку оптимальних рішень.

“Дослідження операцій”, в частковому випадку у фінансово – економічній сфері та бізнесі, допомагає людині, яка приймає рішення, зробити критичний аналіз ситуації та в результаті більш обґрунтовано та послідовно проводити визначену стратегію поведінки при вирішені складних, комплексних проблем.

Одним з найважливіших розділів “Досліджування операцій” є розділ, який я розглядаю у своїй роботі – ***теорія гри***, яка представляє собою теоретичні основи математичних моделей прийняття оптимальних рішень в конфліктних ситуаціях ринкових відносин, які носять характер конкурентної боротьби, в котрих одна протиборотьбова сторона виграє за рахунок програшу другої. Наряду з такою ситуацією в теорії прийняття рішень також розглядають так звані ситуація ризику та ситуація невизначеності, які мають різні моделі та потребують різні критерії вибору оптимальних рішень. В ситуації ризику передбачаються відомими не тільки можливі умови, в яких потрібно приймати рішення, але й ймовірності умов невідомих, та немає ніяких можливостей отримати про них додаткову статистичну інформацію. Навколишнє середовище, що оточує розв'язок задачі, яка проявляється в тих чи інших умовах, називається “природою”, а відповідні математичні моделі називаються “іграми з природою” або “теорією статистичних рішень”.

В той час як багато математичних теорій було породжено різними проблемами з галузі фізики, теорія гри, за винятком від них, з'явилась як сукупність математичних моделей задач нефізичного змісту. “Ідея теорії ігор – пишуть Р.О.Льюіс та Г.Ральф, – виникла з нефізичних задач, а для реалізації цієї ідеї було розроблено відповідний математичний апарат...”. Математична теорія ігор починалась з аналізу азартних, спортивних, карточних та інших ігор, які з успіхом виступають в якості ілюстрації основних положень та понять цієї теорії, таких як рівень інформованості, вибір, хід, стратегія, результат, виграш та інш. Розповідають, що першовідкривачем теорії ігор, видатний американський математик XX століття Джон фон Нейман прийшов до ідеї своєї теорії спостерігаючи за грою в покер. Звідси й взяло своє походження назва “теорія гри”. Після того як вона в 1940р. Була застосована до теоретичного дослідження економіки Дж. фон Нейманом та О.Моргенштерном, вона отримала широке розповсюдження та визнання. Теорія гри використовується в областях економіки та виробництва, бізнесу та фінансів, сільського господарства та воєнної справи, біології та соціології, психології та політології.

Сьогодні теорія гри розвинулась в самостійну галузь математиці та може розглядатися до реальних ігрових ситуацій.

3.1. Основні поняття теорії гри та її класифікації

Перші дослідження деяких питань теорії гри були виконані французьким математиком Е.Борелем у 20-ті роки 20-го століття. Монографію Дж.Неймана та О.Моргенштерна “Теорія гри й економічна поведінка”, яка вийшла з друку в 1944 р., приймають за початок становлення теорії гри як самостійної науки. У часи другої світової війни та по її завершенні теорією гри дуже зацікавилися військові спеціалісти, які побачили в ній ефективний апарат дослідження стратегічних питань. Згодом у працях учених знову почали розглядатися питання економіки та планування. Кількість досліджень з різнопланового використання теорії гри весь час розширюється.

Різноманітні методи теорії оптимізації тих чи інших процесів використовуються тоді, коли перебіг може бути керований з одного певного центру і ефективність цього процесу оцінюється лише з урахуванням інтересів такого центру. У даній роботі розглядається розв’язання задач прийняття рішень при наявності кількох зацікавлених сторін, коли інтереси цих сторін не співпадають, а часто й протилежні, тобто за умови так званих конфліктних ситуацій.

Предметом теорії ігор є дослідження конфліктних ситуацій методом математики. Однією з характерних і суттєвих рис громадського, соціально-економічного процесу є розмаїття та різноплановість інтересів і наявність сторін, які є носіями таких інтересів. Класичними прикладами є ринкові відносини: продавець-покупець; кілька виробників товару, які можуть об'єднуватися та встановлювати ціну товару; кілька конкуруючих між собою виробників. Більш складні конфліктні ситуації обумовлені наявністю об'єднань та груп, інтереси яких не співпадають: визначення рівня заробітної плати об'єднанням профспілок і підприємців та ін.

Конфлікт може виникнути також через розбіжності цілей, які віддзеркалюють не лише несполучні інтереси різних осіб або сторін, а також різноманітні інтереси однієї і тієї ж особи. Наприклад, планування економічної політики на певний період вимагає узгодження протилежних і несполучних вимог: зростання обсягів виробництва, збільшення прибутків, покращання екології і т. ін. Протидія зацікавленій сторони може бути не лише наслідком усвідомлених дій, а й результатом об'єктивно існуючих, але непередбачених в повному обсязі умов, наприклад, цілеспрямованих по одержанню високого врожаю, природних умов, які не завжди цьому сприяють. Багато таких ситуацій можна зустріти в різних сферах діяльності: економіці, господарюванні, біології, соціології, військовій справі і т. ін. Моделювання таких ситуацій прийнято називати “гра з природою”. Характерною особливістю відповідних моделей є розробка математичного апарата з прийняттям рішень в умовах так званої природної невизначеності.

Прикладами гри є також різноманітні картонні та спортивні ігри, доміно тощо.

Будь-яка *математична модель перебігу економічного, соціального та інших процесів має адекватно віддзеркалювати притаманні їм особливості конфлікту та методи його вирішення:*

а) перелік зацікавлених сторін, які будемо називати гравцями; в літературі з теорії гри користуються й іншими назвами: сторони, учасники і т. ін.;

б) перелік можливих дій усіх учасників гри в залежності від ситуації; кожна можлива дія називається ходом або стратегією;

в) інтереси сторін, представлені певною мірою; залежності таких інтересів від ситуації описуються так званими функціями виграшу.

Віддзеркалення змісту конфлікту в аналітичних залежностях створює математичну модель, яку називають грою.

Класифікація моделей ігор

Велике розмаїття реальних конфліктних ситуацій обумовлює побудову різних моделей ігор. Моделі ігор класифікуються за кількістю гравців, визначеністю стратегій, умовами взаємовідносин між гравцями, характером моделювання наслідків гри, способом визначення функцій виграшу і т. ін. Розглянемо деякі класи ігор.

У залежності від кількості гравців маємо ігри з двома, трьома і більше гравцями. Різні теорії оптимізації можна тлумачити як варіанти гри одного гравця за умови відсутності протидії.

За кількістю можливих стратегій ігри поділяються на

1) **скінченні** (гра називається **скінченною**, якщо вона має скінченне число кроків (ходів) за умови, що на кожному з них виконується вибір із скінченного числа можливостей зробити певний хід (прийняти певне рішення);
2) **нексінченні** (у протилежному випадку гра називається **нескінченною** за умови, що хоч один із гравців має нескінченну кількість вибору можливих стратегій. Наприклад, модель гри "покупець-продавець": кожний з учасників може назвати і будь-яку ціну з певного інтервалу, і кількість товару);

В залежності від кількості дій, які необхідно виконати для досягнення певного результату, ігри поділяються на

1) **одноходові** (однокрокові)

Прикладом гри першого виду є гра в “орлянку” (після кожного кидання монети можна оцінювати результат), другого виду – гра в шахи або шашки.

2) **багатоходові**.

За критерієм взаємовідносин між гравцями ігри поділяються на

1) **безкоаліційні** (у безкоаліційній грі учасники не мають або можливостей, або права організовувати коаліції);
2) **кооперативні** (гра називається кооперативною, якщо до її початку гравці створюють коаліції та домовляються про спільні дії. Усі антагоністичні ігри є прикладом некооперативних);
3) **коаліційні** (якщо гравці можуть організовувати коаліції, домовлятися про певні спільні дії, то за таких умов гра називається

коаліційною);

Важливою характеристикою класифікації гри є *властивості функції виграшу (функції платежів)*. У теорії гри досить ґрунтовно досліджені ситуації, коли виграш одного гравця чисельно дорівнює програшу другого учасника, тобто наявний безпосередній конфлікт між гравцями. Такі ігри утворюють клас ігор *з нульовою сумою*. Прикладом є гра в "орлянку". До названого класу належать моделі дослідження багатьох військових проблем. Протилежністю ігор цього класу є ігри *зі сталою різницею*, в яких гравці як виграють, так і програють одночасно, а тому їм доцільно та корисно об'єднуватися для спільних дій. Між цими крайніми класами знаходяться ігри *з ненульовою сумою*, коли маємо моделювати як конфлікти, так і можливі узгодження дій гравців. Прикладом таких ситуацій є моделювання економічних стосунків між державами, якщо відкидаються політичні амбіції.

3.2. Математичне моделювання конфліктних ситуацій

Множину гравців позначимо I; елементи цієї множини будемо визначати їх переліком, наприклад, $I = \{1;\ 2\}$ за гру в "орлянку" або в шахи. Множину допустимих стратегій (ходів) I – го гравця позначимо X_i. За гру в "орлянку" множина X_i = {ціна, герб}, бо кожний гравець може скористатися лише цими стратегіями. При моделюванні взаємовідносин "продавець-покупець" кожний з учасників може вибрати будь-яку довільну ціну товару з деякого інтервалу, тобто множину X_i можна характеризувати як $p_i \in (\alpha_i, \beta_i)$ де p_i – ціна товару, (α_i, β_i) – межі можливих значень ціни.

Матричні ігри.

Надалі розглядаємо моделювання гри двох сторін, як умовно називаємо двох гравців. Позначаємо множину стратегій першого гравця X, другого – Y. Будь-яка пара $x_i, y_j; x_i \in X, y_j \in Y$ називається *ситуацією*. Міра зацікавленості гравців у ситуаціях характеризується певними числами. Число, пов'язане з певною ситуацією, називається *виграшем гравця*. Закон відповідності між набором можливих ситуацій певної гри та виграшем конкретного гравця називається функцією виграшу або *функцією платежів*. За умови, що множини X та Y скінченні, функцію виграшу кожного з гравців зручно записати як матрицю виграшів H, в котрій грядки відповідають стратегіям того з гравців, для якого будують *матрицю виграшів*, а стовпці – стратегіям його напарника. Елементи h_{ij} так побудованої матриці визначають виграші гравця за умови певної ситуації, обумовленої i– ою стратегією першого гравця та j– ою стратегією його напарника. Така форма запису функції виграшу скінченних ігор двох гравців обумовлює назву таких ігор – *матричні*.

Приклад. Гра в “орлянку” побудована за такою схемою: кожний із гравців має по дві стратегії – назвати “герб”, або “ціна”. Якщо обидва гравці обирають тотожні стратегії, тобто або “герб” або “ціна”, то перший гравець має виграш обсягом h, а його напарник такого ж обсягу програш. У ситуації, коли гравці вибирають різні стратегії, то перший має програш того ж обсягу h, а другий – виграш h. Матриця $H(1)$ виграшів першого гравця буде записана за такою схемою:

Стратегії другого гравця

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \text{герб} & \text{ціна} \end{array} \\ \begin{array}{l} \textit{Стратегії} \\ \textit{першого гравця} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{герб} \\ \text{ціна} \end{array} \right. & \begin{bmatrix} h & -h \\ -h & h \end{bmatrix} \end{array}$$

Матриця $H(2)$ виграшів другого гравця відповідно буде записана так:

Стратегії першого гравця

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc}\text{герб} & \text{ціна}\end{array} \\ \begin{array}{r}\textit{Стратегії}\\ \textit{другого гравця}\end{array} \left\{\begin{array}{l}\text{герб}\\ \text{ціна}\end{array}\right. & \begin{bmatrix} -h & h \\ h & -h \end{bmatrix}\end{array}$$

У наведеному прикладі сума виграшів за будь-якої ситуації дорівнює нулю. У загальному випадку ігри з нульовою сумою моделюють гранично антагоністичні зіткнення інтересів в економіці, у військовій справі і т. ін. Матриці виграшів двох гравців у таких іграх пов'язані залежністю:

$$H(1)+H(2)=0$$

Іноді має сенс сумістити матриці виграшів обох гравців, тоді в клітині відповідної ситуації зліва записують виграші першого гравця, справа – другого гравця:

Стратегії другого гравця

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc}\text{герб} & \text{ціна}\end{array} \\ \begin{array}{r}\textit{Стратегії}\\ \textit{першого гравця}\end{array} \left\{\begin{array}{l}\text{герб}\\ \text{ціна}\end{array}\right. & \begin{bmatrix} h;-h & -h;h \\ -h;h & h;-h \end{bmatrix}\end{array}$$

У більш загальному випадку при скінченній множині стратегій у кожного з гравців функція виграшів для першого гравця буде представлена прямокутною матрицею $m\text{x}n$ (m– кількість стратегій першого гравця, n– кількість стратегій другого гравця), функція виграшів другого гравця – матрицею $m\text{x}n$.

Наведемо приклад з нескінченною множиною стратегій у грі. Маємо дві фірми, які продають однаковий товар. Кожна з них може призначити ціну одиниці товару відповідно P_1, або P_2. Природно, що за умови однакової якості товарів споживачі купують товар з меншою ціною або купують порівну товар кожної фірми, якщо ціни рівні. Приймемо, що функція обсягу попиту $d(P)$ залежить від ціни на товар, тоді функція виграшу H_1 для першої фірми буде записана так:

$$H_1(P_1, P_2) = \begin{cases} P_1 d(P_1), & \text{якщо } P_1 < P_2; \\ P_1 d(P_1)/2, & \text{якщо } P_1 = P_2; \\ 0, & \text{якщо } P_1 > P_2. \end{cases}$$

Аналогічно буде записана функція виграшу для другої фірми.

3.3. Розв'язання матричних ігор у чистих стратегіях

Розглянемо розв'язання задачі теорії гри за умови, що маємо гру двох сторін і можливі стратегії кожної сторони представлені скінченними множинами. Як було зазначено раніше, функцію виграшів можна представити прямокутною матрицею. Приймемо умову, що виграш першого гравця дорівнює програшу другого гравця, тобто маємо *гру з нульовою сумою*.

3.3.1. Оптимальні стратегії. Верхня та нижня ціни гри

У теорії гри використовують основне природне припущення: *кожний гравець намагається досягти найбільшого виграшу* за будь-яких дій партнера, котрий необов'язково може бути суперником. Метою теоретичних побудов теорії гри є пошук оптимальних стратегій для кожного з гравців. **Оптимальною стратегією** гравця називають таку стратегію, яка гарантує йому найбільш можливий виграш за будь-яких дій його партнера, тобто такий виграш, величину якого в грі ніяк не можна зменшити. Поняття оптимальної стратегії визначається за такими критеріями.

1. Кожний гравець має партнера не менш досвідченого, ніж він сам. Партнер має протилежну мету, тобто не враховуються можливі помилки або прорахунки кожного з гравців та елементи ризику.

2. Кожний гравець робить виважені дії, намагаючись досягти гарантованого виграшу за будь-яких можливих ситуацій (протидій партнера).

Тепер розглянемо зміст поняття гарантованого рівня виграшу. Оскільки розглядаємо матричну гру з нульовою сумою, то перший гравець намагається (зацікавлений) вибрати таку стратегію (що відповідає вибору певного рядка матриці платежів), за якої величина функції платежів h_{ij} досягає найбільш можливого значення. Партнер діє так, щоб ця величина досягла якомога меншого значення (вибір відповідного стовпця матриці платежів).

Але значення h_{ij} залежить від вибору номера як рядка, так і стовпця. Цей вибір виконується різними учасниками гри з протилежними цілями. Перший гравець, обравши i-ту стратегію, може досягти лише того, що його партнер дозволить йому мати найменший виграш серед усіх можливих за обраної i-ої стратегії. Нижнім гарантованим рівнем виграшу α_i першого гравця буде величина

$$\alpha_i = \min_j h_{ij} \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

Природно, що перший гравець буде вибирати таку i-ту стратегію, за якої він напевне одержить якийсь максимально можливий виграш, тобто вибір стратегії першого гравця визначається умовою :

$$\max_i \alpha_i = \max_i \min_j h_{ij} \quad (i = 1, 2, ..., m).$$

Найбільший гарантований виграш $h(1)$ першого гравця визначається так:

$$h(1) = \alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j h_{ij} \quad (i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n). \tag{3.1}$$

Оптимальною стратегією першого гравця буде та, для якої виконується умова (3.11), тобто стратегія, за якої нижній гарантований рівень досягає найбільшого значення за наявної матриці виграшів.

Протилежна сторона моделі конфліктної ситуації – другий гравець, враховуючи, що гра є з нульовою сумою, прагне, щоб його програш був якнайменший, отже, його оптимальною стратегією буде вибір такого стовпця матриці платежів, для якого величина платежу h_2 (величина його програшу) буде найменшою серед усіх найбільших платежів, яких прагне досягти перший гравець.

$$h(2) = \beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i h_{ij} \; (i=1,2,...,m; \; j=1,2,...,n) \qquad (3.2)$$

Оптимальна стратегія першого гравця називається *максимінною*. За такої стратегії його виграш при будь-якій протидії партнера буде не менше величини $\alpha = \max_i \min_j h_{ij}$, яку називають *нижньою ціною гри*. Оптимальна стратегія другого гравця називається *мінімаксною*, а величина його програшу за такої стратегії визначається величиною $\beta = \min_j \max_i h_{ij}$ – *верхньою ціною гри*. Доцільно наголосити, що величини $h(1)$, α, $h(2)$ та β мають різний зміст і, як буде показано далі, не співпадають чисельно.

3.3.2. Гра з сідловою точкою

У випадку, коли величини нижньої та верхньої ціни гри співпадають, таку личину називають *чистою ціною гри*, або *ціною гри*; за таких умов величина виграшу першого гравця дорівнює величині програшу другого гравця. *Чистою стратегією* гравця називають вибір мінімаксної стратегії в матриці платежів. Отже, коли нижня та верхня границі гри співпадають, то задача має розв'язок у чистих стратегіях, гра називається *грою з сідловою точкою*. Сідловою точкою називають пару чистих стратегій, за яких виграш дорівнює ціні гри. Матриця виграшів і сідлова точка схематично представлені на рис.3.1.

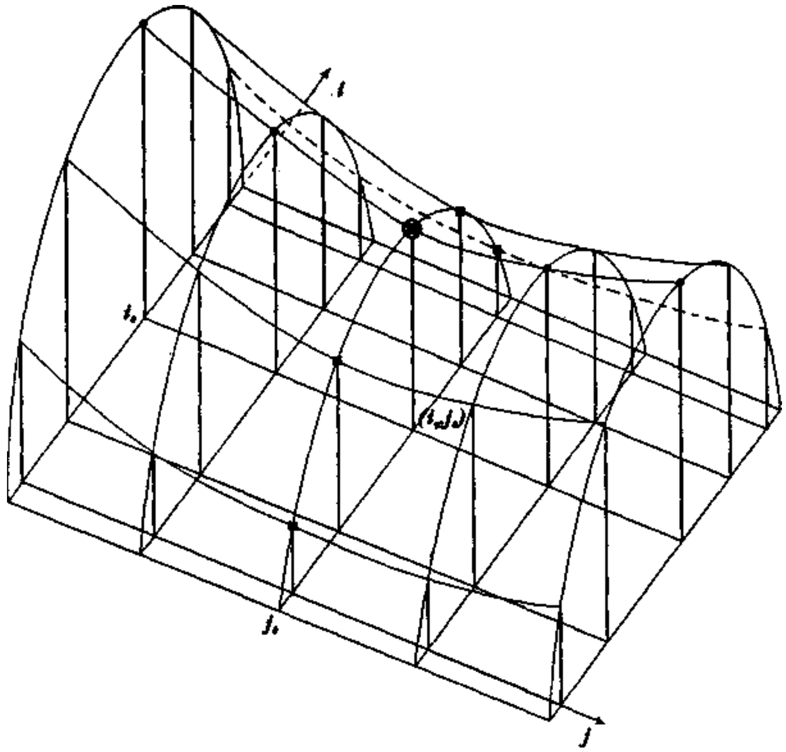


Рис.3.1. Матриця виграшів і сідлова точка

Сідлова точка в розв'язанні задачі має таке значення: якщо один із гравців обрав стратегію, яка відповідає сідловій точці, то у партнера немає кращого вибору, ніж вибір тієї своєї стратегії, яка відповідає сідловій точці. Для стратегій $i_0 j_0$, які породжують сідлову точку, справедливе відношення:

$$h_{ij_0} \leq h_{i_0 j_0} \leq h_{i_0 j} \tag{3.3}$$

(i, j – будь-які чисті стратегії гравців).

Згідно з (3.1) елемент $h_{i_0 j_0}$ матриці платежів є найменшим в i_0-му рядку та найбільшим в j_0-му стовпці (не більше будь-якого елемента i_0-го рядка та не менше будь-якого елемента j_0-го стовпця).

Пошук сідлової точки виконується так. У матриці платежів по черзі (послідовно) в кожному рядку знаходять мінімальний елемент. Якщо такий елемент до того ж буде максимальним для свого стовпця, то він називається *сідловим елементом*, а стратегії, що його породжують, визначають сідлову точку. Чисті стратегії, які визначають сідлову точку, називаються *оптимальними чистими стратегіями*. Сенс гри з нульовою сумою – у визначенні оптимальних чистих стратегій та відповідного елемента $h_{i_0 j_0}$ матриці платежів, якщо це можна виконати за відомої матриці платежів.

Зауваження. Гра (матриця платежів) може мати кілька сідлових точок.

Приклад. Знайти розв’язок гри, визначеної такою матрицею платежів

Таблиця.3.1

Матриця платежів

B_j / A_i	1	2	3	4	α_i (min)
1	1	6	2	-4	-4
2	2	3	4	2	2
3	-1	7	-5	1	-5
β_j (max)	2	7	4	2	

Розглядаємо по черзі рядки матриці та знаходимо в кожному рядку мінімальний елемент α_i, записуємо його величини в крайній правий стовпець табл.3.1. Для першого рядка найменший елемент $\alpha_i = h_{1,4}$= -4 не може бути сідловим, бо він не є найбільшим у четвертому стовпці.

Для другого рядка мінімальне значення виграшу α_2= 2 може бути досягнуто за умови, що партнер вибере або першу, або четверту стратегію, але величина 2 є найбільшою для першого та четвертого стовпців, а це означає, що елементи $h_{2,1}$ та $h_{2,4}$ – сідлові і створюють розв’язок:

- оптимальна стратегія першого гравця - друга; партнер має за цієї умови дві оптимальні стратегії - першу та четверту;

- ціна модельованої гри дорівнює 2.

Проаналізувавши третій рядок матриці виграшів табл.3.1, необхідно переконатися, що цей рядок не може мати сідлових елементів. Отже, гра з представленою в табл.1 матрицею виграшів має дві сідлові точки в чистих стратегіях $h_{2,1}$ та $h_{2,4}$; оптимальні стратегії названі вище.

Досвід моделювання скінченних антагоністичних ігор показує, що розв'язок чистих стратегіях – це виняток, а не закономірність. Розглянемо моделі ігор при відсутності сідлових точок.

3.4. Розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях

Проаналізуємо можливий перебіг гри з матрицею платежів

$$H = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

враховуючи той факт, що за відомої матриці платежів невідомо, які стратегії оберуть гравці. Виконаємо оцінку можливого виграшу (програшу) гравців. Якщо гравець A вибере першу стратегію, сподіваючись, що найгірше буде, якщо гравець B вибере свою другу стратегію, за якої його програш дорівнюватиме 1, то відповідно виграш гравця A теж дорівнюватиме 1. Але гравець B, аналізуючи матрицю H, очікує від гравця A вибору другої стратегії, бо за такого вибору гравець A матиме щонайменше виграш 3. Якщо гравець B вибере першу стратегію, за інших стратегій гравця B виграш A буде лише збільшений. Для гравця B вибір першої стратегії ризикований, бо якщо гравець A уже вибрав свою першу стратегію, то гравець B програє 8.

Питання вибору гравцями своїх найкращих стратегій за алгоритмом, не може бути вирішене однозначно. Іншими словами, модель гри за наведеної матриці H не має розв'язків у чистих стратегіях. У такій ситуації стає важливим, щоб супротивник не вгадав, яка стратегія буде використана.

У загальному випадку в іграх, які моделюють конфліктні ситуації, нижня та верхня ціни гри, як правило, не співпадають; розв'язок таких задач не може бути знайдений у чистих стратегіях. Виникає питання: чи існує розв'язок за таких умов? як його знайти, якщо він є?

Якщо гравець A, виконавши аналіз матриці платежів, скористається своєю максимінною стратегією, то він матиме виграш не менше α (нижньої ціни гри). Гравець B за своєї мінімаксної стратегії буде мати програш не більший β (верхньої ціни гри). Проміжок $[\alpha, \beta]$ – це область невизначеності, в межах якої гравець A має певну ймовірність збільшити свій виграш, а гравець B – зменшити програш. Тобто за наведеної матриці виграшів немає можливості однозначно визначити кожному гравцеві свої стратегії.

Якщо досліджувана гра одноразова, то теоретично гравець A не має можливості збільшити виграш, якщо не ризикувати. Зовсім іншою буде ситуація, коли гра повторюється багаторазово; за цих умов можна збільшити середній гарантований виграш гравця A за рахунок певної випадкової комбінації чистих стратегій.

Вектор, компоненти якого показують ймовірності доцільного використання гравцем своїх чистих стратегій у багаторазовій грі, називається змішаною стратегією гравця.

Позначимо в загальному випадку змішані стратегії першого гравця $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, другого гравця $\overline{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, де p_i(i = 1, 2,..., m), q_j(j = 1, 2,..., n) – ймовірності використання відповідними гравцями своїх чистих стратегій у багаторазовій грі. Оскільки p_i, та q_j, за означенням, є ймовірностями, то вони задовольняють умовам:

$$p_i \geq 0;\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1; \tag{3.4}$$

$$q_j \geq 0;\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

За такого означення змішаних стратегій чисті стратегії i та j гравців можна тлумачити як змішані стратегії, в яких усі компоненти векторів $\overline{p}$ і $\overline{q}$ дорівнюють нулю, за винятком компонент на i-му та j-му місцях, які дорівнюють 1. Тобто якщо використовується i-та чиста стратегія, то $\overline{p} = (0,0,\ldots,p_i = 1;\ldots,0)$, відповідно $\overline{q} = (0,0,\ldots,q_j = 1;\ldots,0)$.

Оскільки гра антагоністична, то природно допустити, що використання гравцями своїх стратегій незалежне, тому ймовірність події, що перший гравець вибере i-ту стратегію, а другий – j-ту, дорівнює $p_i q_j$

.

Функція змішаних стратегій

$$F(\overline{p},\overline{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i h_{ij} q_j \tag{3.5}$$

називається *функцією платежів гри з матрицею* $[h_{ij}]_{m\times n}$. $F(\overline{p},\overline{q})$є функцією змінних p_i та q_j.

Функція платежів визначає величину математичного сподівання виграшу H (1) гравця A (його "середнього виграшу" за відомих змішаних стратегій обох гравців).

Залежність (6) у матричній формі можна записати так:

$$F(\overline{p},\overline{q}) = \overline{p}H\overline{q} \tag{3.6}$$

На множині своїх змішаних стратегій перший гравець, прагнучи досягти

найбільшого значення величини середнього виграшу, мусить так вибрати вектор $\overline{p}$ (ймовірності використання певних чистих стратегій), щоб максимум мінімальних значень середнього виграшу $H(1)$ був найбільшим за будь-якої протидії суперника тобто:

$$H(1) = \max_{\bar{p}} \min_{\bar{q}} \overline{p} H \overline{q}.$$

Стратегія $\overline{p}^0$, за якої величина $H(1)$ досягає найбільшого значення, називається максимінною, або оптимальною для гравця A.

Аналогічно метою другого гравця є досягнення ситуації, коли максимальний програш $H(2)$ досягає мінімуму, тобто:

$$H(2) = \min_{\bar{q}} \max_{\bar{p}} \overline{p} H \overline{q}$$

Стратегія $\overline{q}^0$, за якої величина $H(2)$ досягає свого мінімального значення, називається мінімаксною, або оптимальною для гравця B.

Для оптимальних стратегій $\overline{p}^0$ і $\overline{q}^0$ виконується умова:

$$H(2)(\overline{p}, \overline{q}^0) \le F(\overline{p}^0, \overline{q}^0) \le H(1)(\overline{p}^0, \overline{q}) \tag{3.7}$$

Залежність (3.5) показує, що використання у грі оптимальних змішаних стратегій гарантує першому гравцеві виграш, не менший величини $F(\overline{p}^0, \overline{q}^0)$, а другому – програш, не більший величини $F(\overline{p}^0, \overline{q}^0)$. Величина $V = F(\overline{p}^0, \overline{q}^0)$ називається ціною гри.

Залежність (3.5) можна тлумачити і так:

а) жодна стратегія першого гравця не забезпечить йому виграшу більшого, ніж ціна гри, якщо другий гравець використає свою мінімаксну стратегію; середній очікуваний виграш першого гравця за названих умов обчислюється як $H(1) = \overline{p}\ H\overline{q}^0$;

б) за будь-якої стратегії другого гравця його програш не може бути меншим, ніж ціна гри, якщо перший гравець використає свою максимінну стратегію; середній очікуваний програш другого гравця за названих умов обчислюється як $H(2) = \overline{p}^0 H \overline{q}$.

Сформулюємо основну теорему теорії гри.

Теорема Неймана (без доведення). У змішаних стратегіях будь-яка скінченна матрична гра має хоча б одну сідлову точку.

Теорема Неймана гарантує, що за будь-якої скінченної матричної гри існує хоча б одна пара оптимальних (максимінної та мінімаксної) змішаних стратегій, до того ж за таких стратегій виконується умова:

$$H(1) = V = H(2).$$

Якщо, $V = F(\overline{p}^0, \overline{q}^0)$, тобто ціна гри дорівнює нулю, то гра називається *справедливою*.

Розглянемо деякі особливості розв’язання матричних ігор. Наголосимо, що в оптимальній змішаній стратегії гравців можуть бути і не використаними за умови, що ймовірності таких чистих стратегій дорівнюють нулю.

Активними називаються такі чисті стратегії гравця, які входять в оптимальну стратегію з ймовірностями, відмінними від нуля.

Пошук оптимальних стратегій суттєво ускладнюється. Якщо розміри матриці платежів зростають. Розглянемо умови, які дозволяють зменшити розмірність матриці платежів, не порушуючи розв’язку задачі.

Рядки (рядки або стовпці) матриці платежів називають *дублюючими,* якщо їх елементи тотожні. Для розрахунків залишають лише один з дубльованих рядів.

У теорії матричних ігор доведено, що коли елементи одного рядка не менше відповідних елементів другого рядка, то в оптимальну змішану стратегію можуть бути введені лише стратегії домінуючих рядків, тобто рядки, над якими є домінуючи, можна вилучити.

Для гравця, який контролює величину свого можливого програшу, напевно, недоцільними є ті стратегії, величини програшів за яких більші, ніж за його інших стратегій і за будь-яких стратегій гравця A. Тому, якщо в матриці платежів є стовпці, елементи яких не менші елементів інших стовпців, такі стовпці доцільно опустити (гравцеві B, напевно, недоцільно користуватися відповідними стратегіями).

Ймовірностями чистих стратегій, номери яких відповідають номерам опущених рядів матриці платежів, необхідно дати нульові значення.

Приклад. Дано матрицю платежів

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

у якій третій рядок домінує над другим, Вилучимо другий рядок:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

В одержаній матриці другий стовпець домінує над третім. Вилучивши другий стовпець, одержуємо матрицю платежів.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Якщо знайти розв'язок гри для одержаної матриці, то легко використати для побудови розв'язку гри з вихідного матрицею H, присвоївши номерам стратегій, які відповідають номерам вилучених рядів, нульового значення.

Другий спосіб спрощення матриці виграшів ґрунтується на доведеній у теорії грі властивості. За якою *афінне перетворення* матриці платежів (тобто перетворення (перерахунок) усіх елементів матриці H за правилом не змінює розв'язків гри, до того ж ціна гри перетвореною матрицею дорівнює . Наведена властивість означає, що для побудови матриці платежів не має значення, в яких одиницях вимірюються виграші (програші), а додавання (віднімання) певної величини на таку ж величину змінить виграш (програш), не змінивши розв'язок гри.

Нагадаємо. Що під розв'язком розуміють упорядковану сукупність ймовірностей використання певних чистих стратегій. Величина виграшу (програшу) буде залежати від одиниці виміру елементів матриці платежів.

Афінне перетворення матриці платежів доцільно використати для її спрощення: якщо в клітинах матриці є дроби зі спільним знаменником. То всю матрицю можна помножити на деяку сталу величину, щоб одержати цілі числа; якщо багато елементів матриці є тотожними, то їх величину можна відняти від елементів усієї матриці, щоб мати нулі на відповідних позиціях. До того ж будь-яку антагоністичну гру можна перевести у клас справедливих: для цього необхідно від кожного елемента вихідної матриці платежів відняти ціну гри. Але слід пам'ятати, що, знайшовши розв'язок, треба повернутися до змісту вихідної задачі.

Задача 3.1

Необхідно закласти сад, користуючись двома видами фруктових дерев на одиниці площі однакова, а чистий зиск через певний час від кожного дерева на одиницю витрат щорічно визначатиметься в залежності від умов експлуатації. Під несприятливими умовами слід розуміти не лише природні, а й рівень догляду в залежності від матеріально – технічних можливостей. Несприятливі умови будемо розглядати як протидіючого гравця, наголосивши, що несприятливі умови для одного виду дерев можуть бути сприятливими для іншого.

Умови / Вид дерева	Сприятливі	Несприятливі
1	0,7	0,4
2	0,3	0,6

Випишемо матрицю виграшів:

$$H = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Скориставшись можливостями афінних перетворень, помножимо всі елементи матриці на 10 і запишемо у вигляді:

$$H = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Дослідимо задачу на пошук розв'язку в чистих стратегіях, тобто доцільності скористатися лише одним видом дерев.

Величина $H(1) = \alpha = \max_i \min_j h_{ij} = 4$.

Величина $H(2) = \beta = \min_j \max_i h_{ij} = 6$.

Нижня та верхня ціни гри не співпадають, розв'язку в чистих стратегіях немає. Отже, розв'язок необхідно шукати у змішаних стратегіях, тобто шукати оптимальне співвідношення між кількостями дерев першого та другого видів, розглядаючи таке співвідношення як випадкову величину. Садіння дерев першого виду будемо вважати за першу стратегію, дерев другого виду – за другу стратегію. Позначимо p випадкову частину дерев першого виду, тоді частка дерев другого виду становитиме $q = 1 - p$, а середній очікуваний зиск H_{1c} (математичне сподівання величини зиску) за сприятливих умов дорівнюватиме:

$$H_{1c} = 7p + (1 - p) = 4p + 3 \tag{3.8}$$

середній очікуваний зиск за несприятливих умов.

$$H_{1H} = 4p + 6(1 - p) = -2p + 6 \tag{3.9}$$

Виберемо прямокутну систему координат та побудуємо в ній графіки (3.8), (3.9), обравши певний масштаб.

Кожний із графіків буде зображений відрізками прямої, які перетинаються в точці T. Позначимо відрізки A_1A_1' та A_2A_2'. Якщо перший гравець (садівник) вибере певну величину p (частку дерев першого виду), то за сприятливих умов (перша стратегія "партнера") його очікуваний середній виграш (зиск) буде зображений точкою H_{1c} перетину прямої p з відрізком A_1A_1', за несприятливих умов – точкою перетину H_{1H} цієї ж прямої з відрізком A_2A_2'. Проміжні значення величини середнього очікуваного зиску розташовані між точками H_{1c} та H_{1H}. На ці значення можна сподіватися, якщо "партнер" буде користуватися змішаними стратегіями (певне співвідношення сприятливих і несприятливих умов). Але перший гравець (садівник) прагне мати найбільший, але гарантований зиск, величина якого досягається за умови, що $p=0,5$. Практичний висновок: за даних умов задачі доцільно висадити порівну дерева першого та другого видів.

Найбільший гарантований зиск за цих умов буде при $p=0,5$. Пропонуємо довести, що поставлена задача дає розв'язок за умови, що матриця H має вигляд:

$$H=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

3.5. Приведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Для побудови алгоритмів розв'язання задач матричних ігор використовується властивість оптимальних змішаних стратегій: *оптимальна змішана стратегія першого гравця гарантує йому виграш не менший ціни гри за будь-яких стратегій другого гравця і рівний ціні гри за оптимальної стратегії другого гравця.* Використання названої властивості матричних ігор дає можливість привести задачу пошуку оптимальних змішаних стратегій до задачі лінійного програмування. Розглянемо одну з методик побудови відповідного алгоритму.

Маємо матричну гру за відомої матриці платежів $H=\{h_{ij}\}$ ($i=1$, 2,..., m; $j=1$, 2,..., n). Перший гравець має чисті стратегії $A_1, A_2, \ldots, A_m$, другий – $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Необхідно знайти оптимальні змішані стратегії $S_A^0=(p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0)$ та $S_B^0=(q_1^0, q_2^0, \ldots, q_m^0)$, де p_i^0 та q_j^0 – ймовірності використання відповідних чистих стратегій гравцями. Використовуючи можливість афінних перетворень матриці платежів, без застережень можна вважати, що $h_{ij}\geq 0$ і $V>0$.

Якщо перший гравець використовує свою оптимальну змішану стратегію $S_A^0=(p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0)$ проти будь-якої чистої стратегії B_j; другого гравця, то його очікуваний гарантований виграш, тобто математичне сподівання виграшу $H_j=\sum_{i=1}^{m} p_i^0 h_{ij}$ ($j=1$, 2,..., n). Наголосимо, що значення $\{p_i^0\}$ поки що невідомі. За оптимальної стратегії $S_A^0=(p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0)$ гравця A його середні виграші за будь-якої чистої стратегії супротивника будуть не менше ціни гри V, тому можемо записати і гарантувати виконання системи нерівностей:

$$h_{11}p_1^0+h_{21}p_2^0+\ldots+h_{m1}p_m^0\geq V,$$

$$h_{12}p_1^0+h_{22}p_2^0+\ldots+h_{m2}p_m^0\geq V,$$

(3.10)

………………………………..

$$h_{1n}p_1^0+h_{2n}p_2^0+\ldots+h_{mn}p_m^0\geq V.$$

Кожну з наведених нерівностей помножимо на $1/V$ і введемо нові змінні:

$$x_1 = p_1^0/V; x_2 = p_2^0/V; \ldots; x_m = p_m^0/V. \qquad (3.11)$$

За нових змінних система (3.9) запишеться так:

$$h_{11}x_1 + h_{21}x_2 + \ldots + h_{m1}x_m \geq 1,$$

$$h_{12}x_1 + h_{22}x_2 + \ldots + h_{m2}x_m \geq 1,$$

(3.12)

……………………………..

$$h_{1n}x_1 + h_{2n}x_2 + \ldots + h_{mn}x_m \geq 1,$$

Скориставшись умовою

$$p_1^0 + p_2^0 + \ldots + p_m^0 = 1$$

(сума всіх ймовірностей дорівнює ймовірності достовірної події) та (3.12), маємо: $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1/V$. Мета першого гравця – максимізувати свій гарантований виграш, тобто ціну гри V. Але максимізація ціни гри V обумовлює мінімізацію величини $1/V$, тому розв'язання задачі пошуку величин $x_1, x_2, \ldots, x_m$ можна сформулювати так: *знайти величини змінних* $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *так, щоб вони задовольняли системі лінійних обмежень* (3.12) *за умови досягнення найменшого значення лінійної функції:*

$$Z = x_1 + x_2 + \ldots + x_m.$$

(3.13)

Розв'язавши сформульовану задачу лінійного програмування (3.12), (3.13) та скориставшись (3.12), одержуємо оптимальну змішану стратегію для першого гравця $S_A^0 = (p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0)$ та максимальний гарантований виграш V.

Для розв'язання задачі пошуку оптимальних змішаних стратегій

$S_B^0 = (q_1^0, q_2^0, \ldots, q_m^0)$ другого гравця використовуються умови:

а) середній очікуваний програш другого гравця за умови використання ним оптимальної стратегії не перевищить (не буде більшим) ціни гри, які б стратегії не використовував перший гравець;

б) гравець B прагне мінімізувати свій гарантований програш, тобто досягти максимуму величини $1/V$.

За названих умов змінні $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_m^0$ задовольняють нерівностям:

$$
\begin{aligned}
&h_{11} q_1^0 + h_{21} q_2^0 + \ldots + h_{m1} q_m^0 \geq V, \\
&h_{12} q_1^0 + h_{22} q_2^0 + \ldots + h_{m2} q_m^0 \geq V, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&h_{1n} q_1^0 + h_{2n} q_2^0 + \ldots + h_{mn} q_m^0 \geq V.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Якщо ввести нові змінні

$$y_j = q_{ij}^0 / V \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.15}$$

то система (3.13) матиме вигляд:

$$
\begin{aligned}
&h_{11} y_1 + h_{21} y_2 + \ldots + h_{m1} y_m \geq 1, \\
&h_{12} y_1 + h_{22} y_2 + \ldots + h_{m2} y_m \geq 1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&h_{1n} y_1 + h_{2n} y_2 + \ldots + h_{mn} y_m \geq 1.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

До того ж змінні (j =1, 2,..., n) мають задовольнити умові:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1/V \tag{3.17}$$

Таким чином, розв’язання задачі пошуку оптимальних стратегій для другого гравця приведено до задачі лінійного програмування: *знайти величини змінних* $y_j \geq 0$ (j =1, 2,..., n) *так, щоб вони задовольняли системі лінійних обмежень за умови досягнення найбільшого значення лінійної функції:*

$$Z^* = y_1 + y_2 + \ldots + y_n. \tag{3.18}$$

Порівнявши задачі лінійного програмування (3.13), (3.14) та (3.16), (3.18), до яких зведені задачі пошуку оптимальних стратегій задачі матричної гри, робимо висновок, що названі задачі лінійного програмування спряжені. Доцільно наголосити, що для пошуку оптимальних змішаних стратегій у конкретній моделі задачі гри треба вибирати ту із взаємноспряжених задач, розв'язок якої легше знайти, а розв'язок другої (іншої) знаходити, використовуючи теореми спряженості.

Задача 3.2.

Підприємство може випускати чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4, одержуючи прибуток у залежності від попиту, який умовно може бути визначений трьома різними станами B_1, B_2, B_3. Побудуємо матрицю H, виграшів, елементи якої h_{ij} визначають прибуток підприємства за умови випуску i – ої продукції при попиті на неї.

$$H = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Визначити оптимальні пропорції у виробництві продукції, які б гарантували деяку середню величину прибутку за будь-якого попиту, вважаючи його невизначеним.

Проаналізувавши матриці, робимо висновок, що третій рядок домінує над четвертим, тому для подальшого четвертий рядок вилучимо. Економічно це означає недоцільність виробництва продукції четвертого виду за даних умов. Розв'язання задачі побудуємо як дослідження моделі гри виробника з невідомими умовами попиту.

Визначимо верхню та нижню ціни гри. Розрахунки наведені в табл. 3.2

Таблиця 3.2.

Попит / Вид продукції	B_1	B_3	B_4	$\alpha_i = \min_j h_{ij}$
A_1	3	6	8	3
A_2	9	4	2	2
A_3	7	5	4	4
$\beta_j = \max_i h_{ij}$	9	6	8	4 / 6

Оскільки, $\max_i \min_j h_{ij} = 4 \neq \min_j \max_i h_{ij} = 6$, то задача не має розв'язку в чистих стратегіях і оптимальний розв'язок будемо шукати у змішаних стратегіях:

$$S_A^0 = (p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0),\ S_B^0 = (q_1^0, q_2^0, \ldots, q_m^0).$$

Введемо нові змінні $p_i = p_i^0 / V$ (i=1, 2, 3), та $y_j = q_j^0 / V$ (j =1, 2, 3). Використовуючи залежності (3.13), (3.14) та (3.16), (3.18), запишемо дві спряжені задачі лінійного програмування:

$$\begin{array}{ll} \text{Задача 1} & \text{Задача 2} \\ 3x_1+9x_2+7x_3\geq 1 & 3y_1+6y_2+8y_3\leq 1 \\ 6x_1+4x_2+5x_3\geq 1 & 9y_1+4y_2+2y_3\leq 1 \\ 8x_1+2x_2+4x_3\geq 1 & 7y_1+5y_2+4y_3\leq 1 \\ x_i\geq 0;\ i=1,2,3 & y_j\geq 0;\ j=1,2,3 \\ Z=x_1+x_2+x_3\to\min; & Z^*=y_1+y_2+y_3\to\max; \end{array} \qquad (3.19)$$

Розв'яжемо симплекс – методом задачу 2, бо для неї легше знайти допустимий базисний розв'язок. Приведемо задачу 2 до стандартного вигляду, скориставшись додатковими змінними:

$$\begin{aligned} 3y_1+6y_2+8y_3+y_4&=1 \\ 9y_1+4y_2+2y_3+y_5&=1 \\ 7y_1+5y_2+4y_3+y_6&=1 \\ y_j\geq 0;\ j&=1,2,3,4,5,6 \end{aligned}$$

$$Z^*=y_1+y_2+y_3\to\max;$$

У табл.3.2 записані вихідна та симплекс – таблиці задачі 3.2. Її базисний розв'язок $\overline{Y}$=(0; 0; 0; 1; 1; 1). Введемо в базис y_2 та вилучимо з базису y_4. Виконавши аналіз симплекс – таблиці першого кроку симплексних перетворень, доходимо висновку, що з базису доцільно вилучити y_6 та ввести y_1.

Таблиця 3.3.

БЗ		ВЗ			b_{io}/b_{is}
		$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	
y_4	1	3	6	8	1/6

y_5	1	9	4	2	1/4
y_6	1	7	5	4	1/5
f	0	-1	-1	-1	
Перший крок симплексних перетворень					
БЗ		ВЗ			b_{io}/b_{is}
		$-y_1$	$-y_4$	$-y_3$	
y_2	1/6	3/6	1/6	8/6	1/3
y_5	1/3	7	-4/6	-10/3	1/27
y_6	1/6	9/2	-5/6	-8/3	1/27
f	1/6	-1/2	1/6	1/3	
Другий крок симплексних перетворень					
БЗ		ВЗ			b_{io}/b_{is}
		$-y_6$	$-y_4$	$-y_3$	
y_2	4/27	-1/9	7/27	44/27	
y_5	2/27	-14/9	17/27	22/27	
y_1	1/27	2/9	-5/27	-16/27	
f	5/27	1/9	2/27	1/27	

Оскільки елементи останнього рядка симплекс – таблиці другого кроку перетворень додатні, то оптимальним розв’язком задачі 3.2 (3.19) є вектор з такими компонентами $\overline{Y^0}=$(1/27; 4/27; 0; 0; 2/27; 0).

Використовуючи теореми про властивості розв’язків спряжених задач, визначимо оптимальний розв’язок задачі:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 2/27 & 0 & 1/9 & 0 & 0 & 1/27 \end{array}$$

Отже, оптимальним розв’язком задачі 1 є $\overline{x^0}$ =(2/27; 0; 1/9; 0; 0; 1/27), а $\min Z=\max Z^*=$5/27. Обчислюємо ціну гри $V=1/\max Z^*=1/\min Z=$

27/5 = 5,4.

Оптимальну стратегію $S_A^0 = (p_1^0, p_2^0, ..., p_m^0)$ (план випуску продукції) знаходимо: $p_i^0 = x_i^0 V$ (i=1, 2, 3). Отже, $p_1^0 = 5{,}4 \times 2/27 = 0{,}4$; $p_2^0 = 5{,}4 \times 0$ = 0. Таким чином, підприємству доцільно випускати 40% продукції A_1, 60% продукції A_3 і не випускати продукцію A_2.

Знайшовши оптимальну стратегію попиту S_B^0, маємо: $q_1^0 = 0{,}2$; $q_2^0 =$ 0,8; $q_3^0 = 0$. Таким чином, оптимальний попит знаходиться на 20% у стані B_1, та на 80% у стані B_2. Оптимальним результатам можна дати різне тлумачення, виходячи з конкретної ситуації, наприклад, сезонний попит, попит територіальний і т. ін. Треба врахувати й очікуваний попит, якщо необхідно зберігати продукцію.

При розв'язанні задач скінченних ігор розмірності $m \times n$ доцільно дотримуватися такої схеми:

1) виключити з вихідної платіжної матриці явно невигідні стратегії;

2) знайти верхню та нижню ціни гри та перевірити, чи має гра сідлову точку. Якщо така точка є, то відповідні їй стратегії будуть оптимальними, гра має розв'язок у чистих стратегіях, а ціна гри дорівнює верхній (нижній) ціні;

3) якщо сідлова точка відсутня, розв'язання гри необхідно шукати у змішаних стратегіях, приводячи, наприклад, до задачі лінійного програмування.

На практиці розв'язок у змішаних стратегіях може бути реалізований по-різному. Наприклад, чисті стратегії використовуються в послідовності, заданій відповідними ймовірностями за умови, що гра може повторюватися багато разів. Зі інших умов виконується певний фізичний розподіл у пропорціях, визначених ймовірностями, як це було показано на прикладах планування саду та виробництва.

3.6. Ігри з ненульовою сумою та кооперативні. Моделювання проблем мікроекономіки з використанням математичного апарата теорії гри

Моделі гри з ненульовою сумою використовуються для дослідження ситуації, коли учасники процесу не лише мають антагоністичні цілі, а, навпаки, можуть і вигравати, і програвати водночас. Якщо в моделі гри з *нульовою сумою* кожному учаснику невигідно було інформувати партнера про свою стратегію, бо це могло призвести до зменшення суми виграшу, то за гри з *ненульовою сумою* часто доцільно партнерам координувати свої дії з метою одержання найбільшого виграшу.

Ігри з ненульовою сумою поділяються на *кооперативні* та *некооперативні*. У некооперативних іграх гравці приймають рішення незалежно один від одного або тому, що рішення не можна узгодити або узгодження заборонено правилами гри. Опишемо коротко зміст основних положень розв’язання задачі некооперативної гри. Один із методів розв’язання таких задач ґрунтується на визначенні *точок рівноваги* гри. Пара стратегій $\overline{p}^0$ та $\overline{q}^0$ першого та другого гравців називається *точкою рівноваги за Нешем*, якщо жодному з учасників гри невигідно самостійно відхилятися від тієї стратегії, яка визначає точку рівноваги. Ця умова записується так: $H_1(\overline{p},\overline{q}^0) \le H_1(\overline{p}^0,\overline{q}^0)$ для будь – яких q (H_1 та H_2 – виграші першого та другого гравців).

Розглянемо приклад, наголосивши, що маємо гру з ненульовою сумою, тому виграші першого гравця не дорівнюють програшам другого гравця і в матриці виграшів у кожній клітині має бути відповідно дві величини:

$$H = \begin{bmatrix} (5;\ 1) & (0;\ 0) \\ (0;\ 0) & (1;\ 5) \end{bmatrix}.$$

За наведеної матриці гри H пари стратегій $\overline{p}^0$ = (1; 0), $\overline{q}^0$ =(1; 0) та $\overline{p}^0$ = (0; 1), $\overline{q}^0$ = (0; 1) визначають дві точки рівноваги. Дійсно, якщо перший гравець вибрав першу стратегію, то другому гравцеві доцільно вибрати теж першу стратегію. За таких умов виграш першого гравця буде 5, а другого – 1. Якщо ж другий гравець, знаючи, що перший вибрав першу стратегію, вибере другу стратегію, то виграш у обох гравців дорівнюватиме нулю. Аналогічний аналіз підтверджує, що пара $\overline{p}^0$ = (0; 1) і $\overline{q}^0$ = (0; 1) теж визначає точку рівноваги та недоцільність відхилятися від названих стратегій будь – якому із гравців. За наведеної матриці платежів маємо дві точки рівноваги з різними величинами виграшів кожного гравця (5 і 1) та (1 і 5).

У загальній теорії дослідження моделей гри доведено: *для будь – якої скінченої некооперативної гри з ненульовою сумою (біматричні ігри) завжди існує хоча б одна точка рівноваги серед змішаних стратегій. У загальному випадку таких точок може бути декілька, і відповідні величини виграшів різні.*

Кооперативною грою називається гра з ненульовою сумою, в якій гравцям дозволяється узгоджувати перед грою свої дії (стратегії), тобто створювати коаліції. Основна задача кооперативної гри зводиться до розподілу виграшу між членами коаліції. Деякі суттєві поняття теорії кооперативних ігор розглянемо на прикладі моделей економічних відносин двох продавців, які реалізують два види товарів.

Позначимо через X і Y загальну кількість товарів першого та другого видів. Кожний із продавців має власну функцію зиску $h_1(x,y)$ і $h_2(x,y)$, задану на наборі названих товарів. Приймемо, що ці функції неперервні, монотонні по кожній із змінних та угнуті. Припустимо, що вихідна кількість товару кожного виду розподілена між продавцями: перший має x_1, y_1, а другий – -x_2, y_2; $x_1 + x_2 = X, y_1 + y_2 = Y$. За відомих функцій зиску $h_1(x, y)$ та $h_2(x, y)$ необхідно дослідити, чи можуть продавці шляхом обміну кількостями товару збільшити величини свого зиску в порівнянні з вихідним розподілом кількості товару між ними.

Для наочного зображення моделі економічних стосунків за умови сформульованої задачі використовують так званий *ящик Еджворта*. Вибирають дві системи прямокутних координат, розташованих так, як зображено на рис.2.2

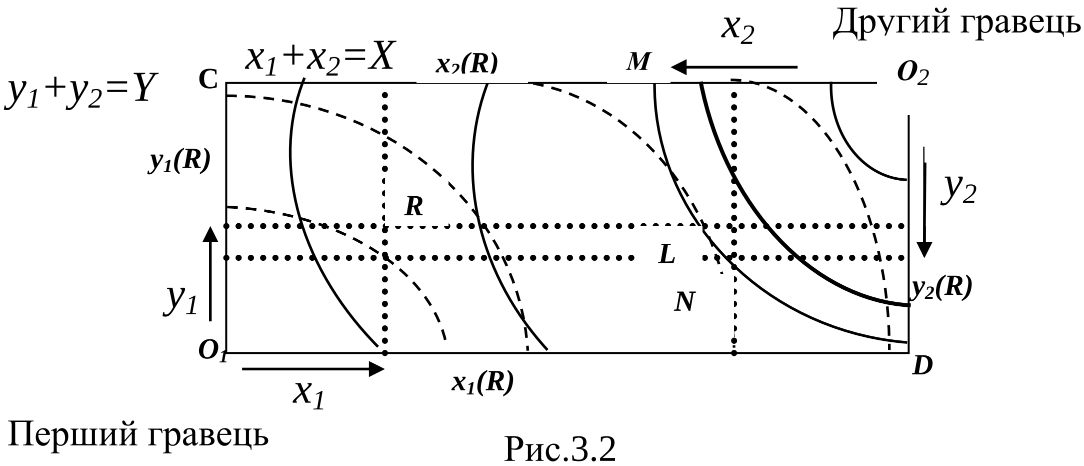


Рис.3.2

Кожна система координат відповідає певному продавцеві. Перетин взаємоперпендикулярних осей названих координат за обраного масштабу (мірила) зображає кількість першого товару (горизонтальна вісь) та другого товару (вертикальна вісь) в обох системах координат. Побудований прямокутник O_1CO_2D є геометричним тлумаченням всіх можливих розподілів товарів між продавцями. Наприклад, точка R у системі координат CO_1D має координати, які відповідають кількостям першого та другого товару в першого продавця. Координати цієї ж точки

R у системі координат DO_2C відповідають кількостям названих товарів у другого продавця. Уявимо, що у вибраних системах координат побудовано сімейства ліній рівня функцій зисків першого та другого продавців: $h_1(x,y)=const$ і $h_2(x,y)=const$. Деякі лінії названих сімейств зображені на мал. 3 неперервною та пунктирною лініями. Стосовно ліній сімейств необхідно наголосити, що через кожну точку проходить одна і лише одна лінія певного сімейства, тобто лінії одного сімейства не перетинаються. Лінії різних сімейств розташовані відносно одна одної довільно. Наголосимо, що коли лінії різних сімейств дотикаються одна одної, наприклад, у точці L, то це не означає, що відповідні функції зисків у цій точці мають тотожні значення.

Аналіз пошуку оптимізації значень функцій зисків $h_1(x,y)$ та $h_2(x,y)$ розпочнемо з визначення *Парето – оптимального розподілу*. Розподіл називається Парето – оптимальним, якщо зиск (виграш) одного з учасників не можна покращити, не зменшуючи величину зиску іншого партнера. Множину точок Парето – оптимального розподілу зручно зобразити, використовуючи ящик Еджворта, якщо маємо лише двох учасників. Розглянемо певну лінію рівня зиску одного з партнерів, наприклад, першого (відрізок лінії MLN на рис. 3.3).

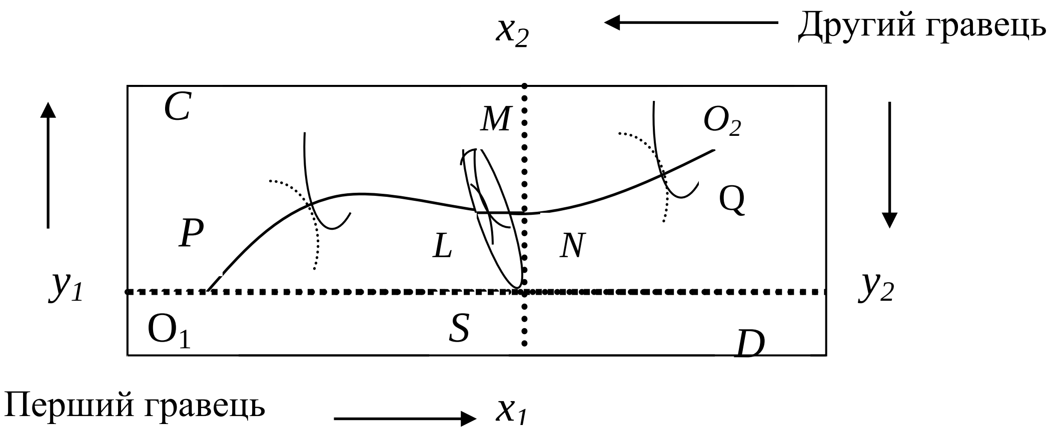


Рис.3.3

Уявимо, що розподіл товарів виконується так, що величини x_1, y_1, узгоджені з фіктивною лінією рівня MLN для першого продавця, такі, що їх координати зворотно задовольняють рівнянню певної лінії рівня. За такої умови величина зиску першого продавця не буде змінюватися. Тому лінію рівня зиску називають ще лінією байдужості. Якщо величини x_1, y_1 змінюються, то другий партнер теж матиме змінну величину зиску. Точкою Парето – оптимального розподілу буде точка L, в якій лінії рівня зисків обох учасників дотикаються одна одної. Розподіл товарів саме в точці дотику досягає таких значень, що його зміни в напрямі спільної дотичної не будуть впливати на зміни зисків обох партнерів. Наголосимо, що досліджуємо не величини зисків, а їх можливу зміну. У точці Парето – оптимального розподілу маємо рівні диференціали функцій зисків обох партнерів за різних у загальному випадку значень величин зиску.

Таким чином, якщо існують Парето – оптимальні точки, то їх множина співпадає з множиною точок дотику ліній рівня функцій зисків обох партнерів. Множина Парето – оптимальних розподілів у просторі товарів називається *контрактною множиною*, бо партнерам доцільно домовлятися між собою за таких величин розподілу товарів; за інших розподілів у одного з партнерів буде втрата величини зиску. Множина Парето – оптимальних розподілів на рис.3.3 зображена лінією PLO.

Розглянемо розв'язок задачі про пошук оптимальних зисків для обох партнерів за умови, що кожний з них мав вихідну (початкову) кількість товарів кожного виду - x_1, y_1 та x_2, y_2 (рис.2.3). Для розв'язання задачі скористаємося її тлумаченням з використанням ящика Еджворта. Пам'ятаючи, що суми $x_1 + x_2 = X, y_1 + y_2 = Y$ є сталі величини, через точку S з координатами (x_1, y_1) в системі координат першого партнера проведемо лінії рівня $h_1(x,y)$ та $h_2(x,y)$, які обмежують заштриховану частину точок площини за умови, що початковий розподіл не є Парето – оптимальним. Якщо товари перерозподіляти так, щоб відповідна зображаюча точка переміщалася в середину заштрихованої області, величини зисків кожного з учасників будуть змінюватися, частина контрактної множини буде розташована в середині заштрихованої області. Ця частина контрактної множини породжує переговорну множину домовленостей, обумовлену вихідним розподілом S. Для того, щоб із вихідного положення S перейти в множину домовленостей, перший продавець повинен передати другому продавцеві частину товару першого виду в обмін на деяку кількість товару другого виду, яку йому необхідно одержати від другого продавця. Обсяги обмінів товарами визначаються відносним розташуванням точки S вихідного розподілу та точки, в якій дотикаються між собою лінії зисків обох партнерів в Парето – оптимальній множині, тобто точки L (рис.3. 3).

Аналіз показує, що партнери можуть шляхом домовленості про перерозподіл вихідних кількостей наявних товарів підвищити величини своїх зисків. Один із можливих способів перерозподілу - обмін певними кількостями товарів.

3.7. Ігри з природою

3.7.1. Позиційні ігри як моделювання проблеми вступу до ринку

Розглянемо одну з можливих моделей розв’язання проблеми доцільності вступу до ринку. Проведемо дослідження такої ситуації. Ринком деякого товару повністю володіє монополіст – виробник – фірма 1, яка за монопольного стану має прибуток у 14 умовних одиниць (у.о.). Високий рівень прибутку підбурює фірму 2, яка вирішує для себе дилему: будувати завод з виробництва такого ж товару чи ні? Фірмі 2 відомо, що фірма 1 може здійснити певні дії на противагу діям фірми 2:

1) знизити удвічі рівень власного виробництва, поступившись частиною ринку фірмі 2; у такому випадку обидві фірми матимуть прибуток по 7 у. о.;

2) зберегти рівень виробництва; насичення ринку товарами обох виробників знизить ціну товару, і як наслідок фірма 1 одержує лише 6 у. о. прибутку, але фірма 2, витративши кошти на організацію виробництва нового товару, матиме не прибуток, а збитки в сумі 2 у. о.

Якщо ж фірма 2 утримається від спроби вступу до ринку, то вона не матиме збитку, але її прибуток дорівнюватиме нулю, фірма ж 1 одержить свій попередній прибуток у 14 у. о. Якщо ж фірма 1 під тиском можливої загрози від фірми 2 знизить рівень виробництва, то її прибуток становитиме 9 у. о. Ненаситність ринку спровокує підвищення цін на монопольний товар.

Модель можливих стосунків між фірмами 1 та 2 може бути описана матрицею виграшів, поданою в табл. 3.4 (першими записані виграші фірми 1).

Таблиця 3.4.

Стратегії фірми 1		Стратегії фірми
Зберегти обсяги виробництва	Зменшити обсяги виробництва	
(6; 2)	(7; 7)	Налаштувати нове виробництво
(14; 0)	(9; 0)	Утриматися

Слушно наголосити, що запропонована модель гри за своїми умовами відрізняється від уже розглянутих. Якщо раніше вважалося, що учасники приймають свої рішення одночасно, не знаючи про рішення свого партнера (це було вельми суттєво), то за умов пропонованої гри фірма 1 може приймати рішення, уже маючи інформацію про рішення фірми 2; саме ця обставина суттєво впливає на розв'язання задачі.

Ігри, які можна реалізувати як певну *послідовність дій* гравців, називаються позиційними; кількість гравців і кроків реалізації може бути довільною. До *позиційних багатокрокових ігор* двох гравців, де кожний партнер приймає рішення, маючи певну інформацію про попередні дії партнера, належать ігри в шахи та шашки.

Оскільки позиційні ігри реалізуються послідовністю певних дій, то їх доцільно представляти не матрицею виграшів, а графом розв’язання, який відображає послідовність дій гравців від вихідної позиції до завершальної. Так, досліджувану гру *вступу до ринку* можна описати графом (рис.3.5), ребра якого віддзеркалюють рішення партнерів, а біля кожної завершальної позиції записані відповідні виграші гравців (на першому місці записані виграші фірми 1).

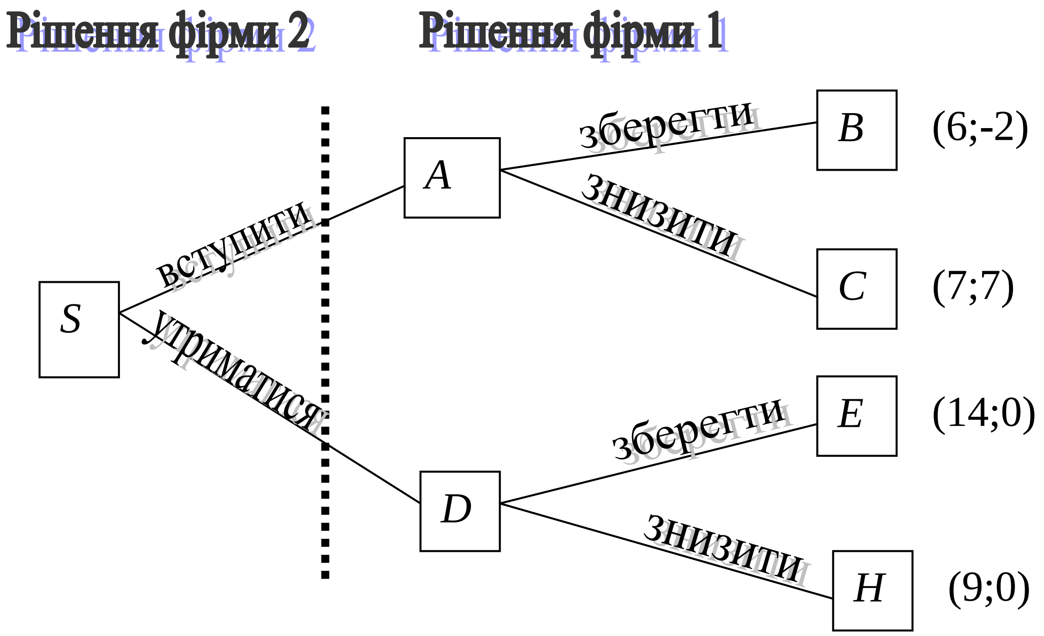


Рис.3.5. Граф гри *вступу до ринку*

Вершини графу гри називаються *позиціями*. Позиції, які безпосередньо можуть відбутися після певної позиції, називаються *альтернативами*. Позиції, які не мають альтернатив, називаються *завершальними*. Шлях від вихідної позиції до завершальної називається *партією*. Досліджувана гра вступу до ринку має чотири партії (мал. 5): $SAB;\ SAC;\ SDE;\ SDH.$

Партії (стратегії) SAC та SDE урівноважені: жодному з партнерів невигідно відхилятися самостійно від обраних стратегій. Партія SDE означає, що фірма 2 утримується від вступу до ринку, в той же час фірма 1 зберігає рівень свого виробництва і має прибуток 14 у.о., а фірма 2 – 0 у.о. Партія SAC показує, що, коли фірма 2 вступає до ринку, а фірма 1 знижує обсяги виробництва, прибутки обох фірм за цих умов однакові – 7 у.о. Виникає питання: яка з двох партій найбільш ймовірна? У *непозиційній грі*, в якій партнери приймають рішення одночасно та незалежно один від другого, реалізація обох партій була б рівноймовірною; немає ніяких підстав віддати перевагу одній з партій (набору стратегій).

Але в позиційній грі мусимо врахувати, що фірма 1 приймає рішення, уже знаючи про рішення фірми 2. Менеджер фірми 2, яка робить перший вибір, має дилему:

а) якщо до ринку не вступати, то нічого не втрачаємо (але й нічого не одержуємо);

б) якщо вступити до ринку, то не виключено, що фірма 1 збереже обсяги виробництва, а ми матимемо збитки в 2 у. о.

Таким чином, якщо користуватися принципом максимізації свого мінімального виграшу, то фірма 2 має обрати стратегію "утриматися від вступу до ринку".

Такі міркування не враховують дуже важливу обставину – умову раціональної поведінки партнерів в їх прагненні одержати максимально можливий прибуток. За такої обставини менеджер фірми 2 мусить вирішити питання "А яка ймовірність того, що фірма 1 збереже обсяги свого виробництва, якщо ми вступимо до ринку? За цих умов фірма 1 одержить менший прибуток (6 у.о.), ніж тоді, коли вона зменшить обсяги виробництва та поділиться частиною ринку з нами (7 у.о.)". Отже, якщо фірма 1 керуватиметься принципом раціональності, то за умови вступу фірми 2 до ринку фірма 1 мусить зменшити обсяги свого виробництва, а не втратити 7 - 6 = 1 у.о. прибутку, аби подавити фірму 2. (Такі міркування не враховують наступні часи та економічний стан фірми 1 після можливого вступу фірми 2 до ринку).

У теорії гри розглянута ситуація класифікується як правдоподібна загроза. У запропонованій моделі гри за обраних величин виграшів загроза фірми 1 зберегти рівень свого виробництва у відповідь на вступ фірми 2 до ринку є неправдоподібною, бо реалізація такої загрози зменшує прибуток фірми 1 у порівнянні з іншими стратегіями. Є підстави стверджувати, що найбільш ймовірною партією буде SAC: фірма 2 вступає до ринку, а фірма 1 зменшує обсяги свого виробництва. Такий розв'язок гри дає матриця виграшів, представлена в табл. 3.4.

Тепер розглянемо приклад моделі гри вступу до ринку з дещо іншими оцінками стратегій. Граф розв'язання цієї гри представлено на рис. 3.6. Аналіз гри за наведеної величини виграшів у кожній партії показує, що загроза фірми 1 зберегти рівень виробництва підтверджується економічно: прибуток фірми 1 – 5 у.о. буде більший, ніж за умови зниження рівня (4 у.о.) та вступу фірми 2 до ринку.

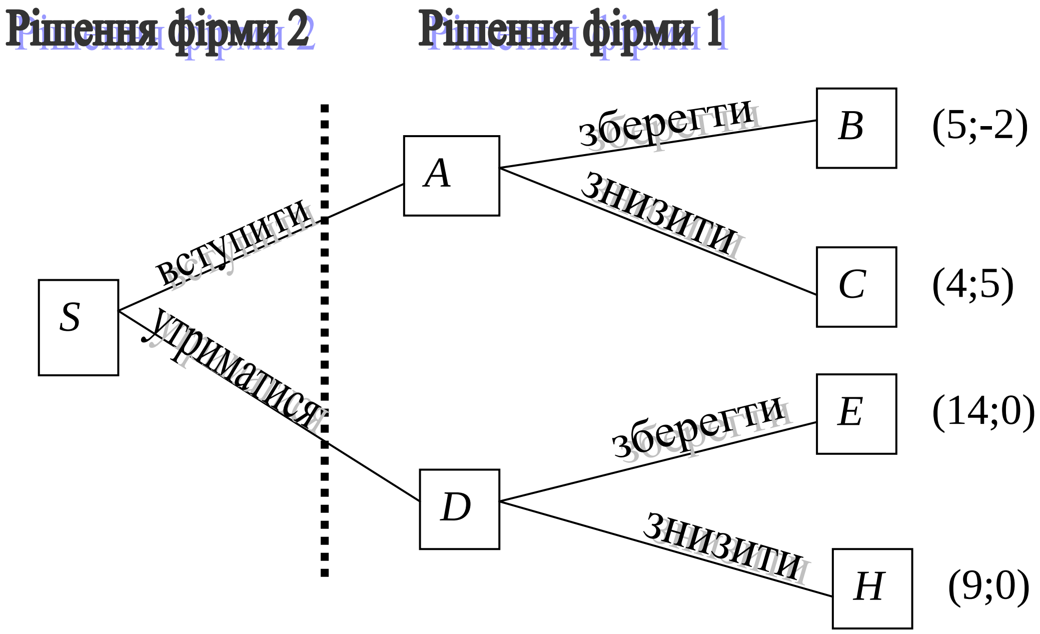


Рис.3.6

Стратегія фірми 1 "зберігати рівень виробництва" є домінуючою. Фірма 1 за такої стратегії одержить більший прибуток, ніж за стратегії "знизити обсяги виробництва", незалежно від стратегії фірми 2. Враховуючи таку ситуацію, фірма 2 змушена буде утриматися від вступу до ринку. Фірма 1 зберігає обсяги виробництва та залишається монополістом на ринку.

Приклад стратегічної гри за умов, представлених на мал. 6, моделює так звану ситуацію стабільної монополії, за якої фірма – монополіст може ефективно реалізувати загрозу знищення своїх потенційних конкурентів. Цьому сприяють чимало факторів: апробована технологія, якість виробництва, реклама, організація збуту, вміння працювати на перспективу і т. ін. За таких обставин в умовах соціальне орієнтованої економіки природним є бажання держави контролювати в певних межах діяльність фірм – монополістів.

Математичний апарат теорії ігор дозволяє ефективно моделювати та досліджувати чимало економічних проблем господарської діяльності.

У моделях теорії гри прийняття управлінських рішень пов’язане з розв’язанням задач, які умовно можна розділити на класи:

1) прийняття рішень за умов однозначності вихідних даних і перебігу керованого процесу в майбутньому; це так звані детерміновані задачі;

2) прийняття рішень за умов неоднозначності як вихідних даних, так і перебігу процесу в майбутньому, коли умови можна оцінити лише з певною мірою ймовірності; це стохастичні задачі управління;

3) прийняття певних рішень за умов невизначеності.

Математичні моделі обґрунтування рішень у задачах першого класу досить широко та змістовно розроблені з використанням певних методів оптимізації: лінійного та нелінійного математичного програмування, теорії управління процесами, перебіг яких моделюється диференціальними та інтегральними рівняннями, динамічного програмування.

Стохастичні моделі управління використовуються за умов, коли відомі можливі стратегії досягнення мети та ймовірні наслідки використання певної стратегії, але модельовані процеси такі, що не можна гарантувати однозначності їх перебігу. Для пошуку стратегій, оптимальних за обраним критерієм якості, використовуються методи, які в цілому можна характеризувати як “оптимізацію в середньому”: оцінюється математичне сподівання показника ефективності кожної з можливих стратегій. Такий підхід дозволяє стохастичну задачу обґрунтування управлінського рішення звести до певної детермінованої задачі. Приклади таких задач було розглянуто в теорії управління запасами.

У моделях третього класу досліджується розв'язання задач, для яких характерно те, що при умові перебігу досліджуваного процесу принципово не можна мати певної інформації ні детермінованої, ні стохастичної. Умови невизначеності поділяються на два класи:

а) перебіг процесу визначається до певної міри наявністю факторів, обумовлених цілеспрямованою дією свідомо протидіючих учасників, які мають певну, але не відому конкретно кожному мету; наприклад, умови конкуренції на вільному ринку, військове або політичне протистояння;

б) процес, стосовно якого необхідно прийняти управлінські рішення, має відбуватися за умов певної невизначеності, але без активної цілеспрямованої протидії та певної байдужості як до умов, так і до наслідків процесу; це так звана природна невизначеність.

Для розбудови моделей ігор з природою необхідно врахувати, що "партнер" не має на меті активну протидію та байдужий до наслідків керованого процесу. Ці обставини обумовлюють певну специфіку побудови моделей гри. Рівень знань законів природи часто недостатній для побудови навіть статистичних моделей щодо багатьох керованих людиною процесів, а іноді бажане сприймається за дійсне.

Розглянемо деякі особливості побудови моделей гри "людина – природа". Приймаючи рішення, людина може скористатися кількома стратегіями – -$A_1, A_2, \ldots, A_m$. Вплив природи на досліджуваний процес можна також змоделювати як використання певної множини стратегій $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$. Якщо з попереднього досвіду відомі ймовірності можливих станів природи, то такі ймовірності називаються *апріорними* (до експериментальними). Якщо людина шляхом експерименту може вдосконалити свої знання про відповідні стани природи стосовно керованого процесу та їх ймовірності, то такі ймовірності називаються *апостеріорними* (після експериментальними). Але необхідно пам’ятати, що експерименти вимагають і коштів, і часу (особливо в економіці) саме тоді, коли рішення необхідно приймати терміново. Тому розглянемо моделі гри з природою без експериментів.

Плануючи свої дії, людина може користуватися як деякими чистими стратегіями A_i (i=1, 2,..., m), так і змішаними:

$$\overline{S}=(p_1, p_2, \ldots, p_m), \text{ де } p_i \geq 0;\ i=1, 2, \ldots, m;\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

за умови, що є можливість оцінити наслідки використання будь – якої чистої стратегії в залежності від будь – якого довільного стану природи Π_j, тобто для кожної (A_i, Π_j) відомий чисельний результат a_{ij} і можна задати матрицю виграшів A досліджуваної гри (табл. 3.5). Елементи матриці A позначимо a_{ij}, наголошуючи на умовності поняття “виграшів”.

Таблиця 3.5

Матриця виграшів A досліджуваної гри

A_i \ Π_j	Π_1	Π_2	…………	Π_n	p_i
A_1 . . A_m	a_{11} . . a_{m1}	a_{12} . . a_{m2}	………… ………… ………… …………	a_{1n} . . a_{mn}	p_1 . . p_m
β_i	β_1	β_2	…………	β_i	
q_i	q_1	q_2	…………	q_i	

Природно, що перш ніж обрати оптимальну стратегію необхідно проаналізувати матрицю A та спростити її, враховуючи можливі домінуючі стратегії людини. Відхиляти стратегії (стани) природи недопустимо, бо природа може перебувати в своєму довільному стані незалежно від того, чи корисно це людині. У задачах досліджуваного типу за критерій ефективності стратегій A_i приймають математичне сподівання а, виграшу за умови використання i – ої стратегії, тобто:

$$a_i = a_{i1}q_1 + a_{i2}q + \ldots + a_{in}q_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j \tag{3.20}$$

($\{q_j\}$ $j = 1, 2, \ldots, n$ – апріорні ймовірності можливих станів природи Π_j). За оптимальну обирається стратегія, за якої величина a_i (3.20) досягає найбільшого значення.

Оскільки оптимальну стратегію задач гри з природою доцільно шукати серед чистих стратегій (природа не може комбінувати свої стани), то користуються іншим методом пошуку, ніж з використанням математичного сподівання величини виграшу (3.20). Маючи матрицю виграшів (табл. 3.5), обчислюють так звану *матрицю ризиків*, яка дозволяє більш чітко виявити переваги певної стратегії за даного можливого стану природи.

Ризиком r_{ij}, якщо користуватися чистою стратегією A_i за Π_j стану природи, називають різницю між максимальним виграшем $\max_i a_{ij}$, який можна було б одержати, якби природа достовірно була в стані Π_j, та виграшем a_{ij}, який можна одержати, використовуючи стратегію A_i, та приймаючи Π_j за можливий стан природи. Таким чином, елементи r_{ij} матриці R ризиків обчислюються за формулою:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.21}$$

(β_j – максимально можливий виграш за Π_j стану природи (тобто максимальний елемент j – стовпця матриці платежів $\beta_j = \max_i a_{ij}$)).

Задача 3.3.

На опалювальний сезон потрібно від 10 до 12 т вугілля в залежності від його якості. Якщо запасу вугілля буде недостатньо, то його можна докупити за умови додаткових витрат у 5 умовних одиниць на 1 т. Якщо ж запас вугілля перевищить необхідні витрати, то затрати на зберігання залишків складуть 2 у.о. на 1 т. Побудувати модель гри та скласти матрицю платежів і ризику.

Можна замовити 10, 11 або 12 т вугілля – це будуть відповідно стратегії A_1, A_2, A_3. Вплив природи на перебіг процесу опалення будемо моделювати як витрати 10, 11 або 12 т у залежності як від якості вугілля, так і від теплового режиму атмосфери, тому вважатимемо, що стани природи Π_1, Π_2, Π_3 – це витрати вугілля відповідно в обсягах 10, 11, 12т.

Елементи матриці платежів (табл.3.6) характеризують додаткові затрати, обумовлені або поставкою вугілля у випадку його нестачі, або зберіганням, якщо з'явився його надлишок.

Таблиця 3.6.

A_j \ Π_j	$\Pi_1(10)$	$\Pi_2(11)$	$\Pi_3(12)$	$\alpha_i = \min_j a_{ij}$
$A_1(10)$	0	-5	-10	-10
$A_2(11)$	-2	0	-5	-5
$A_3(12)$	-4	-2	0	-4
$\beta_j = \min_i a_{ij}$	0	0	0	

Так, якщо замовляти 11 т, а буде витрачено в опалювальний сезон менше 10 т (ситуація A_2, Π_1), то доведеться зберігати 11 - 10 = 1 т, що обумовить додаткові витрати 2 одиниці, а в ситуації (A_1, Π_3), коли було замовлено 10 т, а можливі витрати – 12 т, то на закупівлю додаткових 12 - 10 = 2 т необхідно витратити 10 одиниць.

Використовуючи дані табл. 3.6 та формулу (3.21), побудуємо матрицю ризиків, записану в табл. 3.7.

Таблиця 3.7.

A_i \ Π_j	$\Pi_1(10)$	$\Pi_2(11)$	$\Pi_3(12)$	$\min\limits_j r_{ij}$
$A_1(10)$	0	5	10	10
$A_2(11)$	2	0	5	5
$A_3(12)$	4	2	0	4

Розглянемо розв'язок задачі пошуку оптимальних стратегій за критерієм вибору найбільшого математичного сподівання (3.20) виграшу та найменшого середнього очікуваного ризику за умови, що ймовірності q_1, q_2, q_3 використання обсягів вугілля 10, 11,12т дорівнюють відповідно 0,3; 0,1; 0,6. Маємо:

$$a_1 = 0\times0,3+(-5)\times0,1+(-10)\times0,6 = -6,5;$$

$$a_2 = (-2)\times 0{,}3+0\times 0{,}1+(-5)\times 0{,}6 = -3{,}6;$$

$$a_3 = (-4)\times 0{,}3+(-2)\times 0{,}1+0\times 0{,}6 = -1{,}4.$$

Обчислення показують, що очікувані збитки будуть найменшими - 1,4 одиниць, якщо замовити 12 т.

Обчислимо математичні сподівання величини ризиків, користуючись табл. 3.7:

$$r_1 = 0\times 0{,}3+5\times 0{,}1+10\times 0{,}6 = -\ 6{,}5;$$

$$r_2 = 2\times 0{,}3+0\times 0{,}1+5\times 0{,}6 = -3{,}6;$$

$$r_3 = 4\times 0{,}3+2\times 0{,}1+0\times 0{,}6 = -1{,}4.$$

Величина очікуваного ризику буде найменшою за вибору стратегії A_3 (замовлення 12 т). У наведеному прикладі стратегія, за якої максимізувався середній виграш, співпала зі стратегією, за якої мінімізувався середній очікуваний ризик.

У теорії гри “людина – природа” цей результат доведено в загальному випадку: *стратегії оптимізації максимального середнього виграшу та мінімізації середнього ризику співпадають*.

Якщо немає об’єктивної інформації про апріорні ймовірності, стану природи Π_j ($j=1,\ 2,\ldots,n$) і всі вони уявляються однаково правдоподібними, то їх ймовірності приймаються рівними між собою, тобто $q_j = 1/n$. Такий підхід називають *“принципом недостатнього обґрунтування Лапласа”*. Його використовують у пошуку оптимальної стратегії за критерієм Лапласа:

$$\max_i a_i = \max_i \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad (3.21)$$

Досі ми розглядали методи пошуку оптимальних стратегій за умови певної інформації про ймовірності станів природи, коли, згідно з теорією, оптимальну стратегію можна знайти в множині чистих стратегій.

Розглянемо критерії пошуку оптимальних стратегій за умови відсутності будь-яких відомостей про ймовірності станів природи. Методи, які використовуються при дослідженні таких ситуацій, дозволяють визначити деяку гарантовану величину виграшу на підставі аналізу матриць виграшу або ризику.

3.7.2 Критерій Вальда

Критерій Вальда (крайнього песимізму) – це максимінний критерій, який використовується як для чистих, так і для змішаних стратегій. За критерієм Вальда, вибір оптимальної стратегії виконується з припущенням, що природа діє супроти найгіршим чином, тобто за будь – якої стратегії A_i, в природі очікується такій стан Π_j, за якого виграш приймає найменше значення a_{ij}. За таких умов необхідно обирати ту чисту стратегію A_i, за якої найменший виграш $\min_j a_{ij}$ буде максимальним, тобто оптимальною стратегією буде максимінна чиста стратегія. Для наведеного прикладу $\max_i \min_j a_{ij} = \max_i$(-10; -5; -4) = -4. Отже, оптимальною чистою стратегією, за Вальдом, буде A_3, тобто запас вугілля має бути 12 т, а додаткові витрати дорівнюють 4 одиницям.

Для змішаних стратегій критерій Вальда формулюється так: за оптимальну змішану стратегію приймають ту, за якої мінімальний середній виграш $\min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i$ буде максимальним, тобто змішана оптимальна стратегія визначається за умови:

$$\max_{p_i^0}\min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i$$

У наведеному прикладі для визначення оптимальної стратегії за Вальдом необхідно розв'язати відповідну задачу лінійного програмування.

Результат її розв'язку такий:

$$\overline{p^0} = (2/7;\ 0;\ 5/7), \qquad V = -20/7.$$

З практичної точки зору результат необхідно тлумачити так: очікувані додаткові витрати будуть найменшими та дорівнюватимуть 2,86 одиницям (20/7), а запас вугілля повинен складати 11,43 т ($10\times2/7 + 11\times0 + 12\times5/7$). Розв'язок у змішаних стратегіях більш доцільний, ніж у чистих: рівень запасу та додаткові витрати менші.

3.7.3. Критерій Севіджа

Критерій Севіджа теж будується на допущенні, що від природи очікуються найнесприятливіші стани. За цим критерієм оптимальною стратегією обирають ту з чистих стратегій A_i (i = 1, 2, ..., m), за якої мінімізується величина максимального ризику, тобто на оптимальній стратегії досягається $\min\limits_i \max\limits_j r_{ij}$.

Необхідно наголосити ще раз, що для розв'язання задачі у змішаних стратегіях необхідно мати компоненти вектора $\overline{p^0}$, які можна обчислити, розв'язавши відповідну задачу лінійного програмування.

Для наведеного прикладу оптимальною, за Севіджем, чистою стратегією A_i, буде та, для якої виконується умова:

$$\min_i \max_j r_{ij} = \min_i (10;\ 5;\ 4) = 4$$

тобто стратегія A_3.

Якщо критерій Севіджа використовується на множині змішаних стратегій, то оцінюється середній ризик $\sum_{i=1}^{m} r_{ij} p_i \quad (i=1, \; 2,\ldots,n)$. Найнесприятливішим приймається такий стан природи Π_j, за якого величина середнього ризику досягає найбільшого значення $\max_j \sum_{i=1}^{m} r_{ij} p_i$. За критерієм Севіджа, оптимальною змішаною стратегією буде та, за якої максимальне значення ризику мінімізується, тобто має бути виконана умова:

$$\min_{\bar{p}} \max_j \sum_{i=1}^{m} r_{ij} p_i .$$

3.7.4. Критерій Гурвіца

Критерій Гурвіца, який називають критерієм песимізму – оптимізму, радить вибирати дещо середнє між результатами найбільш і найменш можливих виграшів. На множині чистих стратегій, за критерієм Гурвіца, за оптимальну приймають ту стратегію, для якої виконується умова:

$$\max_i \{\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij}\} \tag{3.23}$$

де $\lambda \in [0;\ 1]$ і вибирається за *суб'єктивними міркуваннями*. За умови, що λ = 1 критерій Гурвіца тотожний критерію Вальда (крайнього песимізму): $\max_i \min_j a_{ij}$; за умови $\min_i \max_j a_{ij}$ λ= 0 маємо критерій крайнього оптимізму: $\max_i \max_j a_{ij}$. Якщо ж виберемо за λ певне проміжне значення від 0 до 1, то одержимо дещо середнє між стратегіями крайнього песимізму та крайнього оптимізму. Коефіцієнт λ є ніби мірою песимізму того, хто приймає рішення про вибір стратегій: чим більш небезпечна ситуація, тим доцільніше обрана λ ближче до 1.

Для наведеного прикладу виберемо λ= 0,6 (це наше бажання), тоді з (3.23) маємо: $\max_i\{0{,}6\min_j + 0{,}4\max_j a_{ij}\} = \max_i h_j$. Розрахунки наведені в табл. 3.8.

Таблиця 3.8

A_i \ Π_j	Π_1	Π_2	Π_3	$\min_j a_{ij}$	0,6 $\min_j a_{ij}$	$\max_j a_{ij}$	0,4 $\max_j a_{ij}$	h_j
A_1	0	-5	-10	-10	-6,0	0	0	-6,0
A_2	-2	0	-5	-5	-3,0	0	0	-3,0
A_3	-4	-2	0	-4	-2,4	0	0	-2,4

Використовуючи результати, записані в останньому стовпці, маємо $\max_i h_j$ = -2,4, що відповідає чистій стратегії A_3, яка і буде оптимальною, за критерієм Гурвіца, при λ = 0,6.

Зауваження. У моделях гри з природою за умови невизначеності її можливих станів доцільно обирати оптимальну стратегію, використовуючи усі три вищеназвані критерії. Якщо при використанні усіх критеріїв оптимальні стратегії тотожні, то це переконлива аргументація для практичного використання результату. Якщо розв’язки не співпадають, необхідно ретельно проаналізувати результати та використати один із них.

3.8. Типові приклади

Приклад 1. Фірма виготовляє устаткування для легкої промисловості. Експертами виробничого відділу фірми розглядаються три конструкторські варіанти устаткування: *А-1, А-2, А-3*. Для спрощення допустимо, що за технічними характеристиками ці три типи майже ідентичні, однак залежно від зовнішнього вигляду та зручності використання кожен тип може мати три модифікації: *М-1, М-2, М-3* залежно від закупленої технології виробництва. Собівартість виготовлення устаткування наведена в табл.

Собівартість виготовлення устаткування, тис. ум.од.

Тип устаткування	Модифікація		
	М-1	М-2	М-3
А-1	10	6	5
А-2	8	7	9
А-3	7	5	8

Конфліктна ситуація виникає в зв'язку з необхідністю вибрати той тип устаткування та його модифікації, який буде затверджений економічним відділом фірми. З погляду виробництва найкращим є найдорожчий варіант, оскільки він дає змогу виробляти дорожчу та конкурентоспроможнішу продукцію, тоді як з погляду економічного відділу фірми найкращим є найдешевший варіант, який потребує найменшого відволікання коштів.

Завдання експертів полягає в тому, щоб запропонувати на розгляд фінансовому відділу такий тип устаткування, який забезпечить якщо не кращий, то в усякому разі не гірший варіант співвідношення вартості та зовнішнього вигляду.

Розв'язання.

Якщо виробничий відділ запропонує виготовлення устаткування типу А-1, то економічний відділ настоюватиме на придбанні технології, що дає модифікацію М-3, оскільки цей варіант найдешевший. Якщо зупинитись на устаткуванні виду А-2, то скоріш за все затверджено буде М-2, і нарешті для типу А-3 – також М-2.

Очевидно, що з усіх можливих варіантів розвитку подій експертам виробничого відділу необхідно настоювати на варіанті впровадження у виробництво устаткування типу А-2, оскільки це дає найбільше значення за реалізації найгірших умов – 7 тис. ум. од.

Наведені міркування ілюструють максимінну стратегію, отже:

$\min\limits_{i=1} a_{ij} = \min\{10;6;5\} = 5$,

$\min\limits_{i=2} a_{ij} = \min\{8;7;9\} = 7$,

$\min\limits_{i=3} a_{ij} = \min\{7;5;8\} = 5$,

$\alpha = \max\limits_{j} \min\limits_{i} a_{ij} = \max\{5;7;5\} = 7$ - нижня ціна гри.

Якщо учасник відхилиться від своєї оптимальної (максимінної) стратегії і вибере першу чи третю, то зможе отримати виграш, що дорівнює лише 5.

Розглянемо тепер ситуацію з погляду спеціалістів економічного відділу. Виходячи з витрат на виробництво устаткування, вибір технології, що дає змогу виготовляти модифікацію М-1, може призвести до найбільших витрат у тому разі, коли вдасться затвердити випуск устаткування типу А-1. Для технології виготовлення устаткування з модифікацією М-2 найбільші можливі витрати становлять 7 тис. ум. од. – для устаткування А-2, а з модифікацією М-3 – також для А-2. Для економістів найкращим є вибір технології, що забезпечує виготовлення устаткування модифікації другого виду, оскільки за найгірших умов вона дає найменші витрати–7 тис.ум.од.

Останні міркування відповідають мінімаксній стратегії, що визначає верхню ціну гри.

$\max\limits_{j=1} a_{ij} = \max\{10;8;7\} = 10$,

$$\max_{j=2} a_{ij} = \max\{6;7;5\} = 7,$$

$$\max_{j=3} a_{ij} = \max\{5;9;8\} = 9,$$

$\beta = \min_i \max_j a_{ij} = \min\{10;7;9\} = 7$ –верхня ціна гри.

Якщо гравець відхилиться від своєї оптимальної (мінімаксної) стратегії, то це призведе до більших витрат. Якщо буде вибрано першу стратегію, то можливий програш дорівнюватиме 10, а якщо буде вибрано третю стратегію, то можливий програш становитиме 9. Наведена гра є парною грою із сідловою точкою.

Приклад 2. Маємо гру гравців А і В, яка задана такою платіжною матрицею:

Гравець В

$$\text{Гравець А} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Необхідно визначити ціну гри та оптимальні стратегії гравців А і В.

Розв'язання.

Для гравця А перша стратегія є домінуючою над третьою, тому третю стратегію треба вилучити.

Для гравця В перша стратегія є домінуючою на п‘ятою, яку можна виключити як збитковішу, а тому невигідну для гравця В. Отже маємо матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Розглянемо стратегії гравця А:

$$\min_{i=1} a_{ij} = \min\{6;3;8;5\} = 3$$

$$\min_{i=2} a_{ij} = \min\{6;5;7;6\} = 5,$$

$$\min_{i=3} a_{ij} = \min\{4;4;3;8\} = 3,$$

$\alpha = \max_{j} \min_{i} a_{ij} = \max\{3;5;3\} = 5$ –нижня ціна гри.

Отже, нижня ціна гри буде дорівнювати α=5, а гравець А для максимізації мінімального виграшу має вибрати другу із трьох можливих стратегій. Ця стратегія є максимінною у даній грі.

Для гравця В:

$$\max_{j=1} a_{ij} = \max\{6;6;4\} = 6,$$

$$\max_{j=2} a_{ij} = \max\{3;5;4\} = 5,$$

$$\max_{j=3} a_{ij} = \max\{8;7;3\} = 8,$$

$$\max_{j=4} a_{ij} = \max\{5;6;8\} = 8$$

$\beta = \min_{i} \max_{j} a_{ij} = \min\{6;5;8;8\} = 5$ –верхня ціна гри.

Гравцю В доцільно вибрати також другу стратегію, яка є мінімаксною у грі. Оскільки α=β, то ця гра має сідлову точку. Ціна гри дорівнює 5. Оптимальною максимінною стратегією гравця А є друга з трьох можливих його стратегій. Для гравця В оптимальною є також друга із чотирьох можливих.

Приклад 3. Фірма розробила шість бізнес-планів $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ для їх здійснення у наступному році. Залежно від зовнішніх умов (погодного стану, ринку тощо) виділено п'ять ситуацій $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5)$. Для кожного варіанта $X_i \quad (i = \overline{1,6})$ бізнес-плану та зовнішньої ситуації $Y_j \quad (i = \overline{1,5})$ обчислені прибутки, які наведені у табл.

Вар іант	Зовнішня ситуація				
	Y	Y	Y	Y	Y_5
	прибутки, тис. грн				
X_1	1,	1,	2,	2,	3,
X_2	1,	1,	2,	2,	3,
X_3	1,	1,	2,	2,	2,
X_4	2,	2,	3,	2,	1,
X_5	2,	2,	3,	1,	1,
X_6	2,	2,	3,	2,	2,

Необхідно вибрати найкращий варіант бізнес-плану або комбінацію із розроблених планів. Розв‘язати приклад за допомогою програм *Excel* і *Mathcad*, зведенням матричної гри до задачі лінійного програмування.

Розв 'язання.

Маємо гру, платіжною матрицею якої є відповідні елементи вищенаведеної таблиці. Легко переконуємося, що домінуючих стратегій у цій грі немає.

Потім визначаємо:

α = *max* {*min*(l,0; 1,5; 2; 2,7; 3,2); *min*(l,2; 1,4; 2,5; 2,9; 3,l); *min*(l,3; 1,6; 2,4; 2,8; 2,l); *min* (2,1; 2,4; 3; 2,7; 1,8); *min*(2,4; 2,9; 3,4; 1,9; 1,5);*min*(2,6; 2,7; 3,1; 2,3; 2)} = *max*{l,0; 1,2; 1,3; 1,8; 1,5; 2} = 2,

а також

β = *min* (*max*(1,0; 1,2; 1,3; 2,1; 2,4; 2,6); *max*(l,5; 1,4; 1,6; 2,4; 2,9; 2,7*);* *max*(2;2,5;2,4;3;3,4;3,l); *max*(2,7;2,9;2,8;2,7;l,9;2,3);*max*(3,2;3,l;2,l;l,8;l,5;2)}= *min*{2,6;2,9;3,4;2,9;3,2} = 2,6.

Отже, α≠β, тобто немає сідлової точки, а це означає, що необхідно застосувати метод зведення гри до задачі лінійного програмування:

$$\min Z = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6$$

за умов:

$$\begin{cases} t_1 + 1{,}2t_2 + 1{,}3t_3 + 2{,}1t_4 + 2{,}4t_5 + 2{,}6t_6 \ge 1; \\ 1{,}5t_1 + 1{,}4t_2 + 1{,}6t_3 + 2{,}4t_4 + 2{,}9t_5 + 2{,}7t_6 \ge 1; \\ 2t_1 + 2{,}5t_2 + 2{,}4t_3 + 3t_4 + 3{,}4t_5 + 3{,}1t_6 \ge 1; \\ 2{,}7t_1 + 2{,}9t_2 + 2{,}8t_3 + 2{,}7t_4 + 1{,}9t_5 + 2{,}3t_6 \ge 1; \\ 3{,}2t_1 + 3{,}1t_2 + 2{,}1t_3 + 1{,}8t_4 + 1{,}5t_5 + 2t_6 \ge 1; \end{cases}$$

$$t \ge 0 \quad (i = \overline{1{,}6})$$

1).Знайдемо розв‘язок за допомогою програми *Excel* .

Виділимо комірки A1:A6 під значення t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6 . У комірку B1 вводимо формулу цільової функції у вигляді =A1+A2+A3+A4+A5+A6, а у комірки C1:C5–ліві частини обмежень у вигляді

=A1+1,2*A2+1,3*A3+2,1*A4+2,4*A5+2,6*A6

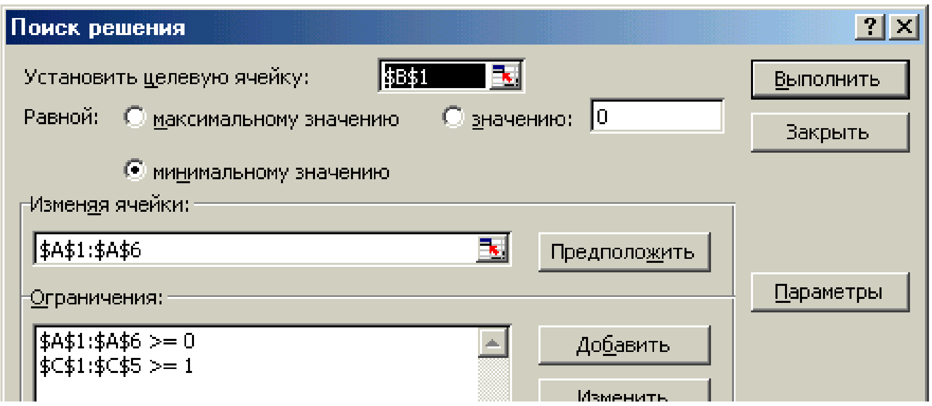
=1,5*A1+1,4*A2+1,6*A3+2,4*A4+2,9*A5+2,7*A6

=2*A1+2,5*A2+2,4*A3+3*A4+3,4*A5+3,1*A6

=2,7*A1+2,9*A2+2,8*A3+2,7*A4+1,9*A5+2,3*A6

=3,2*A1+3,1*A2+2,1*A3+1,8*A4+1,5*A5+2*A6

Встановлюємо курсор у комірку B1. Обираємо команду Сервіс. Відкриваємо діалогове вікно "Поиск решения" і задаємо сценарій:



Натиснути Выполнить і отримати результати. У комірку D1 записати формулу =A1/B1і скопіювати її у комірки D2:D6 (*щоб ввести позначки долару* B1, *треба після введення* B1 *натиснути клавішу* F4). Одержимо у комірках D2:D6 оптимальні значення частот. Щоб знайти ціну гри, треба у комірку B2 ввести формулу =1/B1.Одержимо результати у вигляді таблиці:

B1 = =A1+A2+A3+A4+A5+A6

	A	B	C	D	E
1	0,00	**0,44**	1,00	0,00	
2	0,11	**2,26**	1,05	0,24	
3	0,00		1,31	0,00	
4	0,00		1,08	0,00	
5	0,00		1,00	0,00	
6	0,34			0,76	
7					

Оптимальний розв'язок задачі: t_2=0,11; t_6= 0,34 . Звідси отримаємо оптимальний розв'язок для початкової задачі: $x_2^* = 0{,}24$; $x_6^* = 0{,}76$. Ціна гри υ= 2,264.

2).Знайдемо розв‘язок за допомогою програми *Mathcad.*

Розв‘яжемо задачу у матричному вигляді:

Початкові наближення:

$t_1 := 0 \quad t_2 := 0 \quad t_3 := 0 \quad t_4 := 0 \quad t_5 := 0 \quad t_6 := 0$

$T(t) := \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \end{pmatrix}$ -вектор змінних цільової функції $C := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ - коефіцієнти цільової фун

$Z(t) := C \cdot T(t)$ - цільова функція

$t_1 \ge 0 \quad t_2 \ge 0 \quad t_3 \ge 0 \quad t_4 \ge 0 \quad t_5 \ge 0 \quad t_6 \ge 0$

$D := \begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 1.3 & 2.1 & 2.4 & 2.6 \\ 1.5 & 1.4 & 1.6 & 2.4 & 2.9 & 2.7 \\ 2 & 2.5 & 2.4 & 3 & 3.4 & 3.1 \\ 2.7 & 2.9 & 2.8 & 2.7 & 1.9 & 2.3 \\ 3.2 & 3.1 & 2.1 & 1.8 & 1.5 & 2 \end{pmatrix}$ - матриця коефіцієнтів лівих частин обме

$$B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ - вектор правих частин обмежеі

Given

$D \cdot T(t) \geq B$

$T(t) \geq 0$

Розв'язок

$t := \mathrm{minimize}(Z, t)$

$t^T = (\ 0\ \ 0\ \ 0.11\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0.34\ )$

$Z(t) = 0.442$

$\upsilon := \dfrac{1}{Z(t)}$ $\qquad \upsilon = 2.264$ - ціна гри

Завдання для самоперевірки та контролю засвоєння знань

Задача 1.**Дана матриця гри. Знайти нижню і верхню ціну гри і мінімаксні стратегії сторін:**

а). $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 10 \\ 4 & 7 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **б).** $A = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 & 9 \\ 8 & 9 & 7 & 10 \\ 5 & 11 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 11 \end{pmatrix}$

Задача 2.**Спростити гру:**

а). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **б).** $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Задача 3. **Підприємство може випускати три види продукції (А,Б,В), одержує при цьому прибуток, що залежить від попиту. Попит**

може приймати одне з чотирьох станів (I,II,III,IV). Задана матриця прибутку:

	I	II	III	IV
А	**К**	**3**	**6**	**2**
Б	**4**	**5**	**6**	**5**
В	**1**	**7**	**4**	**К**

Визначити оптимальні пропорції випуску продукції.

Розв'язати приклад за допомогою програм *Excel* і *Mathcad*, зведенням матричної гри до задачі лінійного програмування.

Задача 4. **Розв'язати матричну гру з платіжною матрицею:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & k \end{pmatrix}$$

(К–номер студента у журналі).

Задача 5. **Розв'язати графічно ігри.**

а). $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ **б).** $A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$

в). $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & -4 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & k & 3 \end{pmatrix}$

г). $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -k & 2 & 4 \end{pmatrix}$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

ВАРІАНТ 1

1. Згідно з яким методом здійснюється переміщення по рядках зверху вниз і розподіл всього постачання постачальника по правилу „хто перший за номером стовпчика – той забирає максимально можливу величину вантажу без врахування вартості перевезення”:

а) метод найменших витрат для користувачів;

б) метод „Північно-Західного кута”;

в) метод намірів та реалізацій;

г) метод потенціалів.

2. Вкажіть методи, які використовуються при розв’язанні задач в лінійному та нелінійному програмуванні:

а) метод множників Лагранжа;

б) метод Куна-Таккера;

в) симплекс-метод;

г) метод Гаусса;

д) метод штрафних функцій.

3. При розв’язку транспортної задачі методом потенціалів отримане рішення буде оптимальним, якщо ...
4. Дайте визначення визначеної системи рівнянь.
5. Визначте загальну кількість комірок, кількість заповнених та вільних комірок за умови, що кількість постачальників – 5, а кількість споживачів – 4.

а) всього комірок – 9, заповнених – 4, вільних – 5;

б) всього комірок – 20, заповнених – 8, вільних – 12;

в) всього комірок – 20, заповнених – 12, вільних – 8;

г) всього комірок – 9, заповнених – 5, вільних – 4.

6. Оберіть слова, яких не вистачає у визначенні: базисне рішення згідно з методом Жордана-Гауса – це рішення, при якому ... змінні ...

а) базисні;

б) небазисні;

в) дорівнюють нулю;

г) більше нуля;

д) менше нуля.

7. Чи є наявність в таблиці хоча б одного рядка з дробовими величинами a_{ij} та вільним дрібним членом b_i при розв'язанні задач цілочисельного програмування ознакою відсутності рішення задачі?

8. Продовжить алгоритм розрахунку:

а) початковий розподіл вантажу;

б) розрахунок потенціалів;

в) …

г) …

9. Знайдіть відповідності між такими даними:

а) метод Гоморі 1) $r\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(X)-b_i}$.

б) метод Лагранжа 2) $\frac{\partial F}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}(u_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j})-\sum_{k=1}^{K}\nu_k\frac{\partial h_k}{\partial x_j}=0$.

в) метод Куна-Таккера 3) $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\ge\beta_i$.

г) метод штрафних функцій 4) $\frac{\partial F}{\partial x_i}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i}{\partial x_j}=0$.

10. За умов даної задачі скласти функцію Лагранжа та знайти частинні похідні:

$$F = (2x_1 - 1)^2 + (3x_2 - 2)^2 + (4x_3 - 3)^2 \to \min.$$

При обмеженнях:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10,$$

$$5x_1 x_2 + 7x_1 x_3 + x_2 x_3 = 15.$$

ВАРІАНТ 2

1. З економічної точки зору множник Лагранжа інтерпретували:

а) реальні ціни ресурсів;

б) неявні ціни ресурсів;

в) ціни кінцевої продукції;

г) ціни проміжного продукту.

2. Умови Куна-Такера розглядаються для задач з такими умовами:

а) функція мети відсутня;

б) обмеження задачі задані рівностями;

в) обмеження задачі задані нерівностями; г) правильної відповіді немає;

д) обмеження задачі можуть мати вигляд як рівностей, так і нерівностей.

3. Вкажіть іншу назву метода Гоморрі:

а) метод потенціалів;

б) симплекс-метод;

в) метод Жордана-Гаусса;

г) метод відсікаючих площин.

4. Яка задача може бути розв'язана методом Жордана-Гаусса:

а) задача лінійного програмування;

б) задача нелінійного програмування;

в) задача квадратичного програмування;

г) задача геометричного програмування.

5. Зазначте дії, необхідні для перетворення прямої задачі на двоїсту.

6. Надайте визначення поняттю дослідження операцій.

7. Розв'яжіть транспортну задачу методом північно-західного кута.

Номер постачальника	Постачання	Вимоги користувачів N_j		
	M_i	j=1	j=2	j=3
		50	80	120
i=1	40	9	3	7
i=2	60	5	6	5
i=3	150	4	2	9

8. Графоаналітичним методом розв'язується задача за умови, що

а) площина точок є випуклою площиною;

б) площина точок є угнутою площиною;

в) зазначених умов недостатньо для визначення правильної відповіді.

9. Процес управління переміщенням цільової функції в оптимум – ознака задач:

а) лінійного програмування;

б) нелінійного програмування;

в) динамічного програмування;

г) цілочисельного програмування;

д) квадратичного програмування.

10. Які дії виконуються при використанні симплексного методу?

ВАРІАНТ 3

1. Метою транспортної задачі є:

а) мінімізація витрат для користувачів;

б) мінімізація витрат для постачальників;

в) мінімізація витрат на перевезення;

г)максимізація прибутку постачальників.

2. Чи можна сказати, що метод найменших витрат для споживачів мінімізує витрати кожного споживача? (Так, Ні).

3. Метод північно-західного кута найбільш пригідний для:

а) мінімізації витрат на перевезення товару від постачальників до споживачів;

б) мінімізації витрат користувачів;

в) отримання будь-якого розподілу для подальшого використання при мінімізації витрат;

г)Мінімізації витрат постачальників на перевезення продукції.

4. Множина всіх припустимих рішень системи обмежень задачі лінійного програмування може бути:

а) випуклою;

б) невипуклою;

в) відповіді а), б):

г) усі відповіді невірні.

5. Оберіть невірний варіант введення додаткових змінних (x'_{n+1} - додаткова змінна):

а) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_n \le b_i$ перетворюється у $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_n + x'_{n+1} = b_i$;

б) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_n \ge b_i$ перетворюється у $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_n - x'_{n+1} = b_i$;

в) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_n \le k_i$ перетворюється у $-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{im}x_n - x'_{n+1} = -k_i$;

г) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_n \le k_i$ перетворюється у $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_n - x'_{n+1} = k_i$.

6. Які змінні називаються базисними при вирішенні задачі лінійного програмування за допомогою симплекс-методу?

7. Визначте вірний взаємозв'язок між формами моделі лінійного програмування.

а) стандартну форму можна перетворити тільки у канонічну форму;

б) стандартну форму можна перетворити тільки у загальну форму;

в) канонічну форму можна перетворити тільки у загальну;

г) усі форми є еквівалентними.

8. Економічна інтерпретація коефіцієнтів при змінних у нерівностях-обмеженнях у задачі по випуску товарів для максимізації прибутку:

а) запаси відповідного ресурсу;

б) норми витрат на *і-й* товар;

в) норми запасів для виробництва *і-го* товару;

г) норми прибутку.

9. Який з методів не відноситься до нелінійного програмування?

а) метод Монте-Карло;

б) метод Куна-Таккера;

в) метод штрафних функцій;

г) метод множників Лагранжа.

10. Наведіть приклади функції мети для лінійного і нелінійного програмування.

ВАРІАНТ 4

1. Чи є математичне програмування частковим випадком системного аналізу при наявності однієї чітко вираженої мети, досягнення якої здійснюється за одним критерієм?
2. Функція мети F=c1x1+c2x2+…+cnxn → max говорить про те, що треба знайти:

а) оптимальне значення;

б) середнє значення;

в) мінімальне значення.

3. Визначити, до яких з груп методів вирішення задач цілочисельного програмування (метод відсічень та комбінаторний метод) відносяться наступні методи:

а) метод відсікаючи площин;

б) метод гілок та меж;

в) метод Гоморрі;

г) адитивний метод з бінарними змінними

4. При розв'язанні задач лінійного програмування симплекс-методам змінні, відносно яких вдається вирішити систему рівнянь, називаються ……………, а всі інші - …………………
5. Який вигляд (форму) мають задачі нелінійного програмування.
6. Дайте визначення задачам квадратичного програмування.
7. Описати механізм (кроки) вирішення задач графоаналітичним методом.
8. Який вид програмування використовує принцип оптимальності Р. Беллмана.
9. Симплекс метод:

а) вносить порядок у розрахунки;

б) обмежує кількість рішень, що розглянуті;

в) вірні відповіді а) та б);

г) немає вірної відповіді.

10. В залежності від вигляду функціональних обмежень, як поділяють задачу лінійного програмування?

ВАРІАНТ 5

1. Дайте визначення поняттю: Дослідження операцій – це ...
2. Для того, щоб розв’язати задачу лінійного програмування необхідно:

а) переглянути її допустимі базисні розв’язки;

б) збалансувати задачу;

в) знайти множину збурень зовнішніх станів.

3. Множина всіх припустимих рішень системи обмежень задачі лінійного програмування є ...
4. Яка мета транспортної задачі?
5. Метод вирішення Т-задачі, при якому переміщуємося по рядках зверху вниз і для кожного рядка розподіляємо постачання за правилом6 перший користувач забирає вантаж максимально.

а) метод намірів та реалізацій;

б) метод Північно-Західного кута;

в) метод потенціалів.

6. Який з даних методів не відноситься до методів нелінійного програмування:

а) метод множників Лагранжа;

б) метод Куна-Такера;

в) метод відсікаючи площин (Гоморрі);

г) метод прямого пошуку;

д) градієнтний метод.

7. Визначте і допишіть якої операції не вистачає у алгоритмі вирішення задачі нелінійного програмування методом множників Лагранжа:

- складемо функцію Лагранжа;

- знайдемо змінні x1, x2;
- знайдемо λ;
- розрахуємо оптимальну функцію мети;
- перевіримо рівняння обмеження;

- дослідження на min і max.

8. Множники Лагранжа характеризують:

а) неявні (тіньові) ціни ресурсів, які визначаються обмеженнями;

б) реальні ціни ресурсів, які визначаються обмеженнями;

в) собівартість ресурсів.

9. До задач квадратичного програмування належить ряд задач нелінійного програмування, в яких цільова функція є квадратичною та опуклою, а всі обмеження

а) нелінійні;

б) лінійні;

в) канонічні.

10. Позиномом називається функція вигляду:

а) $f(x) = bT_x + 1/2\ xT\ C_x$

б) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_j$

в) $u_i(t) = c_i\ t_1 a_{i1}\ t_2 a_{i2} \ldots t_m a_{im}$

ВАРІАНТ 6

1. Назвіть основні етапи дослідження операцій.

2. Процес розробки математичної моделі називається…

3. Який вигляд має функція мети для задачі лінійного програмування?

4. У чому полягає вимога невід'ємності змінних?

5. Даний алгоритм намірів є складовою розв'язку транспортної задачі за методом північного-західного кута:

а) Кожен постачальник позначає у своєму рядку горизонтальною лінією найменші тарифи на перевезення;

б) Кожен користувач помічає у колонці вертикальною лінією найменші тарифи.

6. Напишіть двоїсту задачу до даної задачі лінійного програмування на основі наступних даних.

	Продукція			Обсяг ресурсу	Вартість одиниці ресурсу
	X_1	X_2	X_3		
Робоча сила	15	20	25	1200	Y_1
Сировина	2	3	25	150	Y_2
Електр. витрати	35	60	60	3000	Y_3
Вартість одиниці продукції	300	250	450		

Пряма задача: $F = 300X_1 + 250X_2 + 450X_3 \to \max$

Рівняння обмеження:

$$15X_1 + 20X_2 + 25X_3 \le 1200$$

$$2X_1 + 3X_2 + 25X_3 \le 150$$

$$35X_1 + 60X_2 + 60X_3 \le 3000$$

Умова невід'ємності: $X_1 \ge 0$, $X_2 \ge 0$, $X_3 \ge 0$

7. Функція мети для даної транспортної задачі, розв'язаної методом найменших витрат для користувачів буде наступною

	Запаси	Споживач 1	Споживач 2	Споживач 3
Постачальник 1	40	9	3	7
Постачальник 2	60	5	6	5
Постачальник 3	150	4	2	9
	Потреби	50	80	120

а) F=9*40+5*10+6*50+2*30+9*120=1850;

б) F=2*30+4*100+4*20+6*50+3*50+3*10=1020;

в) F=4*50+2*80+9*20+7*40+5*60=1120.

8. Який з методів належить до методів нелінійного програмування?

а) метод множників Лагранжа;

б) метод Куна-Такера;

в) градієнтний метод;

г) усі перелічені методами є методами нелінійного програмування;

д) жоден з перелічених методів не належить до методів нелінійного програмування.

9. Чи правильним є твердження, що округленням лінійного рішення неможливо отримати цілочисельне рішення.

10. Сутність якого методу розв'язку транспортної задачі полягає в правилі „перший за номером колонки забирає максимальний вантаж”?

ВАРІАНТ 7

1. Математична модель лінійного програмування складається з двох частин.

а) так;

б) ні.

2. Якщо система рівнянь – обмежень в задачі лінійного програмування має кількість рішень більше одного, то така система є :

а) визначена;

б) невизначена;

в) сумісна.

3. Чи є випуклий багатокутник множиною рішень системи лінійних рівнянь з двома змінними?

а) так;

б) ні.

4. Вимога невід'ємності змінних в задачах лінійного програмування - ...
5. Які умови повинні виконуватись, щоб дві задачі можна було класифікувати як двоїсті?
6. Перерахуйте методи, які використовують для вирішення транспортної задачі.
7. Які з наведених нижче методів вирішення задач цілочисельного програмування відносяться до методів відсічень, а які до комбінаторних методів?

а) метод гілок та меж;

б) метод Гоморі;

в) адитивний метод з бінарними змінними;

г) відсікаючих площин.

8. Дайте визначення поняття « квадратичне програмування»
9. Задача розрахунку траєкторії руху літака є задачею:

а) нелінійного програмування;

б) геометричного програмування;

в) динамічного програмування.

10. При використанні якого методу нелінійного програмування використовується лише функція мети без обмежень та похідних?

ВАРІАНТ 8

1. Метою розрахунків транспортної задачі є:

а) зведення до мінімуму витрат на перевезення;

б) обґрунтування вибору виду транспорту;

в) максимізація прибутків посередників.

2. Яка принципова відмінність задач нелінійного програмування від задач лінійного програмування?

3. В якій послідовності проводиться вирішення задачі ДО?

а) перевірка та коригування моделі;

б) формалізація задачі; в) постановка задачі;

г) вибір методу і розв'язання задачі;

д) практична реалізація.

3. Обрати зайвий елемент списку:

а) критерій Лапласа;

б) критерій Гурвіца;

в) критерій Вальда;

г) критерій Севіджа;

д) критерій Гауса.

5. Чи використовується метод Гоморрі при вирішенні задач НЛП?

а) так;

б) ні.

6. Множина всіх припустимих рішень системи обмежень задачі ЛП:

а) є випуклою;

б) не є випуклою;

в) не має графічного змісту.

7. Класифікувати методи за типом задач, які ними вирішуються (вказавши типи задач):

а) метод Гоморрі;

б) метод потенціалів;

в) метод гілок та меж;

г) метод північно-західного кута.

8. Якщо у функції мети змінити знаки коефіцієнтів на протилежні:

а) функція мети стає рівною нулю;

б) функція мети змінює своє спрямування (максимізація - мінімізація);

в) стає рівною нескінченості.

9. Дослідження операцій – це наука, яка займається:

а) аналізом політичної ефективності військових операцій;

б) вивченням правильності виконання медичних операцій;

в) з’ясуванням законності фінансових операцій;

г) науковим обґрунтуванням прийняття управлінських рішень.

10. Для вирішення яких задач ДО використовується метод множників Лагранжа?

а) тільки задач ЛП;

б) тільки задач НЛП;

в) тільки задач динамічного програмування;

г) задач всіх перелічених типів.

ВАРІАНТ 9

1. Перерахуйте властивості випуклих множин.

2. Метод відсікаючих площин вперше розробив …

3. Як називається модель транспортної задачі, при якій загальна сума постачання дорівнює сумарному попиту користувачів (2 варіанти відповіді)?

а) відкрита;

б) закрита;

в) збалансована;

г) незбалансована.

4. З яких трьох частин складається модель лінійного програмування?

5. Дайте відповідь „так” або „ні” на питання: чи дійсно множники Лагранжа інтерпретуються як неявні або тіньові ціни ресурсів, які визначаються обмеженнями?

6. Необхідні та достатні умови оптимальності для задач нелінійного програмування, при яких функція мети і рівняння обмеження диференціюються називаються:

а) умовами нормалізації;

б) умовами Куна-Такера;

в) умовами диференціації;

г) умовами Жордана-Гаусса.

7. Дайте визначення поняття „цілочисельне програмування”.

8. Розв’яжіть задачу методом множників Лагранжа:

$F = (2x1-6)^2 + (x2-4)^2 \rightarrow min$

9. Чи вірне твердження (так чи ні): нерівність $g_i \geq 0$ зветься неактивною, або незв’язуючою, у точці X, якщо g_i (X) = 0.

10. Напишіть формулу функції Лагранжа.

ВАРІАНТ 10

1. Множина точок називається випуклою, якщо:

а) сумісно із 2-ма точками відрізку через множину проходить пряма;

б) сумісно з прямою в площині лежить 2 точки;

в) сумісно з його будь-якими 2-ма точками множині належить і весь відрізок прямої лінії, який з’єднує ці 2 точки;

г) жодна із відповідей не є правильною.

2. Який метод є універсальним (на відміну від графоаналітичного) і дозволяє розв’язати будь-яку задачу лінійного програмування?

3. Математична модель загальної задачі лінійного програмування складається із:

а) функції мети та обмежень;

б) функції мети та системи обмежень;

в) системи функцій та нерівностей обмежень;

г) із функції мети та системи нерівностей-обмежень і рівностей-обмежень.

4. Так чи ні: Канонічна форма має функцію мети у вигляді «F→max», а за рахунок додаткових змінних нерівності перетворюються у рівності?

5. Надайте економічну інтерпретацію множників Лагранжа.

6. Що таке цілочисельне програмування?

7. Ознакою відсутності рішення задачі ЦП є:

а) наявність в таблиці хоча б 1 рядка із цілими вільними членами a_{ij} і дробовими значеннями b_i;

б) відсутність в таблиці хоча б 1 рядка із цілими вільними членами a_{ij} і дробовими значеннями b_i;

в) немає правильної відповіді.

8. Згідно із методом потенціалів, якщо потенціали всіх вільних комірок ≥ 0, то це:

а) неоптимальний розв’язок Т-задачі;

б) невизначене рішення Т-задачі;

в) оптимальне рішення Т-задачі;

г) цілочисельне рішення Т-задачі.

9. Напишіть формулу перевірки моделі на закритість у транспортній задачі.

10. У методі Північно-Західного Кута транспортну задачу розв’язують за правилами:

а) «останній за номером колонки забирає максимум вантажу»;

б) «перший за номером колонки забирає максимум вантажу»;

в) правильної відповіді немає.

ВАРІАНТ 11

1. Вкажіть назву рішення, вигідного для одного або декількох підрозділів:

а) найкраще;

б) оптимальне;

в) субоптимальне;

г) спільне;

д) сумісне.

2. Запишіть стандартну форму запису задачі лінійного програмування.

3. Визначте головну властивість методів дискретного програмування:

а) функція мети є адитивною відносно змінних;

б) функція мети представлена її математичними сподіваннями;

в) функція мети задана квадратичним рівнянням;

г) на змінні Х та У накладаються умови цілочисельності.

4. Сумісна система, яка має одне рішення для кожної змінної, є … системою:

а) невизначеною;

б) визначеною;

в) скінченною;

г) нескінченною;

д) оптимальною.

5. Стандартна форма якої задачі має наступний вигляд

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} \cdot x_{ij} \to \min, \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = M_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = N_j, \quad x_{ij} \ge 0$$

6. Який метод розв'язання прямої задачі автоматично надає розв'язок для двоїстої задачі?

а) метод намірів і реалізацій;

б) симплекс-метод;

в) графоаналітичний метод;

г) метод множників Лагранжа.

7. Перерахуйте властивості випуклих множин.

8. Заповніть клітинки, розв'язуючи транспортну задачу методом найменших втрат для споживачів:

Постача-льники	**Тарифи перевезення**				**Запаси**
	Споживач				
	Спож_1	**Спож_2**	**Спож_3**	**Спож_4**	
Постач_1	45	75	30	45	*150*
Постач_2	90	60	45	60	*375*
Постач_3	30	90	30	75	*180*
Постач_4	22,5	30	60	90	*150*
Потреби	*150*	*225*	*180*	*300*	

9. Графоаналітичний метод використовується для вирішення …:

а) задач динамічного програмування;

б) задач лінійного програмування;

в) задач нелінійного програмування;

г) транспортних задач.

10. Кількість заповнених комірок при розв'язанні транспортної задачі має бути …; якщо заповнено менше комірок, то …:

а) $m \times n$, у вільну комірку ставимо 0;

б) $m + n$, у вільну комірку ставимо --;

в) $m \times n - 1$, у вільну комірку ставимо --;

г) $-1 + m + n$, у вільну комірку ставимо 0.

ВАРІАНТ 12

1. Розв’язання яких задач ґрунтується на використанні принципу оптимальності Беллмана про початкові та кінцеві стани і стратегії?

2. Чи існує універсальний метод розв’язання задач нелінійного програмування?

а) так;

б) ні.

3. Якщо $x_1 + x_2 = 4,\ 3x_1 + 5x_2 = 18$, то за методом множників Лагранжа:

а) $\lambda_1 = x_1 + x_2 - 4,\ \lambda_2 = 3x_1 + 5x_2 - 18$;

б) $\lambda_1 = -x_1 - x_2 - 4,\ \lambda_2 = -3x_1 - 5x_2 + 18$;

в) $\lambda_1 = -x_1 - x_2 + 4,\ \lambda_2 = -3x_1 - 5x_2 + 18$;

4. В транспортній задачі обмеження:

а) відсутні;

б) задані рівностями;

в) задані нерівностями.

5. Одним з випадків задач цілочисельного програмування є:

а) наявність бінарних змінних (0;1);

б) відсутність рівнянь-обмежень;

в) задача нелінійного програмування.

6. Запишіть стандартну форму запису задачі лінійного програмування.

7. Вкажіть формули для знаходження потенціалів заповнених і вільних комірок у транспортній задачі:

а) вільні комірки $\gamma_{ij} = C_{ij} - (\alpha_i + \beta_j) = 0$, заповнені комірки $\gamma_{ij} = C_{ij} - (\alpha_i + \beta_j)$;

б) вільні комірки $\gamma_{ij} = C_{ij} - \alpha_i - \beta_j$, заповнені комірки $\gamma_{ij} = C_{ij} - \alpha_i + \beta_j$;

в) вільні комірки $\gamma_{ij} = C_{ij} - \alpha_i - \beta_j$, заповнені комірки $\gamma_{ij} = C_{ij} - (\alpha_i + \beta_j) = 0$;

г) вільні комірки $\gamma_{ij} = C_{ij} - \alpha_i + \beta_j$, заповнені комірки $\gamma_{ij} = C_{ij} - (\alpha_i - \beta_j) = 0$;

д) потенціали вільних та заповнених комірок дорівнюють 0.

8. Транспортна задача є … (оберіть правильну відповідь):

а) відкритою і збалансованою, якщо $\sum_{i=1}^{m} M_i = \sum_{j=1}^{n} N_j$;

б) закритою і незбалансованою, якщо $\sum_{i=1}^{m} M_i \le \sum_{j=1}^{n} N_j$;

в) закритою і збалансованою, якщо $\sum_{i=1}^{m} M_i = \sum_{j=1}^{n} N_j$;

г) закритою і незбалансованою, якщо $\sum_{i=1}^{m} M_i = \sum_{j=1}^{n} N_j$

9. Наведіть приклади задач, розв'язанням яких займається дисципліна «Дослідження операцій».

10. Розв'яжіть транспортну задачу методом найменших втрат для споживачів.

Постача-льники	**Тарифи перевезення**				**Запаси**
	Споживач				
	Спож_1	**Спож_2**	**Спож_3**	**Спож_4**	
Постач_1	45	75	30	45	*150*
Постач_2	90	60	45	60	*375*
Постач_3	30	90	30	75	*180*
Постач_4	22,5	30	60	90	*150*
Потреби	*150*	*225*	*180*	*300*	

ВАРІАНТ 13

1. Чи дозволяє система лінійних рівнянь-обмежень визначити припустиму область існування рішень (оптимальних та неоптимальних)?

2. Функція мети …

а) охоплює всі точки з вказаної області і вказує всі точки, в яких вона приймає значення;

б) охоплює лише частку точок з вказаної області і вказує всі точки, в яких вона приймає значення;

в) охоплює лише частку точок з вказаної області і вказує лише ті точки, в яких вона приймає оптимальне постійне значення;

г) охоплює всі точки з вказаної області і вказує лише ті точки, в яких вона приймає оптимальне постійне значення;

д) не охоплює точки з вказаної області і вказує всі точки, в яких вона приймає значення;

е) не охоплює точки з вказаної області і вказує лише ті точки, в яких вона приймає оптимальне постійне значення.

3. Перерахуйте властивості випуклих множин.

4. Вилучіть зайве твердження. Метод Гаус дозволяє:

а) вилучити зайві тотожні рівняння;

б) добавити додаткові базисні змінні;

в) отримати сумісну систему рівнянь за рахунок вилучення залежних рівнянь;

г) виявити несумісність системи рівнянь;

д) отримати рішення системи рівнянь(починаючи з кінця).

5. Назвіть по порядку основні етапи дослідження операцій

6. Наведіть алгоритм графоаналітичного методу.

7. Перетворіть на канонічну форму:

$$F \rightarrow 10\,X_1 + 15\,X_2 \rightarrow max;$$
$$0{,}5\,X_1 + 0{,}3\,X_2 \leq 30;$$
$$0{,}4\,X_1 + 0{,}8\,X_2 \leq 50;$$
$$10\,X_1 + 20\,X_2 \geq 400;$$

8. Надайте економічну інтерпретацію множників Лагранжа.
9. Складіть пряму та двоїсту задачі:

Ресурси	Продукція			Обсяг ресурсів	Вартість одиниці ресурсу
	X1	X2	X3		
Робоча сила	15	20	25	1200	У1
Сировина	2	3	2,5	150	У2
Електроенергія	35	60	60	3000	У3
Вартість один. продукції	300	250	450		

10. У заданий текст запишіть замість трьох крапок слова з нижченаведеного списку так, щоб вийшло правильне твердження.

Метод найменших … для … полягає у тому, що ми переміщуємося …від одного … до іншого (по …) і забираємо вантаж по … ціні перевезення по принципу «… у черзі серед користувачів забирає вантаж з найменшою ціною перевезення».

ВАРІАНТ 14

1. Чи використовують методи стохастичного програмування, якщо У – випадкова величина, а замість функції мети розглядається її математичне сподівання?

2. Хто з вчених розробив теорію оптимального використання ресурсів?

а) Сааті;

б) Кутковецький;

в) Канторович;

г) Трунов.

3. Вкажіть якою є функція мети при застосуванні методів лінійного і динамічного програмування.

а) функція мети нелінійна відносно параметрів;

б) функція мети є адитивною або мультиплікативною;

в) замість функції мети розглядають її математичне сподівання;

г) функція мети є лінійною відносно параметрів.

4. Якщо в прямій задачі функція мети прямує до максимуму, то у … задачі – до мінімуму.

5. У якій задачі основна мета полягає у зведенні до мінімуму витрат?

6. Коротко опишіть суть методу північно-західного кута.

7. Напишіть формулу закритої моделі транспортної задачі.

8. Віднайдіть відповідність:

1.сумісна система
2.визначена система
3.базисна змінна
4.базисне рішення
5.опорний план
6.не вироджений опорний план
7.оптимальний опорний план

A. якщо при будь-якій кількості m-рівнянь, для яких визначник матриці A відмінний від 0.

B. якщо вміщує рівно m змінних $x_j > 0$, $j = \overline{1, m}$.

C. це базисне рішення лінійно незалежних взаємосумісних рівнянь. В ньому лише m базисних змінних x_i, $j = \overline{1, m}$ можуть прийняти якісь значення, а (n - m) інших змінних x_j.

D. якщо є оптимальне рішення.

E. це рішення при якому небазисні змінні дорівнюють нулю: $x_j = 0$, $j = \overline{m+1, n}$.

F. це базисне рішення $X = \{x_j\}$, $j = \overline{1, m}$, при якому функція мети приймає оптимальне (максимальне або мінімальне) значення.

сумісна система, яка має 1 рішення для кожної змінної.

9. Напишіть перешкоди, що існують при розв'язку задач.

10.Розв'яжіть задачу методом намірів і реалізацій

	-	30	120	50	60
i = 1	100	3	4	7	5
i = 2	80	2	10	6	12
i = 3	50	4	5	8	3
i = 4	30	9	4	1	3

ВАРІАНТ 15

1. Перерахуйте основні етапи операційного дослідження.
2. Виберіть правильну відповідь.

Можна виділити такі варіанти коригувань математичної моделі (2 правильної відповіді):

а) розширення набору зовнішніх факторів, керуючих змінних та вихідних характеристик моделі;

б) розширення набору обмежень, або їхніх комбінацій;

в) зменшення вільних членів обмежень.

г) зменшення числа обмежень.

3. Вкажіть з наведеного, що є множиною змінних, значення яких залежать від вибору стратегій:

а) параметри задачі;

б) керуючі впливами;

в) вихідні змінні;

г) збурення.

4. Теорема двоїстості:

а) пряма й двоїста задачі мають оптимальні розв’язки тоді і тільки тоді, коли обидві вони мають допустимі розв’язки;

б) якщо в оптимальному розв’язку двоїстої задачі обмеження виконується як строга нерівність;

в) оптимальний розв’язок прямої задач та елементами індексних рядків симплекс – таблиць, що відповідають відповідним розв’язкам;

г) допустимий вектор x_0 оптимальний тоді і тільки тоді, коли в двоїстій задачі існує такий допустимий розв’язок y_0, що $c^t x_0 = b^t y_0$.

5. Оберіть «вірно» чи «не вірно» щодо наступного твердження:

Якщо задача лінійного програмування містить m змінних та n обмежень записаних у формі нерівностей (m > n), не враховуючі обмежень невід'ємності змінних $x_i >= 0$, то в оптимальному розв'язку буде не більш як n ненульових компонент вектора x.

6. Заповніть крапочки:

Якщо базисний розв'язок задовольняє умові невід'ємності, то він звіться ………..

7. Запишіть пряму та двоїсту задачу у загальному вигляді.

8. Виберіть правильну відповідь.

Якими методами вирішуються задачі нелінійного програмування:

а) метод потенціалів;

б) симплекс-метод;

в) метод відсікаючих площин;

г) метод множників Лагранжа.

9. Сформулюйте функцію Лагранжа з такими умовами:

$$F(x)=(x1\text{-}5)^2+(2x2\text{-}3)^2 \to min$$

$$x1+x2=7$$

10. У чому полягає основна ідея методу множників Лагранжа:

а) у переході від задачі на умовний екстремум до задачі відшукання безумовного екстремуму деякої побудованої функції Лагранжа;

б) необхідно щоб існував вектор;

в) щоб існували обмеження, які б визначали точку мінімуму в S_0 .

ВАРІАНТ 16

1. Функція мети в методі динамічного програмування є:

а) випадковою величиною;

б) мультиплікативною;

в) дискретною;

г) мінімізуючою.

2. Стандартна форма запису задачі лінійного програмування:

а) $F = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \cdot x_i \to \max$;

б) $F = \sum c_{ij} \cdot x_j$;

в) $F = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_j \to \max$.

3. Якщо базисний розв'язок задовольняє умовні невід'ємності, то він зветься:

а) оптимальним;

б) не виродженим;

в) допустимим;

г) невід'ємним.

4. Задача максимізації лінійного програмування з економічної точки зору можна розглядати як:

а) частку кожного з ресурсів;

б) задача розподілу ресурсів;

в) задача розподілу обмежених ресурсів $b_1 \ldots b_m$;

г) прибуток від реалізації c_1, c_2, c_3;

5. Задачу $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \ge c_1$; $a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \ge c_2$; $a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 \ge c_3$ називають двоїстою стосовно задачі $g(y_1, y_2, y_3) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$.

а) оптимізуючою;

б) непрямою;

в) прямою;

г) споживчою.

Дайте визначення «функції корисності».

Метод мінімального елемента є варіантом:

а) транспортної задачі;

б) північно-західного кута;

в) методу потенціалів;

г) симплекс-методу.

8. Множники Лагранжа в задачі нелінійного програмування з обмеженнями – рівностями є:

а) знакозмінними:

б) незмінними;

в) оптимальними;

г) взаємозалежними.

9. Оскільки градієнти неперервні та лінійно незалежні, то можна застосувати відому теорему, яку?

а) двоїстості;

б) математичного аналізу;

в) обмежень;

г) кількість допустимих множин.

10. Сформулюйте економічну сутність множників Лагранжа.

ВАРІАНТ 17

1. Дайте визначення поняття «дослідження операцій».
2. Вкажіть сумісні і несумісні системи:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ 4x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$

3. Яка модель вважається збалансованою в транспортній задачі?

г) закрита модель;

д) відкрита модель.

4. З'єднайте прямими лініями відповідні елементи правого і лівого стовпчика

$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$	$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i$; $i = \overline{1,k}$; $j = \overline{1,n}$
$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max$	$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$ $a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2$ $a_{m1}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m$ $x_j \ge 0$; $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$
$F = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \to \max$	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = M_i$; $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = N_j$; $x_{ij} \ge 0$
$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}c_{ij} \to \min$	$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b_i$; $a_j > 0$; $x_j > 0$, $j = \overline{1,n}$

5. Симплекс метод дозволяє:

а) вносить порядок у розрахунки;

б) обмежує кількість рішень, що розглянуті;

в) вірні відповіді а) та б);

г) мінімізувати функцію.

6. Який з методів належить до методів нелінійного програмування?

а) Метод множників Лагранжа;

б) Метод Куна-Такера;

в) Градієнтний метод;

г) Метод Монте-Карло.

7. У заданий текст запишіть замість трьох крапок слова з нижченаведеного списку так, щоб вийшло правильне визначення. Оптимальний опорний план – це базисне рішення лінійно … взаємосумісних рівнянь, при якому функція мети приймає … значення.

а) залежних;

б) незалежних;

в) максимальне;

г) мінімальне;

д) оптимальне.

8. Закресліть зайвий варіант серед перелічених нижче. Для того, щоб отримати оптимальний розв'язок системи рівнянь обмежень треба:

а) виявити тотожності та їх вилучити;

б) перевірити систему на сумісність;

в) перевірити систему на визначеність, щоб мати уявити про кількість можливих рішень;

г)перевірити систему на невиродженість.

Складіть двоїсту задачу лінійного програмування, використовуючи дані прямої задачі:

$$F = 100x_1 + 125x_2 + 350x_3 \to \max \text{ – функція мети}$$

$5x_1 + 15x_2 + 10x_3 \le 1000$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 150$ – обмеження

$15x_1 + 40x_2 + 40x_3 \le 2000$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$ – умова додатності.

10. Запишіть у відповідь «так», якщо ви згодні з твердженням, і «ні» –протилежному випадку.

Множина називається *випуклою*, якщо сумісно з її будь-якими двома точками множині належить і весь відрізок прямої лінії, який з'єднує ці дві точки.

ВАРІАНТ 18

1. Вкажіть метод, якого не вистачає для вирішення транспортної задачі?

метод найменших витрат для користувачів, метод північно-західного кута, …, метод потенціалів.

2. Результатом створення задачі є створення:

а) висновку моделі;

б) розв'язку моделі;

в) концептуальної моделі.

3. Транспортна задача має:

а) відкриту модель, якщо виконується рівність $\sum_{i=1}^{m} M_i = \sum_{j=1}^{n} N_j$ (сумарне постачання дорівнює сумарному попиту);

б) закриту модель, якщо виконується рівність $\sum_{i=1}^{m} M_i = \sum_{j=1}^{n} N_j$;

в) закриту модель, якщо виконується нерівність $\sum_{i=1}^{m} M_i > \sum_{j=1}^{n} N_j$;

закриту модель, якщо виконується рівність $\sum_{i=1}^{m} M_i < \sum_{j=1}^{n} N_j$.

4. Напишіть модель збалансованості транспортної задачі ….

5. Вкажіть методи вирішення задач нелінійного програмування і методи розв'язку транспортної задачі?

а) метод множників Лагранжа;

б) м. Куна - Такера;

в) м. північно-західного кута;
г) м. прямого пошуку;
д) м. найменших витрат для користувачів;
е) м. штрафних функцій;
ж) м. потенціалів;
з) графічний метод;
и) м. намірів та реалізації;

6. Перерахуйте властивості випуклих множин (3 шт.). . .

7. Чи є $F=C_{ij}*x_j \rightarrow max$ стандартною формою симплекс методу? (Так, Ні)

8. Методами цілочисельного програмування є (2 шт)…?

9. Якщо серед рівнянь обмежень є дробові значення базисних змінних то обирають серед них, те значення яке має найбільшу дробову частину? (Так, Ні)

10. Вирішіть транспортну задачу двома будь якими методами.

		j=1	j=2	j=3
	Mi /Nj	40	60	80
i=1	80	8	2	7
i=2	40	6	5	6
i=3	60	3	1	9

ВАРІАНТ 19

1. Лінійне програмування має вигляд лінійної математичної моделі, яка складається з таких частин:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i\ ; \ i = \overline{1,k}\ ; \ j = \overline{1,n}$$

а) так;

б) ні.

2. Рішення рівняння A * X = B має вигляд :

де $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$; $B = [b_1, \ b_2, \ \cdots \ b_m]$.

а) $A^{-1}*X = B$;

б) $X = A^{-1}*B$;

в) $X = B*A^{-1}$;

г) всі відповіді вірні.

3. Метод Гауса дозволяє:

а) вилучити зайві тотожні рівняння; отримати сумісну систему рівнянь за рахунок вилучення зайвих (залежних) рівнянь;виявити несумісність системи рівнянь; отримати рішення системи рівнянь(починаючи з кінця);

б) отримати трикутну матрицю, по якій рівняння вирішуються з кінця; число отриманих рівнянь не більше числа змінних; отримати рішення системи рівнянь(починаючи з кінця);

в) визначити наявність тотожностей (тотожності вилучаються); визначити сумісність (несумісна система рівнянь не має сенсу тому не розглядається); визначити визначеність (щоб мати уяву про кількість можливих рішень) г)отримати оптимальне рішення для області, яка визначається системою рівнянь-обмежень.

4. Які з наведених властивостей не є властивостями випуклих множин:

а) пересічення (загальна частина) двох випуклих множин є випуклою множиною;

б) пересічення (загальна частина) кінцевої кількості випуклих множин є також випуклою множиною;

в) кількість кутових точок множини багатокутника (A,B,C) співпадає з числом припустимих базисних рішень системи.;

г)множина рішень системи лінійних рівнянь з двома змінними опуклий багатокутник.

5. В транспортній задачі обмеження:

а) відсутні;

б) задані рівностями;

в) задані нерівностями;

г) задані рекурентно.

6. Задача максимізації лінійного програмування з економічної точки зору можна розглядати як:

а) частку кожного з ресурсів;

б) задача розподілу ресурсів;

в) задача розподілу обмежених ресурсів;

г) прибуток від реалізації.

7. Метод вирішення Т-задачі, при якому переміщуємося по рядках зверху вниз і для кожного рядка розподіляємо постачання за правилом перший користувач забирає вантаж максимально.

а) метод намірів та реалізацій;

б) метод Північно-Західного кута;

в) метод потенціалів;

г) метод Куна-Такера.

8. Які з наведених критеріїв не є критерієм оптимальності в умовах невизначеності.

а) Критерії Вальда;

б) Критерії Лапласа;

в) Критерії Севіджа;

г) Ходжа-Лемана.

9. Продовжить ряд особливостей, які характерні для Т-задачі:

Кількість обмежень: $m + n$

Кількість змінних: $m * n$

Кількість базисних змінних: ________________________

Кількість вільних комірок: _________________________

10. Написати алгоритм двоїстого симплекс методу.

ВАРІАНТ 20

1. Дайте відповідь „так” або „ні” на питання: для нелінійної задачі з обмеженнями

$$F(X) \to \min$$

$$g_i(X) \geq b_i\,,\; i = \overline{1,m}$$

замість функції мети $F(X)$ використовується:

$$\varphi(X) = F(X) + r\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(X) - b_i} \to \min,$$

2. Чи вірне твердження (так чи ні): Математична модель задачі нелінійного програмування має вигляд

$$F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min)$$

при $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i\,;\; i = \overline{1,k}\,,\; j = \overline{1,n}\,;$

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i\,;\; i = \overline{k+1,m}\,,\; j = \overline{1,n}\,.$$

3. Назвіть властивості задачі динамічного програмування.

4. Метод відсікаючих площин існує у двох варіантах. Назвіть їх.

5. Дайте визначення поняття цілочисельне програмування.

6. Напишіть формулу функції мети для транспортної задачі в загальному вигляді.

7. Напишіть формулу функції Лагранжа в загальному вигляді.

8. Треба привести задачу до стандартної форми:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \min;$$

$$-2x_1 + 4x_2 \geq 5;$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10;$$

$$x_j \geq 0\,,\quad j = \overline{1,2}$$

9. Скласти методом Лагранжа потрібну для рішення систему рівнянь (не вирішуючи її). Якщо маємо початкову нелінійну математичну модель

$$F = 5x_1x_2x_3 \to min$$

при обмеженнях: $\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \\ 5x_1x_2 + 7x_1x_3 + x_2x_3 = 15 \end{array}$

10. Заповніть клітинки в таблиці, вирішивши задачу методом північно-західного кута та запишіть у відповідь отримане значення функції мети:

Номер Постача-льника i	Поста-чання M_i	Вимоги користувачів			
		Спож_1	Спож_2	Спож_3	Спож_4
		60	90	72	120
Постач_1	60	18	30	12	18
Постач_2	150	36	24	18	24
Постач_3	72	12	36	12	30
Постач_4	60	9	12	24	36

ВАРІАНТ 21

1. Запишіть математичну модель задачі лінійного програмування за допомогою MathCad.

$$F_1 = 250X_1 + 400X_2 \rightarrow \max.$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 500;$$

$$3X_1 + 5X_2 \leq 400;$$

$$X_1, X_2 \geq 0.$$

2. В якому зі звітів при розв'язанні задач розподілу ресурсів лінійного програмування у Excel зазначається, наскільки задоволені потреби споживачів:

а) у звіті за стійкістю;

б) у звіті за результатами;

в) у світі по граничних умовах.

3. Запишіть синтаксис у командному вікні MathLab 7.1 для функції, яка вирішує задачу з додатковими рівняннями-обмеженнями.

4. Вкажіть (позначте) діапазон комірок, які необхідно виділити при встановленні залежності цільової функції від можливостей постачальників:

<table>
<tr><td rowspan="3">Постачальники</td><td colspan="4">Тарифи перевезення</td><td rowspan="2">Запаси</td></tr>
<tr><td colspan="4">Споживач</td></tr>
<tr><td>Спож._1</td><td>Спож._2</td><td>Спож._3</td><td>Спож._4</td><td></td></tr>
<tr><td>Постачальник_1</td><td>21</td><td>35</td><td>14</td><td>21</td><td>70</td></tr>
<tr><td>Постачальник_2</td><td>42</td><td>28</td><td>21</td><td>28</td><td>175</td></tr>
<tr><td>Постачальник_3</td><td>14</td><td>42</td><td>14</td><td>35</td><td>84</td></tr>
<tr><td>Постачальник_4</td><td>10,5</td><td>14</td><td>28</td><td>42</td><td>70</td></tr>
<tr><td>Потреби</td><td>70</td><td>105</td><td>84</td><td>140</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">План перевезення</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Постачальники</td><td colspan="5">Тарифи перевезення</td></tr>
<tr><td colspan="5">Споживач</td></tr>
<tr><td>Спож._1</td><td>Спож._2</td><td>Спож._3</td><td>Спож._4</td><td>Використано</td></tr>
<tr><td>Постачальник_1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>Постачальник_2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>Постачальник_3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>Постачальник_4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>Задоволено</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr>
<tr><td>Потреби</td><td>70</td><td>105</td><td>84</td><td>140</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Цільова функція</td><td></td></tr>
</table>

5. Запишіть математичну модель та вкажіть вид поставленої задачі:

Замовлення від точок призначення для транспортного засобу для здійснення доставки задаються вектором:

$$R = \{10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 35{,}40{,}45{,}50,\ 55\}.$$

Обмеження: Вантажомісткість транспортного засобу – 21 т.

Транспортний засіб може заїхати не більше ніж в 5 точок призначення.

6. Який з аргументів приймає значення цілого числа, що характеризує причину зупинки алгоритму:

а) output;

б) options;

в) exitflag.

7. Який з записів відповідає умовам критерію Гурвіца у вигляді М-файлу:

а)
```
function [Value,Pos]= _______ (M)
Mir = ones(4,1);
for i=1:4
for j=1:4
Mir(i)=M(i,j)*Mir(i);
end
end
[Value,Pos]=max(Mir,[],1)
```

б)
```
function[Value,Pos]= _______(M)
maxM=max(M,[],1)
for j=1:4
for i=1:4
A(i,j)=maxM(j)-M(i,j);
end
end
maxA=max(A,[],2)
[Value Pos]=min(maxA,[],1)
```

в)
```
function [Value,Pos]= ________(M,c);
c1=min(M,[],2)*c;
c2=max(M,[],2)*(1-c);
[Value,Pos]=max(c1+c2,[],1);
```

8. Задача лінійного програмування передбачає отримання максимального виторгу від виробництва двох товарів. Яку функцію в Excel потрібно застосувати для реалізації завдання?

а) Solver;

б) Analysis Tool pack – VBA;

в) SUMMPRODUCT.

9. Який із варіантів відображає знаходження коренів функцій за допомогою MathCad:

а)

$$A := 0 \qquad B := 6 \qquad N := 7$$

$$f(x) := \left(x^2 - 4\right)N + 3$$

$$\mathrm{root}(f(x), x, A, B) = 1.89$$

б)

$$N = 7 \qquad x := N \cdot \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x \cdot N + 0.7) = 4.004$$

в)

$$x := \frac{1}{12} \qquad N := 7$$

$$\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot N} = 0.371 \qquad 2 \cdot 2 + 10 \cdot N - 3 \cdot \sin(N) = 72.029$$

10. Яким чином вводиться матриця M в середовище MathLab 7.1:

35	70	126	175
56	49	56	161
147	126	84	147
210	54	133	105

ВАРІАНТ 22

1. Розташуйте за порядком виконання кроки, які слід здійснити для вирішення задачі ЛП в Excel за допомогою функції Solver:

а) ввести обмеження в Solver;

б) оформити дані у вигляді таблиці;

в) ввести параметри цільової функції в Solver;

г) записати формули розрахунків у комірки.

2. Що передбачає параметричний аналіз даних?

3. Навіщо вводять фіктивних постачальників або фіктивних споживачів при розв'язку транспортної задачі?

а) щоб ускладнити процес пошуку рішення;

б) щоб звести незбалансовану задачу до збалансованої;

в) щоб вирішити проблему максимізації прибутку;

г) щоб змінити загальну сукупну вартість перевезень.

4. Чи правильне твердження, що функція bintprog у Matlab подає результат у вигляді двійкового коду?

5. В Matlab задача завантаження і розвантаження транспортного засобу вирішується за допомогою функції:

а) fval;

б) bintprog;

в) exitflag;

г) fsolve;

д) fminmax;

е) fmincon.

6. Допишіть частину даних, яких не вистачає в М-файлі, що реалізує мінімаксний критерій прийняття рішення:

```
function [Value,Pos]=minimax(M)
minmax=min(__ __,2);
[Value,Pos]=    (minmax,[],1);
```

7. Які з перелічених критеріїв використовуються за умови, що відомий вектор ймовірності появи зовнішніх станів:

а) мінімаксний;

б) Байєса-Лапласа;

в) Севіджа;

г) Гурвіца;

д) Ходжа-Лемана;

е) Гермейєра;

ж) добутків.

8. В задачі по управлінню виробництвом товарів і запасами витрати з'являються коли …

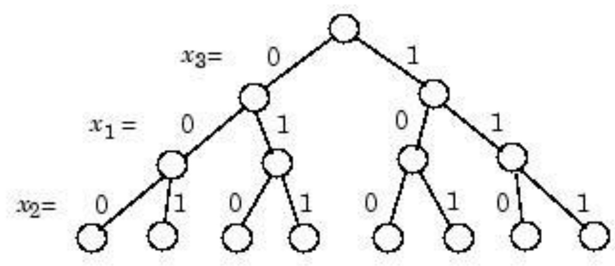
а) підприємство щось виробляє, але запаси відсутні;

б) є запаси, але немає виробництва;

в) є і запаси, і виробництво товарів;

г) незалежно від обсягів виробництва і зберігання.

9. На рис. зображено алгоритм, що лежить в основі одного з методів пошуку оптимального рішення. Що це за метод?



10. На що вказує аргумент exitflag (Matlab)?

а) на виконання процесу оптимізації;

б) на припинення процесу оптимізації;

в) на помилки в роботі програми;

г) на значення цільової функції.

ВАРІАНТ 23

1. При використанні критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності в програмі MathLab матриця можливих рішень записується:

а) в M-file;
б) в Command Window;
в) імпортується з інших документів.

2. Чи вірне таке твердження: для вирішення транспортної задачі в Excel комірка цільової функції має містити функцію SUMM масиву Постачальники Споживачі?

а) так;
б) ні.

3. При розв'язуванні задач лінійного програмування за допомогою програми Mathcad запис P: = maximize (f, x1, x2) визначає:

а) значення цільової функції;
б) значення цільової функції та вектор розв'язку X;
в) значення цільової функції, вектор розв'язку X, обсяг надлишку ресурсів, що не були повністю використані.

4. Запис лінійних обмежень в програмі MathLab має вигляд:

а) Aeq*X = beq
б) ceq*X = 0
в) A*X ≤ b

5. Продовжити визначення: exitflag – це вихідний аргумент функції оптимізації програми MathLab, який ...

6. Для вирішення задачі лінійного програмування в середовище Mathcad необхідно ввести:

а) функцію мети, обмеження;
б) обмеження, вектор цільової функції;
в) функцію мети, початкові значення вектору X, обмеження.

7. При складанні звіту за результатами в Excel статус комірки «Связанное» означає:

а) ресурс використано повністю
б) ресурс використано не повністю
в) ресурсу недостатньо для задоволення вимог задачі оптимізації.

8. Заповнити ліву та праву колонки, розподіляючи вхідні аргументи функцій оптимізації MathLab: f, A, b, Aeq, beq, x, H.

Матриці	Вектори

9. Продовжити визначення: у Звіті за стійкістю, що складається в Excel за допомогою Solver, Нормований градієнт показує…

10. Обмеження в Mathcad записуються як:

а) a1*x1 + b1*x2 ≤ N1

б) a2*x1 + b2*x2 ≤ N2

в) a1*x1 + b1*x2 ≥ N1

г) a2*x1 + b2*x2 ≥ N2

д) A = [a1 b1;a2 b2]

ВАРІАНТ 24

1. Де розташовані оптимальні рішення завдань ЛП? а) в крайній точці ОДР; б) на межі ОДР; в) у внутрішній точці ОДР.

2. Як перейти від завдання мінімізації *f(x)* до еквівалентного завдання максимізації?

а) $min\ [\ f(x)\ ] <=> max\ [\ -\ 1/f(x)\ ];$

б) $min\ [\ f(x)\ ] <=> max\ [\ -f(x)\ ];$

в) $min\ [\ f(x)\ ] <=> max\ [\ 1/f(x)\ ].$

3. Які елементи матриці Ck називають істотними елементами?

а) які менше нуля;

б) які відповідають базисним перевезенням плану X_k;

в) які відповідають небазисним перевезенням плану X_k;

г) які більше нуля.

4. За яких умов план Т-завдання є опорним?

а) якщо з його основних комунікацій можна скласти замкнутий маршрут;

б) якщо з його основних комунікацій не можна скласти замкнутий маршрут;

в) якщо з його основних комунікацій можна скласти будь-який маршрут.

5. Яка ознака оптимальності плану X_0 Т-завдання?

а) $v_j - u_i \le c_{ij},\ x_{ij} = 0;$

б) $v_j - u_i \ge c_{ij},\ x_{ij} = 0;$

в) $v_j - u_i = c_{ij},\ x_{ij} >.$

6. Яка ознака оптимальності при рішенні транспортної задачі угорським методом?

а) якщо після другого етапу сумарна нев'язка Δ_{k+1} рівна 0, то X_k оптимальний план;
б) якщо після другого етапу сумарна нев'язка Δ_{k+1} рівна 0, то X_{k+1} оптимальний план;
в) якщо після другого етапу сумарна нев'язка Δ_{k+1} рівна 0, то X_{k+1} оптимальний план.

7. Як змінюються оцінки при галуженні множини для завдань максимізації ЛЦП?

а) падають;

б) зростають;

в) не змінюються.

8. Чи змінюється безліч допустимих рішень задачі ЛЦП при дослідженні процедури W2?

а) так;

б) ні;

9. Вкажіть ознаку оптимальності рішення задачі методом відсікаючих площин.

а) існує таке і, що xi0 < 0;

б) всі xi0 >= 0;

в) xi0 >= 0 и все xi0.

10. Якими повинні бути множники Лагранжа λi в умовах теореми Куна-Таккера?

а) $\lambda i \geq 0$;

б) $\lambda i \leq 0$;

в) $\lambda i = 0$.

ВАРІАНТ 25

1. За допомогою якої функції MatLab можна вирішити задачі бінарного цілочисельного програмування?

2. Виклик функції x = bintprog(f):

а) встановлює початкові значення;

б) вирішує задачу нелінійного програмування;

в) вирішує задачі лінійного програмування.

3. Алгоритм якого методу використовує функція bintprog?

а) метод гілок та меж

б) метод намірів та реалізацій

в) метод конфігурацій

4. Параметр fval – це:

а) містить інформацію про оптимізацію

б) значення цільової функції

в) кількість пройдених вершин

5. Цільова функція процесу доставки товару по точкам призначення має вигляд, що таке P і що таке R:

$$\min\left(P_T - \sum_{i=1}^{n} R_i\right) \geq 0 .$$

6. Для того щоб записати критерій в MatLab потрібно створити M-fail:

а) так;

б) ні.

7. Розділіть класичні і похідні критерії у 2 колонки:

а) критерій Гурвіца;

б) критерій Ходжа-Лемана;

в) мінімаксний критерій;

г) критерій Гермейєра;

д) критерій добутків.

е) критерій Байєса-Лапласа;

ж) критерій Севіджа.

8. Співставити назви критеріїв

1.	критерій Гурвіца;	а)	ММ-критерій
2.	критерій Ходжа-Лемана;	б)	BL-критерій
3.	мінімаксний критерій;	в)	S-критерій
4.	критерій Гермейєра;	г)	P-критерій
5.	критерій добутків.	д)	HW-критерій
6.	критерій Байєса-Лапласа;	е)	HL-критерій
7.	критерій Севіджа.	ж)	G-критерій

9. Розв'яжіть транспортну задачу методом північно-західного кута.

Номер поста-чальника	Постача-ння M_i	Вимоги користувачів N_j		
		j=1	j=2	j=3
		50	80	120
i=1	40	9	3	7
i=2	60	5	6	5
i=3	150	4	2	9

10. До задач квадратичного програмування належить ряд задач НП, в яких цільова функція є квадратичною та опуклою, а всі обмеження ______?

ВАРІАНТ 26

1. В якому році з явився вперше термін «лінійне програмування»?

а) 1951 р.

б) 1851 р.

в) 1604 р.

2. Який загальний вигляд має задача лінійного програмування?

а) $\sum_{i}^{n} \sum_{\iota}^{m} d_{i\iota} x_{i\iota} \to MIN$;

б) $Q(x) = \sum_{\iota}^{n} c_{\iota} x_{\iota} \to MAX$.

3. Чи відноситься симплекс метод до задачі лінійного програмування?

а) так;

б) ні.

4. Симплекс метод має табличну форму алгоритму?

а) так;

б) ні.

5. Теорія математичних моделей та методів отримання оптимальних розв'язків, що спрямована на обґрунтування доцільності вибору тієї чи іншої альтернативи з множини можливих в області цілеспрямованої діяльності людини:

а) математичне програмування;

б) дослідження операцій;

в) лінійне програмування.

6. Сукупність взаємоузгоджених дій, що об'єднані єдиним задумом та скеровані на досягнення певної мети:

а) математичне програмування;

б) дослідження операцій;

в) операція.

7. Формальне співвідношення, яке встановлює зв’язок критерію ефективності з діючими факторами операції та визначає припустимі стратегії оперуючої сторони:

а) математична модель операції;

б) дослідження операцій;

в) операція.

8. Задачі дослідження операцій поділяють на:

а) прямі;

б) обернені;

в) криві;

г) непрямі.

9. Коефіцієнт α при початковій базовій змінній в рядку прямої задачі дорівнює різниці між лівою та правою частинами обмеження двоїстої задачі,яке асоційоване з цією початковою змінною - це

а) двоїстий симплекс-метод;

б) метод уточнення;

в) аналітичний метод.

10. На що вказує аргумент exitflag (Matlab)?

ВАРІАНТ 27

1. Це програмне середовище призначено для здійснення різноманітних розрахунків і базується на матричному зчисленні. В ньому можна здійснювати обробку матриць та скалярних величин, крім того існує можливість написання власних функцій та сценаріїв. Про яке середовище йдеться мова?

а) Mathcad;

б) MathLab;

в) Solver (Excel).

2. Для введення обмежень у програмному середовищі Mathcad використовується функція:

а) Bintprog;

б) Maximize;

в) Given;

г) Value.

3. Напишіть алгоритм розв'язку задачі лінійного програмування за допомогою програми Solver, яка входить у надбудови Excel пакета Microsoft Office

4. У якому програмному забезпеченні можна створювати звіти та сценарії?

а) Mathcad;

б) MathLab;

в) Solver (Excel).

5. У програмному забезпеченні MathLab Функція *bintprog()* - вирішує задачі бінарного цілочисельного програмування наступної форми:

$$\min_X f' \cdot X \text{ при цьому } \begin{matrix} A \cdot X \leq b \\ Aeq \cdot X = beq \end{matrix},$$

де f, b та beq - це ____

A та Aeq - це____

6. У програмному забезпеченні MathLab Функція *x = bintprog(f, A, b)* вирішує задачу бінарного цілочисельного програмування:

а) $\min_X f' \cdot X$

б) $\min_X f' \cdot X$ при цьому $A \cdot X \leq b$

в) $Aeq \cdot X = beq$

7. В якому вигляді записуються обмеження у програмному забезпеченні Mathlab:

$$X_1 + X_2 + X_4 + X_6 + X_7 \leq 1$$

$$5X_5 + 6X_6 + 7X_6 \leq 15$$

а) a= [0 0 0 0 0 0 1 0 0 1; 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1]

б) a:=(0 0 0 0 0 0 1 0 0 1; 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1)

8. Для чого застосовується параметричний аналіз у програмі Solver, яка входить у надбудови Excel пакета Microsoft Office?

9. Досліджувати процеси прийняття рішень в умовах невизначеності при використанні класичних критеріїв, допоміжних та комбінованих критеріїв можна в програмному забезпеченні:

а) Mathcad;

б) MathLab;

в) Solver (Excel).

10. З яких частин складається робоча область програми MathLab?

ВАРІАНТ 28

1. Чим відрізняються аргументи a, b та a_{eq} b_{eq} у MatLab?

2. Як мінімізувати функцію $f(x) = 3x^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ у інтервалі [1,1] у MatLab?

3. Чи вірний такий запис задачі у MathCad:

$f(x, y) := 2 + 2\cdot x + 2\cdot y - x^2 - y^2$ $\quad i := 0..9($ $\quad j := 0..9($

$x_i = 0.1 + 0.1i$ $\quad PF_{i,j} := f(x_i, y_j)$ $\quad x := 5, y := 4$

$y_j = 0.1 + 0.1j$

$f(x, y) := 2 + 2\cdot x + 2\cdot y - x^2 - y^2$

Giver

$x \geq ($ $\quad 0 \leq y \leq 9 - x$

$Q = \min(f)$ $\quad Q = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(Q_0, Q_1) = -61$

а) вірно;

б) невірно.

4. Що з нижчепереліченого не враховує надбудова Solver у MS Excel:

а) обмеження;

б) рівняння цільової функції;

в) максимальне/мінімальне значення.

5. Чи відрізняється розв'язок задачі лінійного програмування, отриманий за допомогою MathCad та MS Excel:

а) MathCad завищує значення;

б) MS Excel завищує значення;

в) MathCad занижує значення;

г) не відрізняються.

6. Які типи звітів можна створити за допомогою надбудови Solver:

а) звіт за стійкістю

б) звіт за цільовою функцією

в) звіт за граничними результатами

г) не має правильної відповіді

7. Функції *fminunc* та *fminsearch* у MatLab – це функції :

а)нелінійної оптимізації;

б) *fminunc* - нелінійної оптимізації; *fminsearch* - лінійної оптимізації;

в) *fminunc* - лінійної оптимізації; *fminsearch* - нелінійної оптимізації

г)лінійної оптимізації.

8. Задача мінімізації функцій декількох змінних $f(x_1, x_2,... x_n)$ виконується у MatLab за допомогою:

а) lsqnonlin;

б) fsolve;

в) fzero;

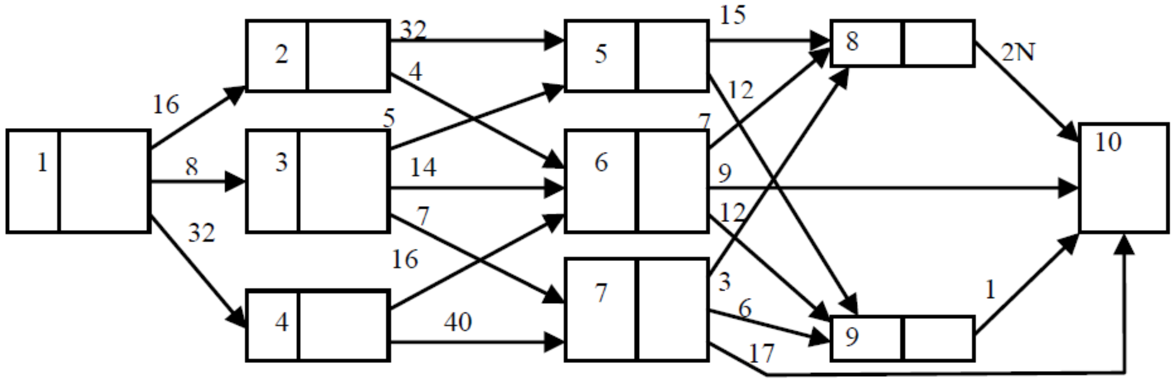
г) fminbnd;

д) fminsearch.

9. Розв’язати транспортну задачу методом найменших витрат.

Таблиця тарифів та запасів					
Постача-льники	Тарифи перевезення				Запаси
	Спож_1	Спож_2	Спож_3	Спож_4	
Постач 1	48	85	32	48	200
Постач 2	106	64	41	21	420
Постач 3	38	120	52	80	232
Постач 4	24	32	64	100	195
Потреби	200	255	208	384	

10. Розрахувати найкоротший шлях орієнтованої мережі.



Граф-схема орієнтованої мережі

ВАРІАНТ 29

1. Знайти корені функції у середовищі MathCad, якщо A=0; B=6; T=7:

а) $f(x) = (x^2 - 4) * N + 3$

б) $F(X) = \sin[\pi X + (4 * X + \pi * B)^2]$

1. Вкажіть послідовність дій при завантаженні програми Solver у надбудові Excel для розв'язання задач лінійного програмування.

2. За допомогою якої з перелічених функції можна знайти максимум задачі лінійного програмування у середовищі MathCad:

а) given;

б) minimize;

в) maximize.

4. Які види звітів можна отримати в просторі Excel за допомогою діалогового вікна «Результати пошуку рішення» (оберіть вірну комбінацію):

а) звіт по граничних умовах; звіт за оптимальністю; звіт за результатами;

б) звіт по граничних умовах; звіт за стійкістю; звіт за результатами;

в) звіт по граничних умовах; звіт за оптимальністю; звіт за стійкістю;

5. Приведіть у відповідність назви та структури звітів, які можна отримати в середовищі Excel за допомогою діалогового вікна «Результати пошуку рішення»:

1. звіт за результатами;

2. звіт за стійкістю;

3. звіт по граничних умовах.

а) У таблиці 1 наводяться такі значення для змінних:

- результат розв'язання задачі;

- норм, градієнт (редукована вартість), тобто додаткові двоїсті змінні, які вказують, наскільки змінюється цільова функція після примусового додавання одиниці цієї продукції в оптимальний розв'язок.

У таблиці 2 наводяться аналогічні значення для обмежень: - розмір використаних ресурсів;

- тіньова ціна (множник Лагранжа), тобто двоїсті оцінки, які вказують, як зміниться цільова функція після зміни ресурсів на одиницю.

б) У таблиці 1 наведені дані про цільову функцію. У колонці «Исходно» наведені значення цільової функції до початку обчислень.

У таблиці 2 наведені значення вхідних змінних, отримані в результаті розв'язання задачі.

Таблиця 3 показує результати оптимального розв'язання для обмежень і граничних умов.

в) наводяться значення xj в оптимальному розв'язку; наводяться нижні межі зміни значень xj.

6. Під параметричним аналізом розуміють розв’язання задачі _________при різних значеннях того параметру, що обмежує покращення цільової функції. Заповніть пропуск словом з переліку:

а) оптимізації;

б) мінімізації;

в) максимізації.

7. Поясніть зміст складових формули, розміщеної в просторі MatLab:

>> *Xopt = constr (‘fun’, X, Options, VLB, VUB)*

8. Цільова функція функції *constr* повинна повертати параметр(и):

а) Значення власне цільової функції та вектор значень лівої частини обмежень, представлених у вигляді $f(\mathbf{X}) \le 0$

б) Значення власне цільової функції або вектор значень лівої частини обмежень, представлених у вигляді $f(\mathbf{X}) \le 0$

9. Задачі якої форми можна вирішувати за допомогою Функції bintprog ()?

10. Який з перелічених записів відповідає запису в m-файлі для визначення критерію Байєса-Лапласа у просторі MatLab?

а) function[Value,Pos]= Laplas (M) Mir=ones(4,1);

for i=1:4 for j=1:4 Mir(i)=M(i,j)*Mir(i); end

end [Value,Pos]=max(Mir,[],1)

б) function[Value,Pos]= Laplas M);

maxM1=max(M,[],1);maxM=max(maxM1,[],2); a=maxM+1; A=zeros(4,4)

for i=1:4 for j=1:4 A(i,j)=M(i,j)-a; end

end

q=[0.25 0.25 0.25 0.25] for i=1:4

for j=1:4 E(i,j)=A(i,j)*q(j); end

end

minE=min(E,[],2); [Value,Pos]=max(minE,[],1)

в) function[Value,Pos]=Laplas(M);

q=[0.25 0.25 0.25 0.25]

for i=1:4

for j=1:4

E(i,j)=M(i,j)*q(j);

end

end

```
SumE=sum(E,2)
[Value Pos]=max(SumE,[],1);
```

г) function[Value,Pos]= Laplas (M,v);

```
q=[0.25 0.25 0.25 0.25]
for i=1:4
for j=1:4
E(i,j)=M(i,j)*q(j);
end
end
SumE=sum(E,2)*v;
c2=min(E,[],2)*(1-v);
[Value Pos]=max(SumE+c2,[],1);
```

ВАРІАНТ 30

1. Дайте визначення MathCady.

2. У чому полягає метод Зойтендейка?

3. Метод Гауса це:

а) метод послідового включення перемінних;

б) метод послідовного виключення перемінних.

4. Де використовується Matlab?

5. Як називаються вектори, що лежать на одній прямій ?

6. Що поєднує в собі MathCad:

а) розширення, легкі в використанні документів;

б) створення унікальних рішень для технічної калькуляції;

в) створення унікальних рішень для дизайнерських проектів.

7. Завдяки чому функція називається неприливною?

8. Якщо будь-який рядок або стовпець матриці з одних нулів, то її визначник дорівнює:

а) 0;

б) 1;

в) 2.

9. Система лінійних рівнянь називається спільною, якщо має:

а) один розв'язок ;

б) не має розв'язку;

в) два розв'язки.

10. Які типи звітів можна створити за допомогою діалогового вікна Результати поиска решения/Решение найдено...?:

а) звіт по стійкості;

б) звіт по максимальним значенням;

в) звіт по результатам;

г) звіт по оптимальним розв'язкам;

д) звіт про границі.

Список використаної літератури

1. *Бугаян И.Р.* Макроэкономика: Учебн. пособие. – Ростов-на-Дону: «Феникс», 2000. – 352 с.
2. *Булига К.Б., Михайленко В.Н.* Комп‘ютерний практикум із застосуванням математичних методів у економіці. – К.: Ізд-во Європ. нн-ту, 2002. – 48 с.
3. *Замков О.О., Толстопятенко А.ВА., Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике: Учебник. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Изд-во «Due», 1997. –368 с.
4. *Занг В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999 – 335 с.
5. *Колемаев В.А.* Математическая экономика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
6. *Кучин Б.Л., Якушев Е.В.* Управление развитием экономических систем: технический прогресс, устойчивость. – М.: Экономика, 1990. – 157 с.

7 *Кондратьев Н.Д.* Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. Избранные труды – М.: ЗАО, Изд-во «Экономика», 2002. – 767 с.

8. *Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И.* Высшая математика: математическое программирование. Минск: Вышэйшая школа, 2001.
9. Математические основания геронтологии./ Под ред. В.Н. Крутько/ *В.Н. Крутько, М.Б. Славин, Т.М. Смирнов.* – М.: Едиторная УРСС, 2002. – 384 с.
10. *Малыхин В.И.* Математическое моделирование экономики: Учебн. пособие. – М.: Изд-во УРАО, 1998 – 160 с.
11. Математические основы теории управляемых систем / *Л.С. Гноенский, Г.А. Каменский, Л.Э. Эльсгольц.* – М.: Наука, 1969. – 512 с.
12. *Медведєв М.Г., Барановська Л.В.* Ітров: методи моделювання економічних систем: Навч. посібник. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2001. – 116 с.
13. *Медведєв М.Г.* Економетричні методи моделювання: Навч. посібник. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2001. – 140 с.
14. *Наринян А.Р., Поздеев В.А.* Основы научных исследований: Учебн. пособие. – К.: Изд-во Европ. ун-та, 2002. – 110 с.

15. Основы теории оптимального управления./ Под ред. В.Ф. Кротова/ *В.Ф. Кротов, Б.А. Лагоша, С.М. Любанов, Н.И. Даниленко, С.И. Сергеев.* – М.: «Высшая школа», 1990. – 430 с.

16. *Таха Х.А*. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом "Вильямс", 2001

17. *Поздеев В.А.* Нестационарные волновые поля в областях с подвижными границами. – К.: Наук. думка, 1992. – 244 с.

18. *Ротач В.Я.* Расчет настройки промышленных систем регулирования. – Л.: Госэнергоиздат, 1961. –344 с.

19. Справочное пособие по теории систем автоматического регулирования и управления. / Под общ. ред. *Е.А. Санковского*. – Мн.: «Вышэйш. Школа», 1977. – 584 с.

20. *Эрроусмит Д, Плэйс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 243 с.